Abhandlungen des Internationalen Kongress der Mathematiker
Vancouver, 1974

Singularitäten von Modulmannigfaltigkeiten und Körper Automorpher Funktionen

Eberhard Freitag

Die analytische Theorie der Modulformen mehrerer Veränderlicher erhielt einen beträchtlichen Aufschwung durch die "Kompaktifizierungstheorien", welche von Satake begründet wurden. Entscheidend weiterentwickelt wurden sie von Baily und zur höchsten Allgemeinheit gebracht von Baily und Borel.

Wir erinnern kurz an das Hauptresultat. Sei D ein beschränktes symmetrisches Gebiet im $\boldsymbol{C}^N$ und Γ eine diskontinuierliche Gruppe analytischer Automorphismen von D, welche arithmetisch definiert ist. Dann ist D/Γ eine quasiprojektive algebraische Mannigfaltigkeit (i.a. mit Singularitäten) mit einer natürlichen Kompaktifizierung $\overline{D/\Gamma}$, welche nichts anderes ist, als die projektive algebraische Mannigfaltigkeit, die dem graduierten Ring der Modulformen

$$A(\Gamma) = \sum_{r=0}^{\infty} [\Gamma, r]$$

zugeordnet ist. Hierbei ist $[\Gamma, r]$ der Raum der Modulformen in bezug auf den Automorphiefaktor

$$j(z, \gamma)^r, j(z, \gamma) = \det\left(\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial z_\mu}\right).$$

Dass obige Algebra endlich erzeugt ist, gehört zu den Hauptresultaten der Kompaktifizierungstheorie.

Die Mannigfaltigkeit $\overline{D/\Gamma}$ hat i.a. Singularitäten. Insbesondere die Punkte im Unendlichen $\overline{D/\Gamma} - D/\Gamma$ sind—von einigen Ausnahmen abgesehen—hochkomplizierte Singularitäten. Es ist ein wichtiges Problem, die Natur dieser Singularitäten aufzuklären. Aufgrund der Desingularisierungstheorie von Hironaka existiert

© 1975, Canadian Mathematical Congress

eine Auflösung $\pi : \tilde{X} \to X$, $X = \overline{D/\Gamma}$. Im Falle der Hilbertschen Modulflächen konstruierte Hirzebruch explizit die minimale Auflösung und benutzte sie, um den Typ von $\tilde{X}$ im Sinne von Kodaira (rough classification) zu bestimmen.

Einige der Resultate Hirzebruchs kann man auch ohne Benutzung einer expliziten Desingularisierung beweisen und auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Es gibt in höheren Dimensionen auch interessante Phänomene, welche im Falle der Hilbertschen Modulflächen nicht auftreten.

Wir wollen nun etwas mehr ins Detail gehen. Unter $\Omega^\nu(Y)$ verstehen wir den Raum der holomorphen Differentialformen vom Grade ν auf einer analytischen Mannigfaltigkeit Y.

Im Folgenden machen wir die Voraussetzung

$$\dim(\overline{D/\Gamma} - D/\Gamma) + 2 \leqq \dim D/\Gamma = N.$$

(Dadurch wird im wesentlichen nur der Fall $N = 1$ ausgeschlossen.)

1. Bemerkung: *Man hat einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Omega^N(X_{\mathrm{reg}}) \xrightarrow{\sim} [\Gamma, 1]$$

(X_{reg} = *regulärer Ort von* X).

(Durch Restriktion dieses Isomorphismus erhält man eine Einbettung $\Omega^N(\tilde{X}) \hookrightarrow [\Gamma, 1]$.)

2. Satz. *Das Bild von* $\Omega^N(\tilde{X})$ *in* $[\Gamma, 1]$ *stimmt überein mit dem Raum der Spitzenformen* $[\Gamma, 1]_0$.

