Inventiones math. 30, 181 – 196 (1975)

Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe

Eberhard Freitag (Mainz)

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden invariante holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe konstruiert. Der Grad dieser Formen ist $N-1$; $N=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Der Spezialfall $n=2$ wurde in [1] behandelt. Zur Konstruktion dieser Formen werden Modulformen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ benutzt, genauer, es wird eine bilineare Paarung

$$\left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v\right] \times \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v^{-1}\right] \to \Lambda^{N-1}\,\Omega(S_n)^\Gamma$$

konstruiert.

Aus der Tatsache, daß jede invariante holomorphe Differentialform vom Grad $N-1$ geschlossen ist, kann man Konsequenzen für Modulformen vom Gewicht $r \leqq \frac{n-1}{2}$ $(2r \in \mathbb{Z})$ ziehen. Solche Formen müssen singulär sein, d.h. es treten nicht verschwindende Fourierkoeffizienten $a(T)$ nur auf, wenn die Determinante $|T|$ verschwindet.

Wie mir Herr H. Resnikoff freundlicherweise mitteilte, hat er diesen Satz auf völlig anderem Wege bewiesen. Inzwischen liegt ein preprint seines Beweises vor.

§ 1. Singuläre Modulformen

Die Siegelsche Halbebene n-ten Grades S_n besteht aus allen n-reihigen symmetrischen Matrizen $Z=X+iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist.

Jeder analytische Automorphismus von S_n hat die Form

$$Z \to MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{1}$$

wobei

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

eine $2n$-reihige reelle symplektische Matrix ist.

Im folgenden sei $\Gamma \subset Sp(n, \mathbb{R})$ eine Untergruppe, welche mit der Siegelschen Modulgruppe

$$\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z}) \tag{2}$$

kommensurabel ist. Die Gruppe $\Gamma_n \cap \Gamma$ hat also sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index.

Unter einem *Automorphiefaktor* vom Rang h versteht man eine Abbildung

$$J\colon\ S_n \times \Gamma \to Gl(h, \mathbb{C})$$

mit den Eigenschaften:

1) $J(Z, M)$ ist holomorph in Z,

2) $J(Z, MN) = J(NZ, M) \cdot J(Z, N)$.

Beispielsweise ist die komplexe Funktionalmatrix ein Automorphiefaktor.

Der Hauptwert des Logarithmus von $|CZ+D|$ ist in einer Umgebung von $Z = iE$ analytisch und kann zu einer auf ganz S_n analytischen Funktion $\log|CZ+D|$ fortgesetzt werden. Eine Funktion

$$v\colon\ \Gamma \to \mathbb{C}^{\cdot} = \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0\}$$

heißt *Multiplikatorsystem* vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$, falls

$$J(Z, M) = v(M)\,|CZ+D|^r$$

ein Automorphiefaktor ist. Wenn r ganz ist, so bedeutet dies einfach, daß v ein abelscher Charakter ist.

Im Falle $n > 1$ ist das Gewicht eines Multiplikatorsystems stets rational. Außerdem ist die Faktorkommutatorgruppe von Γ endlich. Daher ist eine geeignete Potenz von v trivial ($v^j = 1$).

Im Falle $n = 1$ wollen wir dies voraussetzen.

Der Vektorraum der Modulformen zum Multiplikatorsystem v (vom Gewicht r) wird mit $[\Gamma, r, v]$ bezeichnet oder einfach mit $[\Gamma, r]$, falls $r \in \mathbb{Z}$ und $v = 1$ ist.

Eine solche Modulform ist eine analytische Funktion

$$f\colon\ S_n \to \mathbb{C},$$

die dem Transformationsgesetz

$$f(MZ) = v(M)\,|CZ+D|^r f(Z) \qquad \text{für } M \in \Gamma \tag{3}$$

genügt.

Die Funktion f ist dann insbesondere periodisch unter einem gewissen Gitter von symmetrischen Matrizen und gestattet daher eine Fourierentwicklung

$$f(Z) = \sum_{T = T'} a(T)\, e^{2\pi i Sp(TZ)}, \tag{4}$$

wobei T das zum Periodengitter duale Gitter durchläuft.

1.1. Theorem. *Es sei*

$$f \in [\Gamma, r, v], \qquad 2r \in \mathbb{Z}$$

eine Modulform vom Gewicht r, deren Gewicht höchstens den Nenner zwei hat. Dann gilt

$$a(T)=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Rang}(T)<2r+1.$$

Diese Aussage ist natürlich nur im Falle $r \leqq \frac{n-1}{2}$ relevant.

Sei $M \in Sp(n, \mathbb{Q})$ eine rationale symplektische Matrix. Dann ist

$$f\,\underset{r}{|}\,M(Z) := |CZ+D|^{-r} f(MZ) \tag{5}$$

eine Modulform bezüglich der konjugierten Gruppe $M^{-1}\Gamma M$. Die Fourierkoeffizienten dieser Form bezeichnen wir mit $a_M(T)$.

$$|CZ+D|^{-r} f(MZ) = \sum a_M(T)\, e^{2\pi i Sp(TZ)}. \tag{6}$$

Im Falle $n>1$ gilt aufgrund des „Koecherprinzips“

$$0 \neq a_M(T) \;\Rightarrow\; T \geqq 0.$$

Im Falle $n=1$ ist dies eine zusätzliche Voraussetzung.

Spitzenformen sind durch die Bedingung

$$a_M(T) \neq 0 \;\Rightarrow\; |T| \neq 0 \tag{7}$$

charakterisiert. Den Unterraum der Spitzenformen bezeichnen wir mit $[\Gamma, r, v]_0$.

