

# Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades

Eberhard Freitag

## Einleitung

Sei  $K \supset \mathbb{C}$  ein algebraischer Funktionenkörper und

$$d: K \rightarrow M = M_{K/\mathbb{C}}$$

sein Differentialmodul. Eine alternierende Form  $\omega \in \wedge M$  heißt *regulär*, wenn sie für jeden diskreten Bewertungsring  $R$

$$\mathbb{C} \subset R \subset K$$

mit Quotientenkörper  $K$  und Restklassenkörper  $\mathbb{C}$  eine Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{f, \dots, g, \dots \in R} f_{j_1} \dots g_{j_v} dg_{j_1} \wedge \dots \wedge dg_{j_v}$$

besitzt.

Der Vektorraum der regulären  $v$ -Formen ist endlich-dimensional, seine Dimension wird mit

$$g_v = g_v(K)$$

bezeichnet.

In der vorliegenden Note werden diese Invarianten für den Körper der Modulfunktionen  $K(\Gamma)$  bezüglich irgendeiner Untergruppe  $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$  von endlichem Index in der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades untersucht. Die volle Modulgruppe ist hierbei natürlich uninteressant, denn ihr Funktionenkörper ist nach einem Satz von Igusa rein transzendent. Hieraus folgt aber

$$g_j = 0 \quad \text{für } j > 0.$$

Wir werden u.a. zeigen, daß die Invariante  $g_2$  i.a. nicht verschwindet. Beispielsweise gilt

$$g_2(K(\Gamma[8])) \geq 9.$$

(Mit  $\Gamma[l]$  wird die Hauptkongruenzgruppe der Stufe  $l$  bezeichnet.)

Damit im Zusammenhang steht folgendes gruppentheoretische Resultat.

$$\dim H^2(\Gamma[2l], \mathbb{C}) \rightarrow \infty \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Bei unseren Konstruktionen verwenden wir die Theorie der Thetanullwerte.

$$\mathcal{Z}(Z; a, b) = \sum e^{\pi i(Z[g + \frac{1}{2}a] + b'g)}.$$

Das sind Modulformen vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  zu Untergruppen der Siegelschen Modulgruppe.

Diese Thetanullwerte genügen alle der Differentialgleichung

$$\left( \frac{4\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} - \frac{\partial^2}{(\partial z_1)^2} \right) \vartheta \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Eine weitere Anwendung besagt, daß jede Modulform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  zu irgendeiner Untergruppe  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  von endlichem Index und zu beliebigem Multiplikatorsystem der obigen Differentialgleichung genügen muß.

### § 1. Alternierende Differentialformen auf der Siegelschen Halbebene zweiten Grades

Die *Siegelsche Halbebene* zweiten Grades  $S_2$  besteht aus allen zweireihigen Matrizen

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \text{ mit positiv definitem Imaginärteil } Y,$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}; \quad y_0 > 0, \quad y_0 y_2 - y_1^2 > 0.$$

Jede symplektische reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2, \mathbb{R})$$

induziert einen analytischen Automorphismus von  $S_2$

$$Z \rightarrow MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Sei

$$\omega = f_0 dz_0 + f_1 dz_1 + f_2 dz_2$$

ein Differential auf einem Teilgebiet  $D \subset S_2$ .

Wie transformiert sich  $\omega$  unter der symplektischen Transformation  $M$ ?

Es ist zweckmäßig,  $\omega$  in der Form

$$\omega = \text{Sp}(f \cdot dZ)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_0 & \frac{1}{2}f_1 \\ \frac{1}{2}f_1 & f_2 \end{pmatrix} \quad dZ = \begin{pmatrix} dz_0 & dz_1 \\ dz_1 & dz_2 \end{pmatrix}$$

zu schreiben. Bekanntlich gilt [6]

$$dZ/M = (CZ + D)^{-1} dZ (CZ + D)^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$\omega/M = \text{Sp}[(CZ + D)^{-1} f(MZ) (CZ + D)^{-1} dZ].$$

Das Differential  $\omega$  ist also genau invariant unter  $M$  – wir setzen jetzt voraus, daß  $M$  das Gebiet  $D$  in sich überführt –, wenn

$$f(MZ) = (CZ + D)f(Z)(CZ + D)^{-1} \quad (1)$$

gilt.