Die Dimension $g_\nu(\tilde{X}) = \dim \Omega^\nu(\tilde{X})$ hängt nicht ab von der Wahl der Auflösung $\tilde{X}$ und ist daher eine Invariante des Körpers der Modulfunktionen $K(\Gamma)$ (= Körper der rationalen Funktionen auf X).

Ist beispielsweise $K(\Gamma)$ *eine rein transzendente Erweiterung von* $\mathbf{C}$, *so ist* $\dim [\Gamma, 1]_0 = 0$.

Von einigen Spezialfällen abgesehen, konnten die Invarianten g_ν nur für Gruppen berechnet werden, die mit der Hilbertschen Modulgruppe kommensurabel sind.

3. Theorem [1]. *Sei* Γ *eine Gruppe von simultan gebrochen linearen Substitutionen*

$$(z_1, \cdots, z_N) \to \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \cdots, \frac{a_N z_N + b_N}{c_N z_N + d_N}\right),$$

welche mit der Hilbertschen Modulgruppe eines total reellen Zahlkörpers kommensurabel ist, Dann gilt:

(a) $g_0(X_{\mathrm{reg}}) = g_0(\tilde{X}) = 1$,
(b) $g_\nu(X_{\mathrm{reg}}) = g_\nu(\tilde{X}) = 0$ *für* $0 < \nu < N$,
(c) $g_N(X_{\mathrm{reg}}) = g_N(\tilde{X}) + h = (-1)^N(P_\Gamma(0) - h - 1)$.

Dabei ist h die Anzahl der *Spitzenklassen* von Γ und $g_\nu(-) = \dim \Omega^\nu(-)$; mit P_Γ wird das *Hilbertpolynom* von $A(\Gamma)$ bezeichnet.

$$P_\Gamma(r) = \dim [\Gamma, r] \quad \textit{für } r \equiv 0 \bmod r_0 \text{ (geeignet)}, \ r \gg 0.$$

Das Polynom P_Γ wurde von Shimizu mit Hilfe der Selbergschen Spurformel berechnet.

BEISPIEL. Sei Γ torsionsfrei und N ungerade. Dann gilt

$$\dim\,[\Gamma, r]_0 = \dim\,[\Gamma, r] - h = \nu(D/\Gamma)\cdot(2r-1)^N \quad \text{für } r > 1.$$

Es folgt mit Hilfe des Theorems 3 $\dim\,[\Gamma, 1]_0 > 0$. Der Körper $K(\Gamma)$ kann nicht rein tranzendent sein!

Bevor wir die Hilbertsche Modulgruppe weiter behandeln, wollen wir etwas die allgemeine Situation erläutern.

(1) Es gibt eine Formel, welche das arithmetische Geschlecht $g(K(\Gamma))$ von $K(\Gamma)$ (d.h. eines singularitätenfreien Modells) durch die Werte von Hilbertpolynomen ausdrückt, welche im Prinzip mit Hilfe der Selbergschen Spurformel berechnet werden können.

BEISPIEL. Sei S_n die Siegelsche Halbebene und Γ eine Gruppe, welche mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurabel ist, aber keine Torsion hat. Den verschiedenen Randkomponenten $(n-1)$-ten Grades entsprechen ebensolche Gruppen $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_h$ auf S_{n-1}. Bezeichnet man mit P bzw. $P_1, \cdots, P_h$ die Hilbertpolynome der entsprechenden Algebren von Modulformen, so gilt

$$g(K(\Gamma)) := \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^\nu g_\nu(\bar{X}) = P(1) - \sum_{\nu=1}^{h} P_\nu\left(\frac{N+1}{N}\right) \qquad \left(N = \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Unglücklicherweise hat bis jetzt niemand im Falle der Siegelschen Modulgruppe Γ_n, $n > 2$, eine endliche Form der Selbergschen Spurformel für $\dim\,[\Gamma_n, r]$ ausgearbeitet. Man darf aber hoffen, dass dies eines Tages geschieht.