Ein Gegenstück zum Begriff der Spitzenform ist der Begriff der singulären Form.

Eine Modulform heißt *singulär*, falls folgende Bedingung erfüllt ist.

$$a_M(T) \neq 0 \;\Rightarrow\; |T| = 0. \tag{8}$$

H. Resnikoff hat in [5] bewiesen, daß nicht verschwindende singuläre Formen nur für kleine Gewichte, $r \leqq \frac{n-1}{2}$, existieren können. Aufgrund von Theorem 1.1 gilt hiervon auch die Umkehrung.

1.2. Theorem. *Eine Modulform*

$$f \in [\Gamma, r, v]; \quad f \neq 0, \; 2r \in \mathbb{Z},$$

ist dann und nur dann singulär, falls

$$r \leqq \frac{n-1}{2}$$

gilt.

Wir wollen aus diesem Satz einige Folgerungen ziehen.

1.2$_1$. Folgerung. *Jede Spitzenform vom Gewicht r*

$$r \leqq \frac{n-1}{2}, \quad 2r \in \mathbb{Z}$$

verschwindet identisch.

Eine weitere Folgerung wollen wir der Einfachheit halber nur für die volle Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ aussprechen.

Durch den Grenzprozeß

$$f|\Phi(Z) := \lim_{t\to\infty} f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} \tag{9}$$

wird bekanntlich ein Operator

$$[\Gamma_n, r] \xrightarrow{\Phi} [\Gamma_{n-1}, r]$$

definiert, dessen Kern mit dem Raum der Spitzenformen $[\Gamma_n, r]_0$ übereinstimmt. Aufgrund der Folgerung 1.2_1 ist der Φ-Operator injektiv, falls $r \leqq \frac{n-1}{2}$.

1.2_2. Folgerung. *Für $2r < n$ gilt*

$\dim[\Gamma_n, r] \leqq \dim[\Gamma_{2r}, r]$.

Es gilt $[\Gamma_n, 1] = 0$ für $n \leqq 2$ (s. etwa [3]) und daher sogar

$$[\Gamma_n, 1] = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Herr Eichler hat mit freundlicherweise mitgeteilt, daß er

$$[\Gamma_n, 2] = 0 \quad \text{für } n \leqq 4$$

bewiesen hat. Hieraus folgt aber

$$[\Gamma_n, 2] = 0 \quad \text{für alle } n. \tag{11}$$

§ 2. Charakterisierung singulärer Formen durch Differentialoperatoren

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ und die äußeren Potenzen $\Lambda^p V$ $(0 \leqq p \leqq n)$. Ist $a \subset \{1, \ldots, n\}$ eine Teilmenge, so setzen wir

$$\begin{aligned} &e_a = e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_p}, \quad \text{falls} \\ &a = \{a_1, \ldots, a_p\},\ a_1 < \cdots < a_p. \end{aligned} \tag{12}$$

Durchläuft a alle Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die genau p Elemente enthalten $(|a| = p)$, so bilden die Vektoren e_a eine Basis von $\Lambda^p V$. Jeder linearen Abbildung

$$A\colon\ \Lambda^p V \to \Lambda^p V$$

entspricht eine Matrix A_b^a

$$A e_a = \sum A_x^a e_x. \tag{13}$$

Wir ordnen nun jedem Paar linearer Abbildungen

$$A\colon\ \Lambda^p V \to \Lambda^p V, \qquad B\colon\ \Lambda^q V \to \Lambda^q V$$

eine lineare Abbildung

$$A \sqcap B\colon \Lambda^{p+q} V \to \Lambda^{p+q} V$$

zu.

$$A \sqcap B(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{p+q}) = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \tag{14}$$

$$A(a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)}) \wedge B(a_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p+q)}).$$

Dabei durchläuft σ alle Permutationen von $\{1, \ldots, p+q\}$.

Die Matrixdarstellung von $A \sqcap B$ lautet

$$(A \sqcap B)^a_b = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \sum_{\substack{a = a' \cup a'' \\ b = b' \cup b''}} \varepsilon(a', a'') \cdot \varepsilon(b', b'')\, A^{a'}_{b'}\, B^{a''}_{b''} \tag{15}$$

$$|a'| = |b'| = p, \quad |a''| = |b''| = q.$$

Sei

$$a' = \{a'_1, \ldots, a'_p\}; \quad a'_1 < \cdots < a'_p,$$
$$a'' = \{a''_1, \ldots, a''_q\}; \quad a''_1 < \cdots < a''_q.$$

Dann ist $\varepsilon(a', a'')$ das Vorzeichen der Permutation, die man benötigt, um das $(p+q)$-Tupel $(a'_1, \ldots, a'_p, a''_1, \ldots, a''_q)$ in die natürliche Reihenfolge zu bringen.

Die Paarung $A \sqcap B$ ist *bilinear, kommutativ und assoziativ*. Man kann daher insbesondere die p-te Potenz einer linearen Abbildung $A\colon V \to V$ bilden.

$$A^{[p]} = A \sqcap \cdots \sqcap A\colon \Lambda^p V \to \Lambda^p V. \tag{16}$$

Diese wird manchmal auch mit $\Lambda^p A$ bezeichnet.