Als nächstes untersuchen wir das Transformationsverhalten von alternierenden 2-Formen.

$$\omega = h_0 dz_1 \wedge dz_2 + h_1 dz_0 \wedge dz_2 + h_2 dz_0 \wedge dz_1$$

also

$$\omega \wedge dZ = \bar{h} \cdot \omega_0$$

mit

$$h = \begin{pmatrix} h_0 & -h_1 \\ -h_1 & h_2 \end{pmatrix} \quad \omega_0 = dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2 .$$

Die komplexe Funktionaldeterminante der symplektischen Transformation  $M$  ist  $|CZ + D|^{-3}$ . Es folgt

$$\omega|_M \wedge (CZ + D)^{-1} dZ (CZ + D)^{-1} = |CZ + D|^{-3} h(MZ) \omega_0 .$$

Die Invarianz von  $\omega$  unter  $M$  bedeutet also

$$h(MZ) = |CZ + D|^3 (CZ + D)^{-1} h(Z) (CZ + D)^{-1} . \tag{2}$$

Es ist zweckmäßig diese Formel auf die Adjunkte

$$h^* = \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \quad (hh^* = \det h E, E \text{ Einheitsmatrix})$$

umzuschreiben. Man erhält

$$h^*(MZ) = |CZ + D| (CZ + D) h^*(Z) (CZ + D)' . \tag{3}$$

Es sei nun  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  eine Untergruppe von endlichem Index in der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades. Wir setzen voraus, daß  $\Gamma$  keine Elemente endlicher Ordnung außer  $\pm E$  enthält. Dann ist der Quotientenraum  $S_2/\Gamma$  eine dreidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die kanonische Projektion

$$p: S_2 \rightarrow S_2/\Gamma$$

ist unverzweigt.

Wir bezeichnen mit  $\Omega$  die Garbe der holomorphen Differentiale auf  $S_2/\Gamma$ . Der Automorphiefaktor  $|CZ + D|$  definiert ein Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $S_2/\Gamma$

$$\mathcal{L}(V) = \{ f: p^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}, f(MZ) = |CZ + D| f(Z), M \in \Gamma \} . \tag{4}$$

Offenbar ist

$$\mathcal{L}^3 = K = \Lambda^3 \Omega \quad (\text{kanonisches Bündel}) . \tag{5}$$

Die Gln. (1) u. (3) zeigen

**Hilfssatz 1.** *Es gibt einen Isomorphismus*

$$\Lambda^2 \Omega \rightarrow \Omega \otimes \mathcal{L} . \tag{6}$$

## § 2. Modulformen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ und Konstruktion von 2-Formen

Der Hauptwert des Logarithmus  $\log|CZ+D|$  ist in einer kleinen Umgebung von  $Z=iE$  analytisch und kann zu einer analytischen Funktion auf ganz  $S_2$  fortgesetzt werden. Damit ist auch  $|CZ+D|^r$  für beliebige  $r \in \mathbb{R}$  definiert und analytisch. Unter einem Multiplikatorsystem vom Gewicht  $r$  bezüglich einer Gruppe  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{R})$  versteht man eine Abbildung

$$v: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

so daß

$$I(Z, M) = v(M)|CZ+D|^r$$

ein Automorphiefaktor ist, d.h.

$$I(Z, M \cdot N) = I(NZ, M) \cdot I(Z, N). \quad (7)$$

Eine automorphe Form vom Gewicht  $r$  zum Multiplikatorsystem  $v$  ist eine analytische Funktion  $f: S_2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Transformationseigenschaft

$$f(MZ) = v(M)|CZ+D|^r \cdot f(Z). \quad (8)$$

Der Vektorraum dieser Formen wird mit  $[\Gamma, r, v]$  bezeichnet. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  außer  $\pm E$  keine Elemente endlicher Ordnung enthält. Außerdem sei  $v$  ein Multiplikatorsystem vom Gewicht  $\frac{1}{2}$ , das nur die Werte  $\pm 1$  annimmt ( $v^2 = 1$ ).

Seien  $f, g \in [\Gamma, \frac{1}{2}, v]$  zwei linear unabhängige Formen vom Gewicht  $\frac{1}{2}$ . Der Ausdruck

$$f^2 \cdot d\left(\frac{g}{f}\right) = -g \cdot df + f \cdot dg$$

ist dann ein holomorpher Schnitt des Bündels  $\Omega \otimes \mathcal{L}$ .

Mit Hilfe von Hilfssatz 1 erhält man nun eine holomorphe nicht identisch verschwindende 2-Form auf  $S_2/\Gamma$ . Diese Differentialform kann man explizit angeben.

*Bezeichnung*

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\left(g \frac{\partial f}{\partial z_2} - f \frac{\partial g}{\partial z_2}\right) dz_1 \wedge dz_2 \\ &\quad -\frac{1}{2} \left(g \frac{\partial f}{\partial z_1} - f \frac{\partial g}{\partial z_1}\right) dz_0 \wedge dz_2 \\ &\quad -\left(g \frac{\partial f}{\partial z_0} - f \frac{\partial g}{\partial z_0}\right) dz_0 \wedge dz_1. \end{aligned} \quad (9)$$

**Satz 1.** Durch die Zuordnung

$$(f, g) \rightarrow \{f, g\}$$

wird eine bilineare Abbildung

$$[\Gamma, \frac{1}{2}, v] \times [\Gamma, \frac{1}{2}, v] \rightarrow \Lambda^2 \Omega(S_2/\Gamma)$$

definiert.

Wenn  $\{f, g\}$  verschwindet, sind die beiden Formen linear abhängig.

**Folgerung.**

$$\dim \Lambda^2 \Omega(S_2/\Gamma) \geq \dim[\Gamma, \frac{1}{2}, v] - 1. \tag{10}$$

Beispiele von Modulformen vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  kennt man aus der Theorie der *Thetafunktionen*

$$\mathfrak{g}(Z; a, b) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i [Z(g + \frac{1}{2}a) + b'g]} \tag{11}$$

$(Z[x] := x'Zx)$ .

Durchlaufen  $a$  und  $b$  die geraden Thetacharakteristiken

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad a_v, b_v \in \{0, 1\}, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 \equiv 0 \pmod{2},$$

so erhält man zehn linear unabhängige Modulformen vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  bezüglich der von Igusa eingeführten Gruppe [4]

$$\Gamma(4, 8) = \{M \in \text{Sp}(2, \mathbb{Z}), M \equiv E \pmod{4}, (A'B)_0 \equiv (C'D)_0 \equiv 0 \pmod{8}\}. \tag{12}$$

Dabei wird allgemein mit  $A_0$  der Vektor bezeichnet, der aus den Diagonalelementen von  $A$  gebildet wird.

Auf dem Quotienten  $S_2/\Gamma(4, 8)$  existieren also mindestens neun linear unabhängige holomorphe 2-Formen.

### § 3. Das Verhalten der 2-Formen in den Spitzen

Sei  $h = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$  eine zweireihige symmetrische Matrix von holomorphen Funktionen auf  $S_2$  mit dem Transformationsverhalten

$$h(Z+S) = h(Z) \quad \text{für} \quad S \equiv 0 \pmod{1}$$

$$h(UZU') = U \cdot h(Z) \cdot U' \quad \text{für} \quad U \in \text{Sl}(2, \mathbb{Z})$$

$$U \equiv E \pmod{l}.$$

Dabei ist  $l$  eine natürliche Zahl. Dieses Transformationsverhalten ist beispielsweise erfüllt, wenn die 2-Form

$$h_0 dz_1 \wedge dz_2 - h_1 dz_0 \wedge dz_2 + h_2 dz_0 \wedge dz_1$$

invariant unter der Kongruenzgruppe der Stufe  $l$

$$\Gamma[l] = \{M \in \text{Sp}(2, \mathbb{Z}); M \equiv E \pmod{l}\} \tag{14}$$

ist.

Wir entwickeln  $h$  in eine Fourierreihe

$$h(Z) = \sum a(T) e^{2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

$$T = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} t_0 & \frac{1}{2}t_1 \\ \frac{1}{2}t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}.$$

Die Koeffizienten  $a(T)$  genügen der Bedingung

$$a(U^{-1}TU^{-1}) = Ua(T)U' \quad (15)$$

Wir setzen

$$A(T) = \max_{0 \leq \nu \leq 2} |a_\nu(T)|; \quad a = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Konvergenz der Reihe folgt die Ungleichung  $A(T) \leq e^{\operatorname{Sp}(T)}$  für fast alle  $T$ .

**Hilfssatz 2.** Es gilt  $a(T) = 0$ , wenn  $T$  einen negativen Eigenwert hat.

(Dies ist eine Variante des Koecherprinzips.)

*Beweis.* Wir können annehmen, daß  $t_0 < 0$  gilt.

Andernfalls ersetzt man  $T$  durch  $UTU'$  mit einem geeigneten  $U$ . Wir setzen

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Es existiert eine positive Zahl  $\delta > 0$ , so daß die Ungleichung

$$\operatorname{Sp}(U^r T U^r) \leq -\delta r^2$$

für hinreichend große  $r$  richtig ist. Es folgt

$$A(T) \leq 4r^2 A(U^r T U^r) \leq 4r^2 e^{-\delta r^2}, \quad r \gg 0.$$

Man führe nun den Grenzübergang  $r \rightarrow \infty$  durch.

**Hilfssatz 3.** Es gilt:

$$a_0 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

*Beweis.* Man verwende (15) für  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ .

#### § 4. Holomorphe 2-Formen des Körpers der Modulfunktionen

Die Mannigfaltigkeit  $S_2/\Gamma$  ist nicht kompakt. Aufgrund der Kompaktifizierungstheorie von Satake und Baily weiß man, daß  $S_2/\Gamma$  eine quasiprojektive algebraische Mannigfaltigkeit ist. Dank der allgemeinen Desingularisierungstheorien kann man  $S_2/\Gamma$  als Zariski-offenen Teilraum in eine kompakte singularitätenfreie projektive Mannigfaltigkeit  $X$  einbetten. Igusa hat für die Kongruenzgruppen  $\Gamma[l]$ ,  $l \geq 3$ , ein solches Modell explizit konstruiert [5].

**Satz 2.** Jede holomorphe 2-Form auf  $S_2/\Gamma$  läßt sich auf ganz  $X$  holomorph fortsetzen.

*Beweis.* Die Gruppe  $\Gamma$  enthält nach einem bekannten Satz von Mennicke eine Kongruenzgruppe  $\Gamma[l]$  ( $l \geq 3$ ).

Es genügt den Fall  $\Gamma = \Gamma[l]$  zu behandeln.

Das singularitätenfreie Modell  $X$  erhält man durch die monodiale Transformation der Satakekompaktifizierung  $S_2/\Gamma$  längs des Randes. Einzelheiten findet man in Igasas Arbeit [5]. Die Gruppe  $\Gamma[1]/\Gamma[l]$  operiert auf der Satakekompaktifizierung und permutiert die einzelnen Zusammenhangskomponenten des Randes transitiv. Es genügt daher, die monodiale Transformation der typischen Randkomponente ( $\text{Im}z_2 \rightarrow \infty$ ) zu studieren. Den „unendlich fernsten“ Punkt ( $\text{Im}z_0 \rightarrow \infty, \text{Im}z_2 \rightarrow \infty$ ) kann man vernachlässigen, denn die Kodimension der Faser, die über ihm liegt, ist größer als Eins!

Wir beschreiben ein Koordinatensystem eines Punktes  $\omega \in X$ , dessen Spurpunkt im endlichen Teil der typischen Randkomponente ( $\text{Im}z_2 \rightarrow \infty$ ) liegt. Man kann  $\omega$  als Grenzwert einer Folge von Punkten aus  $S_2/\Gamma$  erhalten. Wählt man geeignete Repräsentanten  $Z^{(n)} \in S_2$  und geht eventuell noch zu einer Teilfolge über so gilt

$$z_0^{(n)} \rightarrow z_0^* \in S_1$$

$$z_1^{(n)} \rightarrow z_1^*$$

$$\text{Im}z_2^{(n)} \rightarrow \infty.$$

Wählt man genügend kleine offene Umgebungen

$$U(z_0^*) \subset S_1, \quad U(z_1^*) \subset \mathbb{C}$$

und eine hinreichend große Zahl  $C$ , so erhält man eine offene Einbettung

$$U(z_0^*) \times U(z_1^*) \times U_C/\mathbb{Z} \xrightarrow{\omega} S_2/\Gamma$$

$$(z_0, z_1, z_2) \rightarrow \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei

$$U_C = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}z > C\}.$$

Der Zylinder  $U_C/\mathbb{Z}$  läßt sich mittels der Abbildung

$$z_2 \rightarrow e^{\frac{2\pi iz_2}{l}}$$

in die Kreisscheibe

$$K = \left\{ \xi \in \mathbb{C}; |\xi| < e^{-\frac{2\pi C}{l}} \right\}$$

einbetten. Die Abbildung  $\varphi$  läßt sich zu einer offenen Einbettung

$$U(z_0^*) \times U(z_1^*) \times K \rightarrow X$$

ausdehnen. Dies ist ein Koordinatensystem im Punkt  $\omega$ .

Damit läßt sich leicht zeigen:

Eine holomorphe  $F$ -invariante Differentialform

$$h_0 dz_1 \wedge dz_2 - h_1 dz_0 \wedge dz_2 + h_2 dz_0 \wedge dz_1$$

ist genau dann auf  $X$  holomorph fortsetzbar, wenn sich die Funktionen  $h_0$  und  $h_1$  bei festem  $z_0$  und  $z_1$  in Potenzreihen von  $\xi = e^{\frac{2\pi iz_2}{t}}$  ohne nullten Koeffizienten entwickeln lassen

$$h_\nu(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_\nu(z_0, z_1) \xi^n \quad \text{für } \nu=0, 1. \quad (16)$$

Daß dies immer richtig ist, folgt aus den Hilfssätzen 2 u. 3.

### § 5. Anwendungen

In der Einleitung haben wir die Invarianten  $g_\nu$  eines algebraischen Funktionenkörpers  $K$  eingeführt. Ist  $X$  ein kompaktes singularitätenfreies Modell von  $K$ , so gilt bekanntlich

$$g_\nu(K) = \dim A^\nu \Omega(X).$$

**Satz 3.** Die Gruppe  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{R})$  sei mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurabel. Dann gilt

- a)  $g_1(K(\Gamma)) = 0$ ,
- b)  $g_2(K(\Gamma)) \geq \dim[\Gamma, \frac{1}{2}, \nu] - 1$ ,

sofern ein Multiplikatorsystem  $\nu(M) = \pm 1$  vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  existiert

$$\text{c) } g_3(K(\Gamma)) = \dim[\Gamma, 3]_0.$$

Dabei wird mit  $[\Gamma, 3]_0$  der Vektorraum der *Spitzenformen* vom Gewicht drei zum trivialen Multiplikatorsystem bezeichnet.

*Beweis.* Man kann annehmen, daß  $\Gamma$  eine Untergruppe der Siegelschen Modulgruppe ist, welche auf  $S_2$  frei operiert (vgl. [2], Hilfssatz 4).

a) Der Beweis wird durch einen Rückgriff auf die Hilbertsche Modulgruppe eines reell quadratischen Zahlkörpers  $L$  geführt. Sei  $\alpha_1, \alpha_2$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $L$ . Mit Hilfe der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2' \end{pmatrix}$$

wird eine Einbettung

$$S_1 \times S_1 \rightarrow S_2 \quad (z_1, z_2) \rightarrow A \begin{pmatrix} z_1 & \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} A' \quad (17)$$

definiert. Projiziert man die Gruppe  $\Gamma$  auf  $S_1 \times S_1$  so erhält man eine Gruppe  $\Gamma_0$ , welche mit der Hilbertschen Modulgruppe von  $L$  kommensurabel ist (vgl. [1]).

Durch Restriktion von  $\omega$  erhält man eine  $\Gamma_0$ -invariante holomorphe 1-Form, welche nach [3], Satz 2.1 verschwinden muß. Dies gilt für alle reell quadratischen Zahlkörper. Es ist nun leicht zu zeigen, daß  $\omega$  verschwindet.

- b) folgt aus den Sätzen 1 u. 2.
- c) Eine holomorphe 3-Form

$$\omega = f \cdot dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2$$



ist genau dann  $\Gamma$ -invariant, wenn  $f$  eine Modulform vom Gewicht 3 ist. Man nennt  $f$  eine Spitzenform, wenn für jede Matrix  $M \in \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  die Fourierentwicklung der mit  $M$  transformierten Form die Gestalt

$$f(MZ)|CZ+D|^{-3} = \sum_{T=T', >0} a_M(T) e^{2\pi i \text{Sp}(TZ)} \quad (18)$$

hat. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{S_2/\Gamma} \omega \wedge \bar{\omega} < \infty.$$

Diese Bedingung ist natürlich notwendig für die Fortsetzbarkeit von  $\omega$  auf eine singularitätenfreie Kompaktifizierung von  $S_2/\Gamma$ . Sie ist aber auch hinreichend ([3], Hilfssatz 3.1).

Das arithmetische Geschlecht

$$g(K(\Gamma)) = \sum (-1)^j g_j = 1 + g_2 - g_3$$

kann man für  $\Gamma = \Gamma[l]$ ,  $l \geq 3$  berechnen, indem man den Riemann-Rochschen Satz auf das Igusa-Modell anwendet.

Auf diesem Wege hat Yamazaki [7]  $\dim[\Gamma[l], 3r]$ ,  $r > 1$  berechnet.

Mit Hilfe seiner Resultate zeigt man

$$g(K(\Gamma[l])) \rightarrow -\infty \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Es folgt

$$\dim[\Gamma[l], 3]_0 \rightarrow \infty \quad \text{für } l \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Konkrete Beispiele von Spitzenformen vom Gewicht 3 sind mir nicht bekannt.

Eine holomorphe Differentialform auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist stets geschlossen. Durch Restriktion erhalten wir eine Abbildung

$$A^2 \Omega(X) \rightarrow H^2(S_2/\Gamma, \mathbb{C}) = H^2(\Gamma, \mathbb{C}). \quad (20)$$

(Die Gruppe  $\Gamma$  operiert trivial auf  $\mathbb{C}$ .)

Es läßt sich zeigen, daß diese Abbildung injektiv ist. Hieraus gewinnt man folgende gruppentheoretische Anwendung

$$\dim H^2(\Gamma[2l], \mathbb{C}) \rightarrow \infty \quad \text{für } l \rightarrow \infty. \quad (21)$$

(An dieser Stelle sollte man einen tiefen Satz von Garland erwähnen:

Ist  $\Gamma \subset \text{Sp}(n, \mathbb{Z})$  eine Untergruppe von endlichem Index in der Siegelschen Modulgruppe  $n$ -ten Grades,  $n \geq 8$ , so gilt

$$\dim H^2(\Gamma, \mathbb{C}) = 1).$$

Wir wollen schließlich noch eine Anwendung auf Modulformen vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  geben. Sei

$$f \in [\Gamma, \frac{1}{2}, v].$$

Dabei sei  $\Gamma \subset \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  eine beliebige Untergruppe von endlichem Index und  $v$  irgendein Multiplikatorsystem vom Gewicht  $\frac{1}{2}$ . Dieses Multiplikatorsystem und das Multiplikatorsystem der Thetafunktion

$$\vartheta(Z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z[g]}$$

müssen auf einer geeigneten Untergruppe  $\Gamma_0 \subset \Gamma \cap \Gamma(4, 8)$  übereinstimmen, denn jede Untergruppe von endlichem Index von  $\text{Sp}(2, \mathbb{Z})$  hat eine endliche Faktorkommutatorgruppe!

Wir haben bereits bemerkt, daß die Differentialform  $\{f, \vartheta\}$  geschlossen sein muß, da sie sich auf eine singularitätenfreie Kompaktifizierung von  $S_2/\Gamma$  fortsetzen läßt.

**Satz 4.** Sei  $f$  eine Modulform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  bezüglich irgendeiner Untergruppe von endlichem Index der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades (beliebiges Multiplikatorsystem), dann genügt  $f$  der Differentialgleichung

$$\left[ \frac{4\partial^2}{\partial z_0 \partial z_2} - \frac{\partial^2}{(\partial z_1)^2} \right] f \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ist

$$f(Z) = \sum_{T=T', \geq 0} a(T) e^{2\pi i S(TZ)}$$

die Fourierentwicklung von  $f$ , so bedeutet obige Differentialgleichung einfach

$$a(T) \cdot \det T = 0. \quad (22)$$

**Folgerung.** Jede Spitzenform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$  verschwindet identisch.

(Im Falle  $n=1$  ist die Dedekindsche  $\eta$ -Funktion eine Spitzenform vom Gewicht  $\frac{1}{2}$ .)

### Literatur

1. Freitag, E., Schneider, V.: Bemerkung zu einem Satz von I. Igusa und W. Hammond. *Math. Z.* **102**, 9—16 (1967)
2. Freitag, E.: Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. I. *Crelle Journal* Bd. **247**, 97—117 (1971)
3. Freitag, E.: Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. *Inventiones math.* **17**, 106—134 (1972)
4. Igusa, J.I.: On the graded ring of theta-constants. *Amer. Journal of math.* **86**, 219—246 (1964)
5. Igusa, J.I.: A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. *Math. Ann.* **168**, 228—260 (1967)
6. Maaß, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series. *Lecture notes* **216**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
7. Yamazaki, T.: On Siegel modular forms of degree two (preprint)

E. Freitag  
 Mathematisches Institut der Universität  
 D-6500 Mainz  
 Saarstr. 21  
 Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 9. Januar 1975)