(2) Die Invarianten $g_\nu(X_0)$, $1 < \nu < N$, verschwinden im allgemeinen nicht.

Ist Γ kommensurabel mit der Siegelschen Modulgruppe, so gilt wohl

$$g_\nu(X_{\mathrm{reg}}) = 0 \quad \text{für } 0 < \nu < n \ (= \text{Rang } S_n).$$

Aber mithilfe der Theorie der Theta-Nullwerte kann man holomorphe alternierende Differentialformen vom Grad $N-1$ zu gewissen von Igusa definierten Kongruenzuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe konstruieren. Es gilt also $\Omega^{N-1}(X_{\mathrm{reg}}) \neq 0$ im allgemeinen.

(3) Im Falle der Hilbertschen Modulgruppe sind die Spitzen isolierte Punkte. Allgemein liegen jedoch auch höherdimensionale Randkomponenten vor.

Ich möchte nun die Spitzen der Hilbertschen Modulgruppe genauer beschreiben.

Sei $\mathfrak{t}$ ein Gitter vom Rang N in einem total reellen Zahlkörper L vom Grad N und Λ eine Untergruppe von endlichem Index in der Gruppe aller total positiven Einheiten, welche auf $\mathfrak{t}$ operiert, $\Lambda\cdot\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}$. Diesen beiden Daten ist eine N-dimensionale analytische Singularität, die Spitze, zugeordnet.

Wir wollen uns hier damit begnügen, die Komplettierung des lokalen Ringes in dieser Spitze zu beschreiben.

Der formale Gruppenring $\boldsymbol{C}[[\mathfrak{t}^+]]$ über der Halbgruppe

$$\mathfrak{t}^+ = \{x \in \mathfrak{t}, x > 0 \text{ (total positiv) oder } x = 0\}$$

besteht aus allen Abbildungen $f : \mathfrak{t}^+ \to \boldsymbol{C}$, wobei die Multiplikation durch

$$f \cdot g(x) = \sum_{x'+x''=x} f(x')\, g(x'')$$

erklärt ist. Diese Summe ist endlich! Die Gruppe Λ operiert auf diesem Ring. Der Fixring wird mit $R = \boldsymbol{C}[[\mathfrak{t}^+]]^\Lambda$ bezeichnet.

4. THEOREM [2]. *Der Ring R hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Er ist ein noetherscher lokaler vollständiger normaler Ring der Dimension N.*

(2) *Die Tiefe von R (homologische Kodimension) ist zwei.*

(3) *Der kanonische Modul von R ist isomorph zu R.*

(4) *Die Divisorenklassengruppe von R ist* Hom $(\mathfrak{t}^+ \cdot \Lambda, \boldsymbol{C}^*)$ *(mit* $\mathfrak{t}^+ \cdot \Lambda$ *wird das semidirekte Produkt bezeichnet).*

(5) *Im Falle $N \geqq 3$ ist der Ring R starr.*

In Wirklichkeit wissen wir über den Ring R noch sehr viel genauer Bescheid. Der Raum Spec $R - \{\mathfrak{m}\}$ ist singularitätenfrei; die Elemente der lokalen Divisorenklassengruppe entsprechen also genau den Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf diesem Raum. Die Kohomologie all dieser Geradenbündel ist explizit bestimmt.

Obwohl obiges Theorem rein algebraisch formuliert werden konnte, erfordert sein Beweis die analytische Realisierung von R:

$$R = \hat{\mathcal{O}}_{X_\infty, \infty}; \qquad X_\infty = H^N/\mathfrak{t}^+ \cdot \Lambda \cup \{\infty\}.$$

Wir nehmen nun an, dass der Körper L eine Galoissche Erweiterung von $\boldsymbol{Q}$ ist. Die Galoisgruppe G möge $\mathfrak{t}$ und Λ in sich überführen. Sie operiert dann auch auf R und man kann den Ring R^G betrachten. Auch dessen Tiefe kann berechnet werden.