Die Matrixdarstellung von $A^{[p]}$ wird durch die Unterdeterminanten von A gegeben.

$$A^{[p]a}_{\ \ b} = |A|^a_b \qquad \text{für } a, b \in \{1, \ldots, n\}\ |a| = |b| = p. \tag{17}$$

Dabei wird mit $|A|^a_b$ die Determinante

$$|A|^a_b = \det(A_{\nu\mu})_{\substack{\nu \in a \\ \mu \in b}} \tag{18}$$

bezeichnet.

Der *Laplacesche Entwicklungssatz* für die Determinante einer Summe von Matrizen folgt aus der *binomischen Formel*

$$(A+B)^{[h]} = \sum_{p+q=h} \binom{n}{p} A^{[p]} \sqcap B^{[q]}. \tag{19}$$

Wir führen nun die Differentialoperatoren

$$\partial_{\nu\mu} = e_{\nu\mu}\, \partial/\partial z_{\nu\mu}, \qquad e_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu \\ \frac{1}{2} & \text{für } \nu \neq \mu \end{cases} \tag{20}$$

ein. Ihr Wirkungsbereich sind analytische Funktionen $f(Z)$, welche auf irgendeinem Gebiet von symmetrischen komplexen Matrizen Z definiert sind, also etwa auf der Siegelschen Halbebene.

Es gilt

$$\partial_{\nu\mu} e^{Sp(TZ)} = t_{\nu\mu} e^{Sp(TZ)}, \qquad T = T'. \tag{21}$$

Da die Operatoren $\partial_{\nu\mu}$ untereinander vertauschbar sind, kann man Unterdeterminanten $|\partial|_b^a$ der Matrix $\partial = (\partial_{\nu\mu})$ betrachten und diese in den äußeren Potenzen $\partial^{[p]}$ zusammenfassen.

Aus der Formel (21) folgt unmittelbar

$$\partial^{[p]} e^{Sp(TZ)} = T^{[p]} e^{Sp(TZ)}. \tag{22}$$

2.1. Hilfssatz. *Es gilt die Produktformel*

$$\partial^{[h]}(f \cdot g) = \sum_{p+q=h} \binom{n}{p} \partial^{[p]} f \sqcap \partial^{[q]} g.$$

Beweis. Es genügt, diese Formel für die Funktionen

$$f(Z) = e^{Sp(TZ)}, \qquad g(Z) = e^{Sp(SZ)}$$

zu beweisen. In diesem Spezialfall folgt sie aber einfach aus den Formeln (19) und (22). Mit Hilfe dieser Produktformel kann man Theorem 1.1 auf den Fall $r = \frac{n-1}{2}$ reduzieren. Zunächst bemerken wir

$$\operatorname{Rang} T < 2r+1 \Leftrightarrow T^{[2r+1]} = 0.$$

Man kann Theorem 2.1 daher auch folgendermaßen aussprechen: Sei f eine Modulform vom Gewicht r, dann ist

$$\partial^{[2r+1]} f = 0.$$

Wir nehmen an, dieser Satz sei für ein gewisses $r \leqq \frac{n-1}{2}$ bewiesen. Wir beweisen ihn dann auch für $r - \frac{1}{2}$.

Sei also f eine Modulform vom Gewicht $r - \frac{1}{2}$. Wir multiplizieren f mit einer *Thetafunktion*

$$\vartheta_{a,b}(Z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z[g + \frac{1}{2}a] + b'g}. \tag{23}$$

Dies ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ bezüglich einer geeigneten Gruppe, wenn $a, b \in \mathbb{Q}^n$ rationale Spalten sind.

Nach Voraussetzung gilt

$$\partial^{[2r+1]}(f \cdot \vartheta_{a,b}) = 0.$$

Wir wenden die Produktregel an und berücksichtigen, daß offensichtlich

$$\partial^{[q]} \vartheta_{a,b} = 0 \qquad \text{für } q \geqq 2$$

gilt. Es folgt

$$(2r+1)\, \partial^{[2r]} f \sqcap \partial \vartheta_{a,b} + (\partial^{[2r+1]} f) \cdot \vartheta_{a,b} = 0.$$

Wir betrachten diese Identität für festes Z bei variablem a und b. Eine einfache Rechnung mit Hilfe der Formel (15) ergibt

$$\partial^{[2r]} f = 0$$

Damit ist Theorem 2.1 *auf den Fall* $r = \frac{n-1}{2}$ *reduziert.*

§ 3. Eine Transformationsformel für die Differentialoperatoren

Sei $\mathfrak{O}$ ein Operator, welcher auf Funktionen wirkt, die in irgendeinem Gebiet von symmetrischen nicht ausgearteten Matrizen definiert und analytisch sind. Wir setzen noch voraus, daß man in diesen Gebieten einen analytischen Zweig des Logarithmus $\log|Z|$ finden kann. Auf die Wahl dieses Zweiges kommt es im folgenden nicht an.

Wir bezeichnen mit $\hat{\mathfrak{O}}$ den Operator, der aus $\mathfrak{O}$ durch Konjugation mit $Z \to Z^{-1}$ entsteht, also

$$\hat{\mathfrak{O}} f(Z) = \mathfrak{O} f(Z^{-1})/Z \to Z^{-1}. \tag{24}$$

3.1. Satz.[1] *Die Operatorenmatrix*

$$D(h) := Z^{[h]}\, \partial^{[h]}$$

genügt der Transformationsformel

$$\hat{D}(h) = (-1)^h\, |Z|^{\frac{h-1}{2}}\, D(h)'\, |Z|^{-\frac{h-1}{2}}.$$

Es ist ausreichend, wenn man eine solche Operatorenidentität auf Funktionen vom Typ

$$f(Z) = |Z|^{\frac{n}{2}}\, e^{Sp(TZ)}, \qquad T = T', \tag{25}$$

testet. Außerdem kann man die Variable Z durch eine reelle Variable $Y = Y' > 0$ ersetzen. Entsprechend kann man annehmen, daß T reell und positiv definit ist. Es gibt dann genau eine positive symmetrische Wurzel $T^{\frac{1}{2}}$ von T. Dem Beweis von Satz 3.1 schicken wir 3 Hilfssätze voraus.