Im Falle $N \geqq 3$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Tiefe } R^G &= 4 \quad \text{falls } G \cong \boldsymbol{Z}/2 \times \cdots \times \boldsymbol{Z}/2, \\ &= 3 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Die Divisorenklassengruppe von R^G ist Hom$(\mathfrak{t} \cdot \Lambda \cdot G, \boldsymbol{C}^*)$. Dies ist eine endliche Gruppe! Der Ring R^G ist also ein *fastfaktorieller Ring*.

Immer dann, wenn die Gruppe G halbeinfach ist, kann man $\mathfrak{t}$ und Λ so konstruieren, dass R^G ein ZPE-Ring ist. Mithilfe der klassischen Invariantentheorie können total reelle Zahlkörper zur alternierenden Gruppe fünften Grades A_5 konstruiert werden. *Damit erhält man Beispiele 60-dimensionaler ZPE-Ringe der Tiefe drei.*

Wir wollen nun noch auf einige globale Eigenschaften der Hilbertschen Modulmannigfaltigkeiten eingehen.

Ist Y ein komplexer Raum, so setzen wir $h^\nu(Y) = \dim H^\nu(Y, \mathcal{O}_Y)$. Sei wiederum $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{R})^N$ eine diskrete Untergruppe, welche mit der Hilbertschen Modulgruppe kommensurabel ist.

5. THEOREM [1]. *Es gilt*

$$\begin{aligned} h^\nu(X_0) &= 1 \quad \textit{für } \nu = 0, \\ &= \infty \quad \textit{für } \nu = N-1;\ X_0 = H^N/\Gamma, \\ &= 0 \quad \textit{sonst}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^\nu(X) &= 1 && \textit{für } \nu = 0, \\ &= h\cdot\binom{n-1}{\nu-1} && \textit{für } 1 \leqq \nu \leqq N-1, \\ &= \dim[\Gamma, 1] && \textit{für } \nu = N, \\ &= 0 && \textit{sonst}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^\nu(\tilde{X}) &= 1 && \textit{für } \nu = 0, \\ &= \dim\,[\Gamma, 1]_0 && \textit{für } \nu = N, \\ &= 0 && \textit{sonst}. \end{aligned}$$

Die singuläre Kohomologie von X_0 wurde von Harder bestimmt [4]. Der Unterraum aller Kohomologieklassen aus $H^\cdot(X_0, \boldsymbol{C})$, welche im de Rham-Komplex durch quadratintegrierbare Differentialformen repräsentiert werden können, wird mit $\tilde{H}^\cdot(X_0, \boldsymbol{C})$ bezeichnet. Seine Kodimension kann man mithilfe der Theorie der Eisensteinreihen berechnen.

6. Theorem [4].

$$\begin{aligned} \dim H^\nu(X_0, \boldsymbol{C}) - \dim \tilde{H}^\nu(X_0, \boldsymbol{C}) &= 1 && \textit{für } \nu = 0, \\ &= 0 && \textit{für } 1 \leqq \nu \leqq n-1, \\ &= h\cdot\binom{n-1}{\nu-n} && \textit{für } n \leqq \nu \leqq 2n-2, \\ &= h-1 && \textit{für } \nu = 2n-1, \\ &= 0 && \textit{für } \nu \geqq 2n. \end{aligned}$$