3.2. Hilfssatz.

$$e^{Sp(Y^{-1}T)}\, |Y|^{-\frac{n}{2}} = \pi^{-\frac{1}{2}n^2} \int e^{-Sp(Y[P] + P' T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}} P)}\, dP.$$

Die Integration ist über alle n-reihigen reellen Matrizen zu erstrecken.

Beweis. In der Formel

$$\int e^{-Sp(P'P)}\, dP = \pi^{\frac{1}{2}n^2} \tag{26}$$

nehmen wir die Variablentransformation $P \to Y^{\frac{1}{2}} P$ vor und erhalten

$$|Y|^{\frac{n}{2}} \int e^{-Sp(Y[P])}\, dP = \pi^{\frac{1}{2}n^2}. \tag{27}$$

Ersetzt man nun $P \to P + Y^{-1} T^{\frac{1}{2}}$,

[1] Im Spezialfall $h = n$ wurde diese Formel von A. Selberg bewiesen.

so folgt unmittelbar Hilfssatz 3.2.

3.3. Hilfssatz [2]. *Es gilt*

$$\partial^{[h]}|Y|^{-\alpha}=(-1)^h\,\varepsilon_h(\alpha)\,|Y|^{-\alpha}\,Y^{-[h]}.$$

Dabei ist

$$\varepsilon_h(\alpha)=\alpha\cdot(\alpha-\tfrac{1}{2})\dots\left(\alpha-\frac{h-1}{2}\right).$$

3.4. Hilfssatz. *Seien* $a,b,c,d\subset\{1,\dots,n\}$ *Teilmengen mit*

$$|a|=|b|=h,\qquad |c|=|d|.$$

Dann gilt

$$\int |P|_b^a\,|P|_d^c\,e^{-Sp(P'P)}\,dP=\begin{cases}\pi^{\frac{1}{2}n^2}\,\varepsilon_h\left(\frac{h}{2}\right) & \text{für } a=c,\ b=d\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Beweis. Daß das Integral verschwindet wenn $a\neq c$ oder $b\neq d$ ist, zeigt man mit einer einfachen Integraltransformation. Man ersetzt eine geeignete Zeile oder Spalte durch ihr Negatives.

Wir können daher $a=c$ und $b=d$ annehmen. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir sogar $h=n$ voraussetzen.

Man wende nun auf beiden Seiten der Formel (s. (27))

$$\int e^{-Sp(Y[P])}\,dP=\pi^{\frac{1}{2}n^2}\,|Y|^{-\frac{n}{2}}$$

den Operator $|\partial|=\partial^{[n]}$ an und spezialisiere das Resultat auf den Fall $Y=E$.

Beweis von Satz 3.1. Wir berechnen

$$\hat{D}(h)\,f(Y)=\hat{D}(h)\,f(Y^{-1})|_{Y\to Y^{-1}}$$

für die Funktionen $f(Y)=|Y|^{\frac{n}{2}}\,e^{Sp(TY)}$. Aus Hilfssatz 3.2 folgt

$$D(h)\,f(Y^{-1})=(-1)^h\,\pi^{-\frac{1}{2}n^2}\,Y^{[h]}\int (PP')^{[h]}\,e^{-Sp(Y[P]+P'T^{\frac{1}{2}}+T^{\frac{1}{2}}P)}\,dP.$$

Macht man die Substitutionen, die beim Beweis von 3.2 verwendet wurden, rückgängig, so resultiert

$$\hat{D}(h)\,f(Y)=(-1)^h\,\pi^{-\frac{1}{2}n^2}f(Y)\,Y^{-[h]}\int(Y^{\frac{1}{2}}P-YT^{\frac{1}{2}})^{[h]}\cdot(Y^{\frac{1}{2}}P-YT^{\frac{1}{2}})'^{[h]}e^{-Sp(P'P)}\,dP.$$

Mit Hilfe der Formeln (15), (17) zeigt man

$$\begin{aligned}&|(Y^{\frac{1}{2}}P-YT^{\frac{1}{2}})(Y^{\frac{1}{2}}P-YT^{\frac{1}{2}})'|_b^a\\ &\quad=\sum_{0\leq p,\,p'\leq h}(-1)^{p+p'}\sum\varepsilon(a',a'')\,\varepsilon(b',b'')\,\varepsilon(x',x'')\,\varepsilon(y',y'')\end{aligned}$$

$$|Y^{\frac{1}{2}}P|_{x'}^{a'}\,|YT^{\frac{1}{2}}|_{x''}^{a''}\,|Y^{\frac{1}{2}}P|_{y'}^{b'}\,|YT^{\frac{1}{2}}|_{y''}^{b''}.$$

Dabei sind $a,b\subset\{1,\dots,n\}$ zwei Teilmengen von h Elementen ($|a|=|b|=h$). Zu summieren ist über Teilmengen $a',\dots,y''\subset\{1,\dots,n\}$ unter folgenden Bedingungen:

$$|a'|=|x'|=p, \quad a' \cup a''=a, \quad |a''|=|x''|=h-p,$$
$$|b'|=|y'|=p', \quad b' \cup b''=b, \quad |b''|=|y''|=h-p',$$
$$x' \cap x''=y' \cap y''=\emptyset, \quad x' \cup x''=y' \cup y''.$$

Aus Hilfssatz 3.4 folgt nach einer einfachen Rechnung

$$\int |Y^{\frac{1}{2}} P|_{x'}^{a'} \, |Y^{\frac{1}{2}} P|_{y'}^{b'} \, e^{-Sp(P'P)} \, dP = \pi^{\frac{1}{2}n^2} \varepsilon_p \left(\frac{p}{2}\right) \begin{cases} |Y|_{b'}^{a'} & \text{für } x'=y' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nachdem die Integration ausgeführt ist, zeigt man – wiederum mit Hilfe von (15) –

$$\hat{D}(h) f(Y) = (-1)^h f(Y) \, Y^{-[h]} \sum_{p=q=h} \varepsilon_p \left(\frac{p}{2}\right) \binom{n+p-h}{p} \binom{h}{p} Y^{[p]} \sqcap T[Y]^{[q]}.$$

Auf der anderen Seite folgt aus 2.1, 3.3 und (22)

$$(-1)^h |Y|^{\frac{h-1}{2}} D(h) |Y|^{-\frac{h-1}{2}} f(Y)$$
$$= (-1)^h f(Y) \, Y^{[h]} \sum_{p=q=h} \binom{h}{p} (-1)^p \varepsilon_p \binom{h-n-1}{2} Y^{-[p]} \sqcap T^{[q]}.$$

Um das allgemeine Transformationsgesetz zu beweisen, muß man nur noch die beiden Formeln

$$\varepsilon_p \left(\frac{p}{2}\right) \binom{n+p+h}{p} = (-1)^p \varepsilon_p \left(\frac{h-n-1}{2}\right)$$

und

$$Y^{-[h]} (Y^{[p]} \sqcap T[Y]^{[q]}) = [Y^{[h]} (Y^{-[p]} \sqcap T^{[q]})]'$$

verifizieren.

§ 4. Holomorphe Differentialformen

Um das Transformationsverhalten der Differentiale $dz_{\nu\mu}$ beschreiben zu können, fassen wir sie in einer (symmetrischen) Matrix $dZ = (dz_{\nu\mu})$ zusammen. Bekanntlich transformiert sich dZ unter einer symplektischen Transformation M folgendermaßen

$$dZ|M = (CZ+D)'^{-1} f(Z) (CZ+D)^{-1}. \tag{28}$$

Wir denken uns die Indizes (ν, μ); $1 \leqq \nu \leqq \mu \leqq n$ irgendwie – etwa lexikographisch – angeordnet und bezeichnen das alternierende Produkt aller Differentiale $dz_{\nu\mu}$ $(\nu \leqq \mu)$ in dieser Reihenfolge mit

$$\omega_0 = \bigwedge_{\nu \leqq \mu} dz_{\nu\mu}. \tag{29}$$

Diese Differentialform transformiert sich folgendermaßen

$$\omega_0 | M = |CZ+D|^{-(n+1)} \omega_0. \tag{30}$$

Ist $f \in [\Gamma, n+1]$ eine Modulform vom Gewicht $n+1$, so ist infolgedessen die Differentialform $f\omega_0$ *invariant unter* Γ.

Wir bezeichnen mit $\Lambda^p \Omega\,(S_n)^\Gamma$ den Vektorraum der holomorphen alternierenden Differentialformen vom Grad p, welche unter Γ invariant sind. Die Zuordnung $f \to f\omega_0$ stiftet also einen Isomorphismus

$$[\Gamma, n+1] \xrightarrow{\sim} \Lambda^N \Omega(S_n)^\Gamma, \qquad N = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Wir wollen die singulären Formen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ mit invarianten Differentialformen in Zusammenhang bringen. Dazu benutzen wir den Differentialoperator

$$|\partial| = |(\partial_{\nu\mu})|; \qquad \partial_{\nu\mu} = e_{\nu\mu}\,\partial/\partial z_{\nu\mu}.$$

Das Transformationsverhalten dieses Operators unter der Substitution $Z \to Z^{-1}$ haben wir in § 3 untersucht. Hieraus gewinnt man leicht die Transformationsformel für $Z \to -Z^{-1}$. Bezeichnet man allgemein mit $\tilde{0}$ den Operator, der aus 0 durch Konjugation mit $Z \to -Z^{-1}$ entsteht, so gilt

$$|\tilde{\partial}| = |Z|^{\frac{n+3}{2}}\,|\partial|\,|Z|^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{31}$$

Mit der Bezeichnung (5) kann man diese Formel auch folgendermaßen schreiben

$$(|\partial| f) \underset{\frac{n+3}{2}}{|} M = |\partial| (f \underset{\frac{n-1}{2}}{|} M). \tag{32}$$

Dabei ist $M = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Diese symplektische Matrix und die Translationsmatrizen $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $S = S'$, erzeugen bekanntlich die volle symplektische Gruppe. Daher gilt (32) für beliebige symplektische Substitutionen M. Der Operator $|\partial|$ vermittelt insbesondere eine lineare Abbildung

$$|\partial|\colon \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v\right] \to \left[\Gamma, \frac{n+3}{2}, v\right]$$

für ein beliebiges Multiplikatorsystem v.

Seien nun zwei Modulformen

$$f \in \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v\right], \qquad g \in \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v^{-1}\right]$$

gegeben. Dann ist $g\,|\partial|\,f$ eine Form vom Gewicht $n+1$, die Differentialform $g\,|\partial|\,f\omega_0$ ist also Γ-invariant.

Wie in §2 ausgeführt wurde, ist Satz 1.1 damit äquivalent, daß $|\partial| f = 0$ für alle Modulformen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ gilt.

Zunächst werden wir zeigen, daß die Differentialform

$$(f\,|\partial|\,g + (-1)^{n+1} g\,|\partial|\,f)\,\omega_0$$

die totale Ableitung einer holomorphen invarianten $(N-1)$-Form $\{f, g\}$ ist, deren Konstruktion wir uns nun zuwenden wollen. Zur Beschreibung dieser Form benutzen wir die in § 3 entwickelte Multiplikation von linearen Abbildungen

$$A\colon \Lambda^p V \to \Lambda^p V; \qquad B\colon \Lambda^q V \to \Lambda^q V.$$

Im Spezialfall $p+q=n$ ist $A \sqcap B\colon \Lambda^n V \to \Lambda^n V$ eine lineare Abbildung eines eindimensionalen Vektorraumes in sich und damit die Multiplikation mit einem Skalar. Identifiziert man $A \sqcap B$ mit diesem Skalar, so gilt

$$A \sqcap B = \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, A^{a'}_{b'} B^{a''}_{b''}. \tag{32}$$

Dabei ist über alle Zerlegungen

$$a' \cup a'' = b' \cup b'' = \{1, \dots, n\}, \qquad |a'| = |b'| = p, \qquad |a''| = |b''| = q$$

zu summieren.

Diese $\sqcap$-Multiplikation ist auch sinnvoll, wenn die Komponenten $A^{a'}_{b'}$ Funktionen und $B^{a''}_{b''}$ Differentialformen vom Grade d sind. Dann ist $A \sqcap B$ eine Differentialform vom Grad d.

Im folgenden verwenden wir noch die Bezeichnung

$$\omega_{ik} = \pm \bigwedge_{\substack{1 \leqq \nu \leqq \mu \leqq n \\ \{\nu, \mu\} \neq \{i, k\}}} dz_{\nu\mu}. \tag{33}$$

Das Vorzeichen wird durch die Forderung

$$\omega_{ik} \wedge dz_{ik} = \omega_0 \tag{34}$$

festgelegt. Wir fassen diese $(N-1)$-Formen zu einer Matrix $\omega = (\omega_{ik})$ zusammen.

Seien nun f, g zwei holomorphe Funktionen auf S_n. Wir definieren eine holomorphe alternierende Differentialform vom Grade $N-1$ durch die Formel

$$\{f, g\} = \sum_{p+q=n-1} (-1)^p\, \partial^{[p]} f \sqcap \partial^{[q]} g \sqcap \omega. \tag{35}$$

Man kann die totale Ableitung $d\{f, g\}$ dieser Form berechnen.

4.1 Hilfssatz. *Es gilt*

$$d\{f, g\} = -n[f\,|\partial|\,g + (-1)^{n+1}\, g\,|\partial|\,f]\,\omega_0.$$

Beweis. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\{f, g\} = \sum (-1)^{i+k} A_{ik}\, \omega_{ik}$$

mit

$$A_{ik} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{\binom{n-1}{p-1}} \sum \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, \partial^{a'}_{b'} f \cdot \partial^{a''}_{b''} g.$$

Zu summieren ist über alle disjunkten Zerlegungen

$$a' \cup a'' \cup \{i\} = b' \cup b'' \cup \{k\} = \{1, \dots, n\}; \qquad |a'| = |b'| = p-1.$$

Für die totale Ableitung der Form $\{f, g\}$ erhält man

$$d\{f, g\} = A \cdot \omega_0$$

mit

$$\begin{aligned} A &= -\sum(-1)^{i+k}\, dA_{ik} \\ &= \sum_{i,k}(-1)^{i+k} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}} \sum \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, \partial_{b'}^{a'} f \cdot \partial_{ik} \cdot \partial_{b''}^{a''} g \\ &+ \sum_{i,k}(-1)^{i+k} \sum_{0=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}} \sum \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, \partial_{ik}\, \partial_{b'}^{a'} f\, \partial_{b''}^{a''} g \end{aligned}$$

In der ersten der beiden Summen kann man die Summation über a'', b'', i, k, bei festen a', b', p ausführen.

Man hat

$$(-1)^{i+k}\, \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'') = \varepsilon(a', \{i\})\, \varepsilon(b', \{k\})\, \varepsilon(a', \bar{a'})\, \varepsilon(b', \bar{b'})$$

zu benutzen. Dabei wird allgemein mit $\bar{a}$ das Komplement a in $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes erhält man für die erste der beiden Summen

$$A_1 = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}} (n-p+1) \sum_{|a'|=|b'|=p-1} \varepsilon(a', \bar{a'})\, \varepsilon(b', \bar{b'})\, \partial_{b'}^{a'} f \cdot \partial_{\bar{b'}}^{\bar{a'}} g.$$

Für die zweite Summe erhält man entsprechend

$$A_2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}}\, p \sum_{|a''|=|b''|=n-p} \varepsilon(a'', \bar{a''})\, \varepsilon(b'', \bar{b''})\, \partial_{\bar{b''}}^{\bar{a''}} f \cdot \partial_{b''}^{a''} g.$$

Addiert man diese beiden Ausdrücke, so heben sich die einzelnen Terme von A_1 und A_2 gegenseitig auf, mit Ausnahme der Teilsummen, die zu $p=1$ in A_1 und $p=n$ in A_2 gehören.

$$A = A_1 + A_2 = -n(f\,|\partial|\,g + (-1)^{n+1}\, g\,|\partial|\,f).$$

4.2 Satz. *Die Zuordnung* $(f, g) \to \{f, g\}$ *vermittelt eine bilineare Paarung*

$$\left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v\right] \times \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}, v^{-1}\right] \to \Lambda^{N-1}\Omega(S_n)^{\Gamma}.$$

Es gilt

$$\{f, g\} = (-1)^{n+1}\{g, f\}.$$

Beweis. Wir beweisen allgemeiner für beliebige holomorphe Funktionen f, g die Transformationsformel

$$\{f, g\}\,|\,M = \{f \underset{\frac{n-1}{2}}{|} M, g \underset{\frac{n-1}{2}}{|} M\} \tag{36}$$

für symplektische Substitutionen M. Es genügt, den Spezialfall $M=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ zu behandeln.

Für die Matrix ω erhält man aus (28) und (30) die Transformationsformel

$$\omega|M=|CZ+D|^{-(n+1)}(CZ+D)\,\omega(CZ+D)'. \tag{37}$$

Die Operatormatrix $\partial^{[h]}$ geht bei der Transformation $Z\to -Z^{-1}$ in

$$\tilde{\partial}^{[h]}=|Z|^{\frac{h-1}{2}}Z^{[h]}(Z^{[h]}\cdot\partial^{[h]})'\,|Z|^{-\frac{h-1}{2}}$$

über, wie man unmittelbar aus Satz 3.1 folgert.

Wir beweisen nun (36) für $f|M\left(M=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\right)$ anstelle von f.

Bei den folgenden Umformungen sind die Hilfssätze 2.1 und 3.3 zu benutzen.

$$\begin{aligned}\{f|M,g|M\}|M&=\sum_{p+q=n-1}(-1)^p\,\tilde{\partial}^{[p]}|Z|^{\frac{n-1}{2}}f(Z)\sqcap\tilde{\partial}^{[q]}|Z|^{\frac{n-1}{2}}g(Z)\sqcap\omega|M\\ &=|Z|^{-2}\sum_{\substack{p+q=n-1\\ i+j=p,\,k+l=q}}(-1)^{j+k}\,\varepsilon_i\left(\frac{p-n}{2}\right)\varepsilon_k\left(\frac{q-n}{2}\right),\end{aligned}$$

$$Z^{[p]}[Z^{[p]}(Z^{-[i]}\sqcap\partial^{[j]}f]'\sqcap Z^{[q]}[Z^{[q]}(Z^{-[k]}\sqcap\partial^{l}g)]'\sqcap Z\omega Z.$$

Diesen Ausdruck kann man vereinfachen, wenn man die Formeln

$$A^{[h]}(B\sqcap C)=A^{[p]}B\sqcap A^{[q]}C;\qquad (B\sqcap C)A^{[h]}=BA^{[p]}\sqcap CA^{[q]} \tag{38}$$

benutzt, welche für lineare Abbildungen

$$A\colon V\to V;\qquad B\colon \Lambda^p V\to\Lambda^p V;\qquad C\colon \Lambda^q V\to\Lambda^q V\qquad (h=p+q)$$

gelten.

Es folgt

$$\begin{aligned}\{f|M,g|M\}|M=\sum_{i+j+k+l=n-1}&(-1)^{j+k}\,\varepsilon_i\left(\frac{p-n}{2}\right)\varepsilon_k\left(\frac{q-n}{2}\right)\\ &\cdot Z^{-[i]}\sqcap\partial^{[j]}f\sqcap Z^{-[k]}\sqcap\partial^{[l]}\sqcap\omega.\end{aligned}$$

Wir summieren bei festem j und l über i und k. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\sum_{i+k=n-1-j-l}(-1)^{j+k}\,\varepsilon_i\left(\frac{p-n}{2}\right)\varepsilon_k\left(\frac{q-n}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{für } j+l<n-1\\ (-1)^j & \text{für } j+l=n-1.\end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\{f|M,g|M\}|M=\sum_{j+l=n-1}(-1)^j\,\partial^{[j]}f\sqcap\partial^{[l]}g\sqcap\omega,$$

was zu beweisen war.

Wir nutzen nun aus, daß nicht identisch verschwindende singuläre Formen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ existieren, etwa

$$f(Z)=\sum_{G=G^{(n,n-1)}\,\text{ganz}}e^{\pi i Z[G]}=\vartheta_{00}(Z)^{n-1}.$$

Aus Hilfssatz 4.1 ergibt sich dann

$$d\{f, g\} = -n f\,|\partial|\,g.$$

Es soll gezeigt werden, daß $|\partial|\,g$ für beliebige Formen g vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ verschwindet. Dies folgt nun aus

4.3 Hilfssatz. *Jede Γ-invariante holomorphe Differentialform φ vom Grad $N-1$ ($N=\frac{1}{2}n(n+1)$) ist geschlossen ($d\varphi=0$).*

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Stokes soll gezeigt werden, daß das Integral der Differentialform

$$d\varphi \wedge \overline{d\varphi} = d(\varphi \wedge \overline{d\varphi})$$

über den Quotientenraum S_n/Γ verschwindet. Da dieser nicht kompakt ist, bedarf dies einer Begründung.

Sei F_n der bekannte Siegelsche Fundamentalbereich von Γ_n [3]. Sein Rand ist in der Vereinigung endlich vieler (reell) algebraischer Flächen enthalten. Wenn zwei Punkte Z_1, Z_2 aus S_n äquivalent modulo Γ_n sind, so gilt $|Y_1|=|Y_2|$. Die Funktion $\det Y$ auf F_n induziert also eine stetige Abbildung $S_n/\Gamma_n \to \mathbb{R}$.

Wenn Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_n ist, so erhält man durch „Zurückziehen" eine stetige Funktion

$$h\colon\ S_n/\Gamma \to \mathbb{R}.$$

Der Bereich

$$U_C = \{x \in S_n/\Gamma,\ h(x) < C\}$$

ist, wie man weiß, relativ kompakt.

Die Menge S der nicht glatten Randpunkte von U_C ist in $p^{-1} \circ q(\partial F_n)$ enthalten, dabei werden mit

$$p\colon\ S_n/\Gamma \to S_n/\Gamma_n; \qquad q\colon\ F_n \to S_n/\Gamma_n$$

die natürlichen Projektionen bezeichnet.

Wir benutzen nun den Satz von Stokes in folgender Form:

Sei X eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ ein offener relativ kompakter Teilraum.

Die Menge S der nicht glatten Randpunkte habe das $(n-1)$-dimensionale Maß 0 ($n=\dim X$). Sei φ eine (unendlich oft differenzierbare) $(n-1)$-Form auf X. Dann gilt:

$$\int_U d\varphi = \int_{\partial U \setminus S} \varphi,$$

sofern das Integral auf der rechten Seite absolut konvergiert.

Der Rand von U_C ist sicherlich in der Menge $\{x \in S_n/\Gamma, h(x)=C\}$ enthalten. Hilfssatz 4.3 folgt nun leicht aus folgender

Behauptung. Sei φ eine Γ-invariante holomorphe Differentialform auf S_n und

$$M(C) = \{Z \in F_n,\ \det Y = C\}.$$

Sei

$$\Phi=(\varphi\wedge\overline{d\varphi})\,|\,M(C).$$

Es gilt

$$\int_{M(C)}|\Phi|\to 0 \quad \text{für } C\to\infty.$$

Man benutzt für φ die Darstellung

$$\varphi(Z)=Sp(A\cdot\omega).$$

Die Matrix A besteht aus periodischen Funktionen und kann daher in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$A(Z)=\sum a(T)\,e^{2\pi i Sp(TZ)}.$$

Für die Koeffizientenmatrix zeigt man

$$U\cdot a(U'TU)\,U'=a(T) \quad \text{für } \begin{pmatrix} U' & 0\\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix}\in\Gamma.$$

Hieraus leitet man die folgenden beiden Eigenschaften ab:

a) $a(T)=0\Rightarrow T\geqq 0$ „Koecherprinzip".

b) Die totale Ableitung $d\varphi=Sp(\partial A)\cdot\omega_0$ ist eine Spitzenform, d.h.

$$Sp(\partial A)=\sum_{T>0} b(T)\,e^{2\pi i Sp(TZ)}.$$

Wir übergehen den (einfachen) Beweis (vgl. [1]) dieser beiden Aussagen, da sie in unseren Anwendungen evident sind. Wir erhalten nun

$$\varphi\wedge\overline{d\varphi}=\sum C_{ik}(Z)\,\overline{dz}_{11}\wedge\cdots\wedge\overline{dz}_{nn}\wedge dz_{11}\wedge\cdots\wedge\widehat{dz_{ij}}\wedge\cdots\wedge dz_{nn}$$

(der obere Index $\hat{}$ bedeutet „weglassen")

$$|C_{ik}(Z)|\leqq e^{-\delta\det Y} \quad \text{für } Z\in F_n.$$

mit einer gewissen Konstanten $\delta>0$.

Es ist zu benutzen, daß im Fundamentalbereich F_n folgende Ungleichungen gelten:

a) $|x_{\nu\mu}|\leqq 1$,

b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}\leqq y_{11}\leqq\cdots\leqq y_{nn}$,

c) $2|y_{ij}|\leqq y_{jj}$,

d) $\det Y\leqq y_{11}\cdots y_{nn}\leqq C_n\det Y$.

Man beweist nun eine Abschätzung

$$\int_{M(C)}|\Phi|\leqq \text{const.}\, C^{n^2}\cdot e^{-\delta C}.$$

Zusatz bei der Korrektur. 1) Hilfssatz 3.3 wurde erstmals von L. Gårding bewiesen. (Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants. Proc. Edinb. Math. Soc. **8**, 73–75 (1948)).

2) Herr Maaß hat mir in einem Brief einen anderen Beweis von Satz 3.1 mitgeteilt, welcher auf der verallgemeinerten Capelli-Identität beruht. Der Spezialfall $h=n$ findet sich auch in seinem Buch [3] und geht auf A. Selberg zurück.

Literatur

1. Freitag, E.: Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades. Erscheint in den Math. Ann.
2. Maaß, H.: Modulformen zu indefiniten quadratischen Formen. Math. Scandinav. **17**, 41–55 (1965)
3. Maaß, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
4. Resnikoff, H.L.: Automorphic forms of singular weight are singular forms. (Preprint)
5. Resnikoff, H.L.: On a class of linear differential equations for automorphic forms in several complex variables. Amer. J. Math. **95**, 321–332 (1973)

Eberhard Freitag
Mathematisches Institut der Universität
D-6500 Mainz
Saarstr. 21
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 3. Februar 1975