Die Differentialformen $(dx_\nu \wedge dy_\nu)/y_\nu^2$, $1 \leqq \nu \leqq N$, sind invariant und definieren Kohomologieklassen ω_ν aus $\tilde{H}^\cdot(X_0, \boldsymbol{C})$. Sie erzeugen einen Unterring $H^\cdot_{\text{univ}}(X_0, \boldsymbol{C})$. Definierende Relation ist $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_N = 0$. Man hat eine Zerlegung

$$\tilde{H}^\cdot(X_0, \boldsymbol{C}) = H^\cdot_{\text{univ}}(X_0, \boldsymbol{C}) \oplus H^\cdot_{\text{cusp}}(X_0, \boldsymbol{C}),$$

wobei in $H^\cdot_{\text{cusp}}(X_0, \boldsymbol{C})$ alle Kohomologieklassen zusammengefasst sind, welche sich durch Spitzenformen darstellen lassen. Diese werden wir nun genau beschreiben. Jeder Teilmenge $I \subset \{1, \cdots, N\}$ ordnen wir eine mit Γ kommensurable Gruppe Γ^I zu. Sie entsteht aus Γ durch Konjugation mit dem Automorphismus

$$\sigma(z_1, \cdots, z_N) = (w_1, \cdots, w_N); \quad \begin{aligned} w_\nu &= z_\nu && \textit{für } \nu \in I, \\ &= -\bar{z}_\nu && \textit{für } \nu \notin I. \end{aligned}$$

Die Zuordnung $f \mapsto \sigma^*(f(z_1, \cdots, z_N)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_N)$ induziert eine Einbettung $[\Gamma^I, 1]_0 \subsetneq H^N_{\text{cusp}}(X_0, \boldsymbol{C})$.

7. Theorem ([4], [5]).

$$\begin{aligned} H^\nu_{\text{cusp}}(X_0, \boldsymbol{C}) &= 0 \quad \textit{für } \nu \neq N, \\ H^N_{\text{cusp}}(X_0, \boldsymbol{C}) &= \bigoplus_{I \subset \{1, \cdots, N\}} [\Gamma^I, 1]_0. \end{aligned}$$

Die Dimensionen von $[\Gamma^I, 1]_0$ konnen mithilfe Shimizus Formeln ausgedrückt werden (Theorem 3) Sie hängen i.a. von I ab! Die Differenzen lassen sich durch

Werte von L-Reihen ausdrücken. Die Berechnung der Kohomologie von X_0 hat folgende Anwendung.

8. THEOREM [3]. *Im Falle $N \geqq 3$ gilt*
(a) Pic $X_0 \cong \mathbf{Z}^{N-1} \oplus \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$.
Die Kommutatorgruppe $[\Gamma, \Gamma]$ hat endlichen Index in Γ (sogar für $N \geqq 2$).
(b) Pic $X \cong \mathbf{Z}$.

Die Aussage (a) kann man elementarer auch folgendermassen aussprechen. Ist

$$\mathscr{T}(z, M) \in \hat{Z}(\Gamma, \mathcal{O}^*(H^N))$$

ein analytischer *Automorphiefaktor* von Γ, so existiert dine holomorphe nirgends verschwindende Funktion $h: H^N \to \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft

$$\left| \mathscr{T}(z,M) \cdot \frac{h(Mz)}{h(z)} \right| = \prod_{\nu=1}^{N} \left| c_\nu z_\nu + d_\nu \right|^{r_\nu}.$$

Die Zahlen r_ν sind rational und ihre Nenner sind beschränkt. Studiert man die Kohomologie der Geradenbündel auf X_0 so stösst man auf interessante Probleme. Aus den bisher bekannten Resultaten lässt sich u.a. folgern, dass die Hilbertschen Modulmannigfaltigkeiten im Falle $N \geqq 3$ starr sind im Sinne der Deformationstheorie komplexer Räume.

Literatur

1. E. Freitag, *Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe*, Invent. Math. **17** (1972) 106–134. MR **47** #6612.

2. E. Freitag und R. Kiehl, *Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen*, Invent. Math. **24** (1974), 121–148.

3. E. Freitag, *Automorphy-factors of Hilbert's modular group* (preprint).

4. G. Harder, *On the cohomology of* SL(2, σ) (preprint).

5. Y. Matsushima and G. Shimura, *On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half planes*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 417–449. MR **27** #5273.

UNIVERSITY OF MAINZ
65 MAINZ, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY