Inventiones math. 24, 121–148 (1974)

Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen

Eberhard Freitag (Mainz) und Reinhardt Kiehl (Mannheim)

Einleitung

In dieser Arbeit wird die Untersuchung der Spitzen Hilbertscher Modulgruppen in mehr als zwei Variablen weitergeführt. Wir bauen auf der Arbeit [3] auf.

Im Vordergrund werden algebraische Eigenschaften der lokalen analytischen Ringe in den Spitzen stehen.

Wir wollen uns in der Einleitung damit begnügen, die Komplettierung dieser Ringe zu beschreiben.

Gegeben seien:

1) Ein total reeller algebraischer Zahlkörper L.

2) Ein Gitter $\mathfrak{t} \subset L$ vom Rang n.

3) Eine Untergruppe Λ von endlichem Index in der Gruppe aller total positiven Einheiten, welche auf $\mathfrak{t}$ operiert

$$\Lambda \cdot \mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}.$$

4) Eine Gruppe G von Automorphismen von L, welche $\mathfrak{t}$ und Λ in sich überführt.

Diesen Daten ordnen wir einen Ring R zu.

Zunächst sei $\mathfrak{t}_+$ die additive Halbgruppe aller *total positiven Elemente* aus $\mathfrak{t}$ vereinigt mit 0.

Wir bilden dann den formalen Gruppenring $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}_+]]$, welcher aus *allen* Abbildungen

$$f\colon \mathfrak{t}_+ \to \mathbb{C}$$

besteht. Das Produkt zweier Abbildungen ist durch

$$f \cdot f'(a) = \sum_{a'+a''=a} f(a') f'(a'')$$

erklärt. Diese Summe ist endlich! Auf dem Ring $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}^+]]$ operieren die Gruppen Λ und G. Der Invariantenring sei

$$R = \mathbb{C}[[\mathfrak{t}_+]]^{\Lambda, G}.$$

Dieser Ring R ist ein *normaler lokaler vollständiger noetherscher Ring der Dimension* $n = [L:\mathbb{Q}]$.

Seine Tiefe (homologische Kodimension) kann berechnet werden. Es kommen nur die Werte 1, 2, 3, 4 vor. Im allgemeinen handelt es sich also um keine Cohen-Macauley-Ringe. Die Divisorenklassengruppe des Ringes R wird bestimmt. Sie ist endlich, wenn $L/\mathbb{Q}$ galoisch ist und wenn G die volle Galoisgruppe ist. Genau dann, wenn überdies G mit seiner Kommutatorgruppe übereinstimmt, kann man $\mathfrak{t}$ und Λ so konstruieren, daß R ein ZPE-Ring ist. Mit Hilfe der Invariantentheorie werden galoissche total reelle Körper L mit Galoisgruppe A_5 (alternierende Gruppe) konstruiert. Man erhält dann Beispiele von 60dimensionalen ZPE-Ringen der Tiefe drei.

Damit ist eine seit längerer Zeit offene Frage beantwortet, ob es ZPE-Ringe der Charakteristik 0 gibt, welche nicht Cohen-Macauley sind[1].

Wenn die Gruppe G nur aus der Identität besteht, ist der Ring starr im Sinne der Deformationstheorie analytischer Singularitäten ($n \geqq 3$ vorausgesetzt). Andere Beispiele starrer normaler Singularitäten, welche nicht Cohen-Macauley sind, scheinen nicht bekannt zu sein. Obwohl die obigen Resultate rein algebraisch formuliert sind, erfordert ihr Beweis analytische Hilfsmittel.

Die vorliegende Arbeit steht im Zusammenhang mit Untersuchungen von U. Christian.

Er hat sich mit der Frage nach den Automorphiefaktoren des Stabilisators einer Spitze (auch für allgemeine Gruppen) beschäftigt.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen diesen Faktoren und der lokalen Divisorenklassengruppe (s. § 4).

§ 1. Gitter und Multiplikatoren

Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist ein Gitter $\mathfrak{t}$ von maximalem Rang in $\mathbb{R}^n$.

$$\mathfrak{t} \subset \mathbb{R}^n; \qquad \operatorname{Rang} \mathfrak{t} = n.$$

Unter einem *Multiplikator* (von $\mathfrak{t}$) versteht man ein n-Tupel $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ von positiven reellen Zahlen mit der Eigenschaft

$$\varepsilon \mathfrak{t} = \mathfrak{t}.$$

(Das Produkt zweier Vektoren ist komponentenweise zu bilden

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n).)$$

Für jeden Multiplikator ε gilt

$$\varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n = 1,$$

da $\mathfrak{t}$ maximalen Rang hat.

[1] Ein Charakteristik-p-Beispiel findet man im Ergebnisbericht von Fossum über Divisorenklassengruppen (Springer, 1973).

Es sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\times n}$ eine diskrete Gruppe von Multiplikatoren. Mit Hilfe der Logarithmusabbildung transformiert man Λ in eine diskrete Gruppe

$$\log \Lambda \subset \mathbb{R}^n.$$

Diese ist in der Hyperebene

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

enthalten. Daher ist Λ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\leqq n-1$.

Wir setzen im folgenden voraus, daß Λ Maximalrang hat.

$$\operatorname{Rang} \Lambda = n-1.$$

Konstruktion von (t, Λ)

Wir fassen im folgenden $\mathbb{C}^n$ als einen Ring auf. Zwei n-Tupel von Zahlen werden komponentenweise addiert und multipliziert. Man hat die Spur- und Normabbildungen:

$$S\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad S z = z_1 + \cdots + z_n$$

$$N\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad N z = z_1 \cdot \cdots \cdot z_n.$$

Wir betrachten nun einen total reellen algebraischen Zahlkörper vom Grad n. Es gibt n verschiedene Einbettungen von L in den Körper der reellen Zahlen

$$L \to \mathbb{R}, \qquad a \to a_\nu, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n,$$

die wir zu einer Einbettung

$$L \to \mathbb{R}^n, \qquad a \to (a_1, \ldots, a_n)$$

zusammenfassen. Wir identifizieren der Einfachheit halber a mit $(a_1, \ldots, a_n)$. Damit ist L ein Unterring von $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Ring t der ganzen Zahlen in L ein solches Gitter vom Rang n in $\mathbb{R}^n$ und die Gruppe Λ der total positiven Einheiten eine Multiplikatorengruppe. Diese hat nach dem Dirichletschen Einheitensatz den Rang $n-1$. Ist allgemeiner $\mathfrak{t} \subset L$ irgendein Gitter vom Rang n, so existiert einer Untergruppe Λ von endlichem Index in der Gruppe aller total positiven Einheiten, welche auf t operiert.

1.1. Bemerkung. *Es sei* $\mathfrak{t} \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gitter und* Λ *eine diskrete Gruppe von Multiplikatoren*

$$\operatorname{Rang} \mathfrak{t} = n; \qquad \operatorname{Rang} \Lambda = n-1.$$

Der von den Multiplikatoren ε *erzeugte* $\mathbb{Q}$*-Vektorraum*

$$L = \mathbb{Q} \cdot \Lambda$$

ist ein total reeller Körper vom Grad n.

Es gilt

a) *Die Einheitengruppe von L enthält Λ als Untergruppe von endlichem Index.*

b) *Es existiert ein Vektor $a \in \mathbb{R}^{\times n}$ mit der Eigenschaft*

$$a \cdot \mathfrak{t} \subset L.$$

Beweis. Jedem Multiplikator $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ kann man das Polynom

$$P_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon_1) \ldots (x - \varepsilon_n)$$

zuordnen. Dies ist das charakteristische Polynom der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad a \to \varepsilon a.$$

Da das Gitter $\mathfrak{t}$ bei dieser Abbildung in sich überführt wird, ist das Polynom P_ε ganzzahlig. Seine Wurzeln $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sind daher algebraische Zahlen. Ihr Produkt ergibt Eins, es handelt sich also um algebraische Einheiten. Das Polynom P_ε kann unter Umständen reduzibel sein. Dann gilt aber

$$\varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_\nu} = 1$$

für ein ν-Tupel

$$1 \leqq j_1 < \cdots < j_\nu \leqq n, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Das Gitter

$$\log \Lambda \subset H = \{a \in \mathbb{R}^n, S a = 0\}$$

kann nicht in der Vereinigung von endlich vielen echten Unterräumen aus H enthalten sein. Daher existiert ein Multiplikator ε, so daß das Polynom P_ε irreduzibel ist. Die Komponenten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ bilden dann ein vollständiges System von konjugierten algebraischen Zahlen. Der Modul $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ hat den Rang n.

Wir wählen nun irgendeinen Vektor

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad a_\nu \neq 0 \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

mit der Eigenschaft

$$(1, \ldots, 1) \in a \cdot \mathfrak{t}$$

aus. Dann gilt

$$\mathbb{Z}[\varepsilon] \subset \mathbb{Z} \cdot \Lambda \subset a \cdot \mathfrak{t}.$$

Da auch $a \cdot t$ ein Modul vom Rang n ist, existiert eine natürliche Zahl r mit der Eigenschaft

$$r a \mathfrak{t} \subset \mathbb{Z}[\varepsilon].$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{Q}[\varepsilon] = \mathbb{Q} \cdot \Lambda = \mathbb{Q} \cdot a \cdot \mathfrak{t},$$

und Bemerkung 1.1 ist bewiesen.

Wir können hieraus einfache Folgerungen ziehen.

Wenn eine Komponente a_ν eines Gittervektors $a \in \mathfrak{t}$ verschwindet, so ist $a = (0, \ldots, 0)$.

Wenn eine Komponente ε_ν eines Multiplikators $\varepsilon \in \Lambda$ Eins ist, so gilt: $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$.

Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ heißt *total positiv* – in Zeichen $a > 0$ – wenn alle Komponenten positiv sind.

Entsprechend wird die Schreibweise

$$a \geqq 0 \Leftrightarrow a_1 \geqq 0, \ldots, a_n \geqq 0$$

verwendet.

Offenbar gilt für einen Vektor $a \in \mathfrak{t}$:

$$a \geqq 0 \Leftrightarrow a > 0 \quad \text{oder} \quad a = 0.$$

§ 2. Fourierreihen

Es sei

$$H^n = H \times \cdots \times H, \qquad H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\},$$

das kartesische Produkt von n oberen Halbebenen. Auf H^n sei eine Gruppe Γ von Transformationen der Form

$$z \to \varepsilon z + a$$

gegeben.

Die *Translationen* in Γ definieren eine Untergruppe von $\mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{t} = \{a \in \mathbb{R}^n, z \to z + a \text{ in } \Gamma\}.$$

Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{t}$ ein Gitter vom Rang n ist.

Wenn die Transformation $z \to \varepsilon z + a$ in Γ liegt, so ist offensichtlich ε ein Multiplikator von $\mathfrak{t}$.

Die Gesamtheit dieser Multiplikatoren bildet eine Gruppe

$$\Lambda = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^{\times n}, z \to \varepsilon z + a_\varepsilon \text{ in } \Gamma \text{ für ein } a_\varepsilon \in \mathbb{R}^n\}.$$

(Der Vektor a_ε ist natürlich nur modulo t bestimmt.)

Wir setzen weiterhin voraus, daß Λ eine diskrete Gruppe vom Rang $n-1$ ist.

Die Gruppe Γ operiert auf H^n *diskontinuierlich und fixpunktfrei.*

Die Spitze ∞

Im folgenden ist zu beachten, daß die Hyperfläche $N y = 1$ unter Γ stabil ist und daß ihr Bild im Quotientenraum H^n/Γ kompakt ist.

Dies gibt uns die Möglichkeit, den Raum H^n/Γ durch Hinzufügen eines Punktes ∞

$$X = H^n/\Gamma \cup \{\infty\}$$

so zu erweitern, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) *X ist lokal kompakt.*
2) *H^n/Γ ist ein offener Unterraum.*
3) *Eine Umgebungsbasis von ∞ bilden die Mengen*

$$U_C/\Gamma \cup \{\infty\} \quad \textit{mit} \quad U_C = \{z \in H^n, N\,y > C\}.$$

2.1. Theorem. *Der Raum X trägt eine Struktur als normaler komplexer Raum, H^n/Γ ist eine offene analytische Untermannigfaltigkeit.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [6].

Eine in einer Umgebung U der Spitze $\infty \in X$ definierte Funktion ist genau dann holomorph, wenn sie stetig ist und wenn sie in $U \cap H^n/\Gamma$ analytisch ist.

Den lokalen analytischen Ring in der Spitze ∞ bezeichnen wir mit

$$R = R(\Gamma) = \mathcal{O}_{X,\infty}.$$

Beschreibung von R mit Hilfe von Fourierreihen:

Jedes Element von R kann durch eine Γ-invariante holomorphe Funktion

$$f\colon\ U_C \to \mathbb{C}, \qquad C \text{ hinreichend groß}$$

repräsentiert werden. Eine solche Funktion ist insbesondere periodisch

$$f(z+a) = f(z) \qquad \text{für } a \in \mathfrak{t}$$

und kann daher in eine Fourierreihe entwickelt werden.

$$f(z) = \sum_{g \in \mathfrak{t}^0} a_g\, e(g\,z), \qquad e(\ldots) = e^{2\pi i S(\ldots)}.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{t}^0 = \{g \in \mathbb{R}^n, S(g\,x) \in \mathbb{Z} \text{ für } x \in \mathfrak{t}\}$$

das zu $\mathfrak{t}$ duale Gitter.

Die Invarianz

$$f(\varepsilon\,z + a) = f(z)$$

bedeutet

$$a_{g\varepsilon} = a_g \cdot e(g\,a).$$

Die Funktion f ist genau dann in die Spitze ∞ stetig (und damit auch analytisch) fortsetzbar, wenn

$$a_g \neq 0 \Rightarrow g \geqq 0$$

gilt. Dies ist im Falle $n \geqq 2$ automatisch der Fall nach dem *Götzky-Koecher-Prinzip* oder nach dem *Riemannschen Hebbarkeitssatz.*

Es ist gelegentlich zweckmäßig, die Konvergenzbedingung zu vernachlässigen und formale Fourierreihen

$$\sum_{g \in \mathfrak{t}^0,\, g \geqq 0} a_g\, e(g\, z) \quad \text{mit} \quad a_{g\varepsilon} = a_g\, e(g\, a)$$

zu betrachten. Diese bilden einen Ring $\hat{R}$. Die Summationsbedingung $g \geqq 0$ gestattet es nämlich, solche Reihen formal zu multiplizieren

$$\sum_{g'} a_{g'}\, e(g'\, z) \sum_{g''} b_{g''}\, e(g''\, z) = \sum_{g} c_g\, e(g\, z)$$

mit

$$c_g = \sum_{g' + g'' = g} a_{g'}\, b_{g''}.$$

Die letzte Summe ist endlich.

2.2. Satz. *Der Ring $\hat{R}$ ist die Komplettierung von $R = \mathcal{O}_{X,\infty}$.*

Insbesondere ist $\hat{R}$ ein lokaler, vollständiger, noetherscher, normaler Ring der Dimension n.

Beweis. Die Menge der Spuren von Elementen aus $\mathfrak{t}$ bildet eine zyklische Gruppe

$$S(\mathfrak{t}) = \mathbb{Z} \cdot r_0, \qquad r_0 > 0.$$

Mit Hilfe der Spur definiert man gewisse Idealketten

$$\hat{\mathfrak{m}}_r = \{f \in R,\ a_g = 0 \text{ für } S\, g \leqq r\, r_0\}$$

$$\mathfrak{m}_r = R \cap \hat{\mathfrak{m}}_r,$$

offenbar gilt

a) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} =$ maximales Ideal in R,

b) $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \supset \cdots$,

c) $\mathfrak{m}_r \cdot \mathfrak{m}_s \subset \mathfrak{m}_{r+s}$.

Diese Filtrierung von R ist insbesondere gröber als die m-adische Filtrierung, welche durch die Potenzen des maximalen Ideals definiert wird.

$$\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}_r \qquad \text{für } r = 1, 2, \ldots .$$

2. . Hilfssatz. *Der Ring $\hat{R}$ ist die Komplettierung von R in bezug auf die Topologie, die durch die Filtrierung $\{\mathfrak{m}_r\}$ definiert wird.*

(Satz 2.2 bezieht sich natürlich auf die $\mathfrak{m}$-adische Filtrierung.)

Beweis. Die „Poincaréreihen"

$$P_g(z) = \sum_{\varepsilon \in \Lambda} e(g\, \varepsilon\, z + g\, a_\varepsilon), \qquad g \in \mathfrak{t}^0,\ g \geqq 0$$

konvergieren in ganz H^n und sind Γ-invariant. Offenbar wird der Vektorraum $\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}_r$ von endlich vielen dieser Reihen erzeugt. Die kanonische Abbildung

$$R/\mathfrak{m}_r \to \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}_r$$

ist also ein Isomorphismus von endlich dimensionalen Vektorräumen.

Die Schwierigkeit beim Beweis von Satz 2.2 besteht also im Vergleich der beiden Filtrierungen $\{\mathfrak{m}_r\}$ und $\{\mathfrak{m}^r\}$. Wir müssen zeigen, daß sie dieselbe Topologie definieren. Dazu bezeichnen wir mit

$$\bar{R} = \varprojlim R/\mathfrak{m}^r$$

die m-adische Komplettierung von R. Durch stetige Fortsetzung erhält man einen Homomorphismus

$$\varphi\colon \bar{R} \to \hat{R}.$$

Mit Hilfe einer „Mittag-Leffler-Schlußweise" zeigen wir nun, daß der Homomorphismus $\varphi\colon \bar{R} \to \hat{R}$ surjektiv ist.

Da $R/\mathfrak{m}^r$ endlich dimensional ist, kann man eine Folge von natürlichen Zahlen $r_1 < r_2 < \cdots$ mit der Eigenschaft

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}_{r_1} \subset \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}_{r_2} \\ \mathfrak{m}_{r_2} \subset \mathfrak{m}^3 + \mathfrak{m}_{r_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

finden.

Jedes Element $f \in \hat{R}$ läßt sich als Reihe der Form

$$f = \sum f_j; \quad f_j \in \mathfrak{m}_{r_j}$$

schreiben.

Man kann nun induktiv Folgen

$$a_j \in \mathfrak{m}^j; \quad g_j \in \mathfrak{m}_{r_j}$$

mit der Eigenschaft

$$f_1 + \cdots + f_{j-1} = a_1 + \cdots + a_j + g_j$$

konstruieren. Die Reihe $a_1 + a_2 + \cdots$ konvergiert in $\bar{R}$. Ihr Bild in $\hat{R}$ ist gerade f.

Damit ist gezeigt, daß φ surjektiv ist. Insbesondere ist $\hat{R}$ ein noetherscher vollständiger Ring.

Um zu zeigen, daß φ auch injektiv ist, benutzen wir den bekannten Satz, daß die Komplettierung eines nullteilerfreien analytischen Ringes nullteilerfrei ist.

Hieraus und aus der Formel

$$\dim \hat{R} = \dim \bar{R} + \text{Höhe}\,(\text{Kern}\,\varphi)$$

folgert man

$$\text{Kern}\ \varphi = 0 \Leftrightarrow \dim \hat{R} \geqq n.$$

Das *Hilbert-Samuelpolynom* P des Ringes $\hat{R}$ ist durch die Eigenschaft

$$P(r) = \dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^r \qquad \text{für hinreichend große } r$$

charakterisiert. Sein Grad stimmt mit der Dimension von $\hat{R}$ überein.

Es gilt

$$\dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^r \geqq \dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}_r.$$

Daher genügt es zu zeigen, daß

$$\frac{1}{r^{n-1}} \dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}_r$$

unbeschränkt ist.

Nun ist $\dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}_r$ offenbar genau die Maximalzahl von nicht assoziierten Elementen

$$g \in \mathfrak{t}^0, \qquad g \geqq 0, \qquad S g < r\, r_0.$$

(Zwei Gitterelemente a, b heißen assoziiert, wenn es einen Multiplikator $\varepsilon \in \Lambda$ mit der Eigenschaft $\varepsilon a = b$ gibt.)

Eine einfache Abzählung von Gitterpunkten beendet den Beweis von Satz 2.2.

§ 3. Die Kohomologie der Gruppe Γ

Ordnet man einer Transformation $z \to \varepsilon z + a$ den Multiplikator ε zu, so erhält man einen Homomorphismus von Γ auf Λ, dessen Kern aus den Translationen besteht

$$0 \to \mathfrak{t} \to \Gamma \to \Lambda \to 1.$$

Wir werden im folgenden das Gitterelement a mit der Translation $z \to z + a$ identifizieren.

3.1. Bemerkung. *Die Kommutatorgruppe von Γ ist eine Untergruppe von endlichem Index von* $\mathfrak{t}$.

Beweis. Die Kommutatorgruppe von Γ ist offenbar in $\mathfrak{t}$ enthalten. Der Kommutator zweier Transformationen

$$z \to \varepsilon z + a_\varepsilon \quad \text{und} \quad z \to z + a$$

ist die Translation

$$z \to z + (\varepsilon - 1)\, a.$$

Bereits für einen Multiplikator $\varepsilon \neq 1$ ist $(\varepsilon - 1)\,\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}$ ein Untergitter vom Rang n und damit von endlichem Index.

Wir benötigen im folgenden die Kohomologiegruppen $H^{\cdot}(\Gamma, \mathbb{C})$. Dabei operiert Γ trivial auf $\mathbb{C}$.

3.2. Satz. *Die natürliche Abbildung*

$$H^r(\Lambda, \mathbb{C}) \to H^r(\Gamma, \mathbb{C})$$

ist im Falle $0 \leqq r < n$ *ein Isomorphismus.*

Der Beweis ergibt sich aus der Analyse der Spektralsequenz

$$H^p\big(\Lambda, H^q(t, \mathbb{C})\big) \Rightarrow H^r(\Gamma, \mathbb{C}), \qquad r = p + q.$$

Die Gruppe Γ operiert auf dem Vektorraum $\mathcal{O}(U_C)$ der holomorphen Funktionen

$$f\colon\ U_C \to \mathbb{C}, \qquad U_C = \{z \in H^n, N(\operatorname{Im} z) > C\}.$$

Die Kohomologiegruppen

$$H^{\boldsymbol{\cdot}}\big(\Gamma, \mathcal{O}(U_C)\big) = H^{\boldsymbol{\cdot}}(U_C/\Gamma, \mathcal{O})$$

wurden in [3] berechnet.

Die kanonischen Abbildungen

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(U_C) \quad \text{und} \quad \Gamma \to \Lambda$$

induzieren Homomorphismen

$$H^r(\Lambda, \mathbb{C}) \to H^r\big(\Gamma, \mathcal{O}(U_C)\big).$$

Aus [3] übernehmen wir

3.3. Satz. *Die natürliche Abbildung*

$$H^r(\Lambda, \mathbb{C}) \to H^r\big(\Gamma, \mathcal{O}(U_C)\big)$$

ist injektiv. Im Falle $0 < r < n-1$ *ist sie sogar ein Isomorphismus.*

Wir betrachten nun gewisse Erweiterungen der Gruppe Γ, indem wir auch Permutationen der Variablen zulassen

$$\sigma(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}).$$

Es sei $\hat{\Gamma}$ eine Gruppe von Transformationen

$$z \to \varepsilon \cdot \sigma(z) + a.$$

Ordnet man jeder dieser Transformationen die Permutation σ zu, so erhält man einen Homomorphismus auf eine gewisse Untergruppe $G \subset S_n$ der symmetrischen Gruppe.

Der Kern dieses Homomorphismus sei genau die oben untersuchte Gruppe Γ. Wir haben also die exakte Sequenz

$$1 \to \Gamma \to \hat{\Gamma} \to G \to 1.$$

Die Gruppe G operiert in bekannter Weise auf Γ. Bei dieser Operation bleibt $\mathfrak{t}$ stabil und ist daher ein G-Modul. Ebenfalls ist $\Lambda = \Gamma/\mathfrak{t}$ ein G-Modul.

Aufgrund von Bemerkung 1.1 hat man eine Einbettung von G in die Automorphismengruppe des Körpers L

$$G \hookrightarrow G(L/\mathbb{Q}).$$

Daher ist die Ordnung von G nicht größer als n

$$|G| \leqq n.$$

Wenn die Gruppe $\hat{\Gamma}$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum M linear operiert, so erhält man die Kohomologie $H^{\cdot}(\hat{\Gamma}, M)$ aus $H^{\cdot}(\Gamma, M)$ durch Invariantenbildung:

$$H^r(\hat{\Gamma}, M) = H^r(\Gamma, M)^G.$$

Es ist zu berücksichtigen, daß die höheren Kohomologiegruppen einer endlichen Gruppe, welche auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum linear operiert, verschwinden.

Dieses Prinzip kann man auf die Moduln $M = \mathbb{C}$ und $\mathcal{O}(U_C)$ anwenden.

(Wenn die Substitution $z \to \varepsilon\sigma(z) + a$ in $\hat{\Gamma}$ liegt, so ist eine gewisse Potenz schon in Γ enthalten. Hieraus folgert man $N\varepsilon = 1$. Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ operiert also auf U_C.)

Wir ziehen aus den Sätzen 3.2 und 3.3 einige Folgerungen:

Man hat im Falle $n \geqq 3$ aufgrund der Sätze 3.2 und 3.3 natürliche Isomorphismen.

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) = H^1(\Gamma, \mathbb{C}) = H^1(\Lambda, \mathbb{C}) = H^1(\Gamma, \mathcal{O}(U_C)).$$

Durch Invariantenbildung erhält man

3.4. Bemerkung. *Im Falle $n \geqq 3$ existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) = H^1(\hat{\Gamma}, \mathcal{O}(U_C)).$$

In § 1 wurde der lokale Ring

$$R(\Gamma) = \mathcal{O}_{X_C, \infty}; \qquad X_C = U_C/\Gamma \cup \{\infty\}$$

eingeführt. Auf diesem operiert die endliche Gruppe G und wir können

$$R(\hat{\Gamma}) = R(\Gamma)^G$$

betrachten.

Dies ist der lokale Ring des Raumes

$$U_C/\hat{\Gamma} \cup \infty = X_C/G$$

im Punkt ∞.

Wir wollen nun die Tiefe τ des lokalen Ringes $R(\hat{\Gamma})$ ausrechnen.

Unter der Tiefe eines lokalen noetherschen Ringes R versteht man die Länge einer maximalen Nichtnullteilerfolge

$$a_0, \ldots, a_\tau \in \mathfrak{m}(R).$$

(Das Bild von a_j in $R/(a_1, \ldots, a_{j-1})$ ist Nichtnullteiler für $0 \leqq j \leqq \tau$.)

Ist X ein komplexer Raum, $x \in X$, so kann man die Tiefe τ des lokalen Ringes

$$R = \mathcal{O}_{X,x}$$

folgendermaßen mit Hilfe der Kohomologie mit Träger in x charakterisieren

$$\begin{aligned} H^r_{\{x\}}(X, \mathcal{O}_X) &= 0 \quad \text{für } r < \tau \\ &\neq 0 \quad \text{für } r = \tau \ [8]. \end{aligned}$$

Im Falle $R = R(\hat{\Gamma})$, $n \geqq 2$, erhält man hieraus die folgende Beschreibung der Tiefe

$$\begin{aligned} H^r(\hat{\Gamma}, \mathcal{O}(U_C)) &= 0 \quad \text{für } 0 < r \leqq \tau - 2 \\ &\neq 0 \quad \text{für } r = \tau - 1. \end{aligned}$$

3.5. Theorem. *Es sei* $n \geqq 3$.

1) *Die Gruppe G habe nicht die Ordnung n. Dann ist die Tiefe von* $R(\hat{\Gamma})$ *zwei.*

2) *Die Gruppe G habe die maximale Ordnung n. Dann ist die Tiefe von* $R(\hat{\Gamma})$ *drei, mit Ausnahme des Falles*

$$G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2.$$

In diesem Falle ist die Tiefe 4.

3.6. Folgerung. *Im Falle* $n > 4$ *ist* $R(\hat{\Gamma})$ *niemals ein Cohen-Macauley-Ring.*

(Ein lokaler noetherscher Ring R heißt Cohen-Macauley-Ring, wenn die Tiefe gleich der Dimension ist.)

Beweis von Theorem 3.5. Die Tiefe ist genau dann größer als zwei, wenn

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) = H^1(\hat{\Gamma}, \mathcal{O}(U_C))$$

verschwindet. Nun ist

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbb{C})^G = \operatorname{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})^G.$$

Nach Wahl einer Basis von $\mathfrak{t}$ erhält man einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})^G = \mathfrak{t}^G \otimes \mathbb{C}.$$

Wenn ein G-invarianter Multiplikator $\varepsilon \neq 1$ existiert, so kann G nicht eine volle Galoisgruppe sein.

Ist umgekehrt die Ordnung von G kleiner als n, so ist der Körper L^G total reell $\neq \mathbb{Q}$. Es existiert daher eine total positive Einheit $\varepsilon \neq 1$ in L^G.

Eine Potenz von ε liegt in Λ^G.

Die Ordnung von G sei jetzt $n(\geqq 3)$. Dann ist die Tiefe von $R(\hat{\Gamma})$ größer als zwei. Im Falle $n=3$ ist also $R(\hat{\Gamma})$ ein Cohen-Macauleyring. Wir können daher $n \geqq 4$ annehmen.

Wir haben zu untersuchen, wann die Gruppe

$$H^2(\hat{\Gamma}, \mathcal{O}(U_C)) = H^2(\Lambda, \mathbb{C})^G$$

verschwindet.

Die Kohomologie einer freien abelschen Gruppe ist bekannt

$$H^2(\mathrm{t}, \mathbb{C}) = \Lambda^2 \operatorname{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}).$$

Den G-Modul $\operatorname{Hom}(\Lambda, \mathbb{C})$ kann man mit Hilfe der regulären Darstellung $\mathbb{Q}[G]$ beschreiben. Bekanntlich zerfällt die Gruppenalgebra in eine direkte Summe von zwei G-Moduln

$$\mathbb{Q}[G] = J(G) + \mathbb{Q},$$

wobei G auf $\mathbb{Q}$ trivial operiert.

Man kann zeigen, daß die beiden G-Moduln

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

isomorph sind.

Dazu nur folgende Bemerkungen:

1) Die Gruppe G operiert auf $L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ durch Permutation der Variablen. Dieser G-Modul ist isomorph zum Gruppenring $\mathbb{R}[G]$.

2) Der Untermodul

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, Sx = 0\}$$

ist isomorph zu $J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

3) Die Logarithmusabbildung

$$\log\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$$

ist mit der Operation von G verträglich.

Der Vektorraum $H^2(\mathrm{t}, \mathbb{C})^G$ ist also isomorph zu $(\Lambda^2 J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^G$. Ob dieser Raum verschwindet, hängt nur von der abstrakten Gruppe G ab.

Bemerkung. *Ist G eine endliche Gruppe der Ordnung $n \geqq 4$, so gilt*

$$(\Lambda^2 J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^G = 0 \Leftrightarrow G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2.$$

Beweis. Seien a, b nur Elemente aus G. Die Summe

$$\sum_{g \in G} g\, a \wedge g\, b$$

ist invariant unter G.

Sie verschwindet offenbar genau dann, wenn

$$a b^{-1} = (a b^{-1})^{-1}$$

gilt. Wenn diese Relation für alle $(a, b) \in G \times G$ erfüllt ist, so muß G vom Typ $\mathbb{Z}/2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/2$ sein.

In diesem Falle kann man die Operation von G auf $\Lambda^2 J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ leicht überblicken.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Gruppe $(\Lambda^r J(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^G$ im Falle $r=2$ tatsächlich verschwindet. Sie verschwindet aber nicht im Falle $r=3$, wenn G mehr als zwei Faktoren vom Typ $\mathbb{Z}/2$ enthält.

Damit ist Theorem 3.5 bewiesen.

§ 4. Die lokale Divisorenklassengruppe

Sei X ein normaler komplexer Raum, X^0 sein regulärer Ort. Im folgenden verwenden wir die folgende modifizierte Picardgruppe.

$\operatorname{Pic} X$ *sei die Gruppe der Isomorphieklassen analytischer Geradenbündel auf* X^0, *welche sich auf ganz* X *als kohärente Garben fortsetzen lassen.*

Wenn die Kodimension des singulären Ortes größer oder gleich drei ist, so gilt

$$\operatorname{Pic} X = \operatorname{Pic} X^0.$$

Im folgenden sei

$$\begin{aligned} X_C &= U_C/\hat{\Gamma}, \\ X_C^0 &= \text{regulärer Ort von } X_C, \\ U_C^0 &= \text{Urbild von } X_C^0 \text{ in } U_C. \end{aligned}$$

4.1. Bemerkung. *Im Falle $n \geqq 3$ operiert $\hat{\Gamma}$ frei auf U_C^0.*

Beweis. Wenn die Abbildung $U_C^0 \to X_C^0$ überhaupt verzweigt ist, so hat der Verzweigungsort die genaue Kodimension Eins. Daher genügt es zu zeigen, daß im Falle $n \geqq 3$ keine Spiegelung

$$z \longrightarrow \varepsilon\, \sigma(z) + a$$

enthalten ist. Wenn diese Substitution eine Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins haben soll, so muß σ eine Transposition sein. Im Falle $n \geqq 3$ kann aber niemals eine Transposition in der Automorphismengruppe des Körpers L liegen. Für $a \in L$ würden nämlich gewisse Komponenten von $a - \sigma(a)$ verschwinden. Hieraus folgt aber schon $a = \sigma(a)$.

Im folgenden sei stets

$$n \geqq 3.$$

4.2. Bemerkung. *Wenn die Gruppe* $\operatorname{Pic} X_C$ *für jedes* $C>0$ *nur aus dem trivialen Geradenbündel besteht, so ist der lokale Ring* $R=\mathcal{O}_{X_C,\infty}$ *ein ZPE-Ring.*

Beweis. Ein beliebiges Element $f \in R$ kann als holomorphe Funktion

$$f\colon X_C \to \mathbb{C}, \qquad C \text{ hinreichend groß},$$

aufgefaßt werden. Den Nullstellendivisor von f kann man in Primdivisoren zerlegen

$$(f)=n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r.$$

Da X_C^0 singularitätenfrei ist, kann man jedem Divisor D auf X_C ein Geradenbündel aus $\operatorname{Pic} X_C$ zuordnen. Wenn dieses trivial ist, existiert eine holomorphe Funktion mit genauem Nullstellendivisor D.

In unserem Falle kann man also holomorphe Funktionen

$$f_1, \ldots, f_r \quad \text{mit} \quad (f_\nu)=P_\nu \qquad \text{für} \quad \nu=1, \ldots, r$$

finden.

Es gilt

$$f=h f_1^{n_1} \ldots f_r^{n_r}$$

mit einer holomorphen invertierbaren Funktion h. Dies ist die Primfaktorzerlegung von f.

Man kann Bemerkung 4.2 auch anders interpretieren.

In der kommutativen Algebra wird jedem normalen noetherschen Ring R die Gruppe der Divisoren zugeordnet.

Ein Divisor ist ein Element der von den Primidealen der Höhe 1 erzeugten freien abelschen Gruppe. Jedem von Null verschiedenen Element des Quotientenkörpers wird ein „Hauptdivisor" zugeordnet. Die Gruppe der *Divisorenklassen* ist genau dann trivial, wenn R ZPE-Ring ist.

Bemerkung. *Im Falle* $n \geqq 3$ *ist die Divisorenklassengruppe des lokalen Ringes* $R(\hat{\Gamma})$ *isomorph zu* $\varinjlim \operatorname{Pic} X_C^0$.

Manchmal ist es nützlich, die Geradenbündel durch Automorphiefaktoren zu beschreiben. Unter einem solchen Faktor versteht man eine Abbildung

$$J\colon U_C \times \Gamma \to \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften

a) $J(z, \gamma)$ ist als Funktion von z holomorph,

b) $J(z, \gamma\gamma')=J(z, \gamma')\, J(\gamma' z, \gamma)$.

Ein Automorphiefaktor ist also nichts anderes als ein 1-Kozykel der Gruppe $\hat{\Gamma}$ im Modul

$$A^* = H^0(U_C, \mathcal{O}^*)$$

der holomorphen invertierbaren Funktionen auf U_C. Jedem Automorphiefaktor J wird eine kohärente Garbe zugeordnet. Ein Schnitt über einer offenen Menge $V \subset X_C$ ist eine holomorphe Funktion

$$f\colon\; U \to \mathbb{C}, \qquad U = \text{Urbild von } V \text{ in } U_C,$$

mit der Eigenschaft

$$f(z) = J(z, \gamma)\, f(\gamma z).$$

Die Einschränkung auf X_C^0 ist ein Geradenbündel $L_J \in \operatorname{Pic} X_C$. Dieses Bündel ist genau dann trivial, wenn J ein Korand ist.

$$J(z, \gamma) = \frac{h(\gamma z)}{h(z)}, \qquad h \in \mathcal{O}^*(U_C).$$

4.3. Bemerkung. *Im Falle $n \geqq 3$ ist die natürliche Abbildung*

$$H^1(\hat{\Gamma}, A^*) \to \operatorname{Pic} X_C^0, \qquad A^* = H^0(U_C, \mathcal{O}^*)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei L ein analytisches Geradenbündel aus $\operatorname{Pic} X_C$. Sein reziprokes Bild $p^* L$ in U_C^0 kann zu einem Geradenbündel auf ganz U_C fortgesetzt werden, da L kohärent auf X_C fortsetzbar ist. Auf U_C ist jedes Geradenbündel trivial, denn U_C ist Steinsch und zusammenziehbar.

Es existiert daher ein globaler nirgends verschwindender Schnitt s von $p^* L$.

Der Automorphiefaktor $J(\cdot, \gamma)$ wird nun durch

$$J(\cdot, \gamma) = \gamma(s) \otimes s^{-1}$$

definiert.

Spezielle Automorphiefaktoren sind die Gruppenhomomorphismen

$$v\colon\; \hat{\Gamma} \to \mathbb{C}^*, \qquad J(z, \gamma) = v(\gamma).$$

Damit ist insbesondere jedem solchen Gruppenhomomorphismus ein Geradenbündel auf X_C^0 zugeordnet.

4.4. Theorem. *Im Falle $n \geqq 3$ ist die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*) \to \operatorname{Pic} X_C$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir setzen

$$A = H^0(U_C, \mathcal{O})$$
$$A^* = H^0(U_C, \mathcal{O}^*).$$

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to A \xrightarrow{\exp} A^* \to 0$$

resultiert eine exakte Kohomologiesequenz

$$H^1(\hat{\Gamma}, A) \to H^1(\hat{\Gamma}, A^*) \to H^2(\hat{\Gamma}, \mathbb{Z}) \to H^2(\hat{\Gamma}, A).$$

Nach 3.4 hat man einen natürlichen Isomorphismus

$$H^1(\hat{\Gamma}, A) \to \operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}).$$

Mit Hilfe der Exponentionalabbildung erhält man einen Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) \to \operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*).$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(\hat{\Gamma}, A) & \longrightarrow & \operatorname{Pic} X_C^0 = H^1(\hat{\Gamma}, A^*) \\ \| \wr & & \uparrow \\ \operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*) \end{array}$$

kommutativ ist.

Das Bild von $H^1(\hat{\Gamma}, A)$ *in* $\operatorname{Pic} X_C^0$ *besteht also nur aus Geradenbündeln der Form* L_v, $v \in \operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*)$.

Als nächstes untersuchen wir das Bild von $H^1(\hat{\Gamma}, A^*)$ in $H^2(\hat{\Gamma}, \mathbb{Z})$, also den Kern von

$$H^2(\hat{\Gamma}, \mathbb{Z}) \to H^2(\hat{\Gamma}, A).$$

Dieser Kern ist endlich, denn aufgrund der Sätze 3.2 und 3.3 ist die Abbildung

$$H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \to H^2 \Gamma, A)$$

injektiv. Hieraus folgt, daß auch

$$H^2(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}) \to H^2(\hat{\Gamma}, A)$$

injektiv ist.

Das Bild von $H^1(\hat{\Gamma}, A)$ *in* $\operatorname{Pic} X_C$ *ist also eine Untergruppe von endlichem Index.*

Insbesondere ist eine geeignete Potenz L^r eines Geradenbündels $L \in \operatorname{Pic} X_C^0$ im Bild der Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*) \to \operatorname{Pic} X_C$$

enthalten.

Dies kann man auch folgendermaßen ausdrücken:

Zu jedem Automorphiefaktor J existiert eine natürliche Zahl r, ein Homomorphismus $v\colon \hat{\Gamma} \to \mathbb{C}^*$ und eine invertierbare holomorphe Funktion $h\colon U_C \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$J(z, \gamma)^r = v(\gamma) \cdot \frac{h(\gamma z)}{h(z)}.$$

Es gibt eine holomorphe Funktion

$$h_0\colon U_C \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad h_0^r = h.$$

Wir erhalten

$$J_0(z, \gamma)^r = v(\gamma) \quad \text{mit} \quad J_0(z, \gamma) = J(z, \gamma) \frac{h_0(z)}{h_0(\gamma z)}.$$

Die Funktion $J_0(z, \gamma)$ ist bei festem γ konstant. Der Automorphiefaktor J ist daher zu einem Homomorphismus

$$v_0\colon \hat{\Gamma} \to \mathbb{C}, \qquad v_0(\gamma) = J_0(z, \gamma)$$

äquivalent.

Damit ist bewiesen, daß die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}^*) \to \operatorname{Pic} X_C$$

surjektiv ist.

Wir müssen noch zeigen, daß sie auch injektiv ist.

Sei $v\colon \hat{\Gamma} \to \mathbb{C}^*$ ein Homomorphismus, so daß das assoziierte Geradenbündel trivial ist. Es existiert dann eine holomorphe invertierbare Funktion

$$h\colon U_C \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad h(z) = v(\gamma)\, h(\gamma z).$$

Nach Bemerkung 3.1 ist die Funktion h periodisch bei einem Untergitter $\tilde{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{t}$ von endlichem Index. Man kann daher h in eine Fourierreihe entwickeln

$$h(z) = \sum_{g \in \tilde{\mathfrak{t}}^0} a_g\, e(g z).$$

Eine Variante des Götzky-Koecher-Prinzips besagt [3]

$$a_g \neq 0 \Rightarrow g \geqq 0.$$

Auf die Funktion $1/h$ kann man dieselbe Überlegung anwenden. Es folgt $a_0 \neq 0$.

Andererseits ist

$$a_0 = v(\gamma) \cdot a_0 \qquad \text{für } \gamma \in \hat{\Gamma}.$$

Daher ist

$$v(\gamma) = 1 \qquad \text{für alle } \gamma \in \hat{\Gamma}.$$

§5. Die Konstruktion einiger Gruppen $\hat{\Gamma}$, für die $R(\hat{\Gamma})$ ZPE-Ring ist

Gegeben sei eine endliche Gruppe G. Wir bezeichnen mit $[G, G]$ die Kommutatoruntergruppe von G, mit $\mathbb{Z}[G]$ die Gruppenalgebra von G über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und mit J folgendes $\mathbb{Z}[G]$-Ideal:

$$J = \sum_{\delta \in G} \mathbb{Z}(\delta - 1).$$

Aus der homologischen Algebra benötigen wir den bekannten

5.1. Hilfssatz. *Die abelschen Gruppen $G/[G, G]$ und J/J^2 sind isomorph.*

Beweis. Es genügt folgendes zu zeigen:

Für jede abelsche Gruppe A ist die abelsche Gruppe der Homomorphismen von $G/[G, G]$ in A isomorph zur abelschen Gruppe der Homomorphismen von J/J^2 in A. Äquivalent dazu ist:

Die Gruppe der Homomorphismen von G in A ist isomorph zur Gruppe der Homomorphismen von J in A, die

$$J^2 \cong \sum_{\delta, \tau \in G} \mathbb{Z}(\delta - 1)(\tau - 1)$$

annullieren.

Man hat eine natürliche Bijektion

$$\chi \leftrightarrow \tilde{\chi}$$

zwischen der Menge aller Abbildungen

$$\chi\colon\ G \to A, \qquad \chi(1) = 0,$$

und der Menge aller $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen

$$\tilde{\chi}\colon\ J \to A$$

mit

$$\tilde{\chi}(\delta - 1) = \chi(\delta).$$

Für δ, τ aus G gilt:

$$(\delta - 1) + (\tau - 1) - (\delta\,\tau - 1) = -(\delta - 1)(\tau - 1),$$

damit

$$\chi(\delta) + \chi(\tau) - \chi(\delta\,\tau) = -\tilde{\chi}\big((\delta - 1)(\tau - 1)\big).$$

Es ist also $\chi(\delta\,\tau) = \chi(\delta)\,\chi(\tau)$ genau dann, wenn $\tilde{\chi}\big((\delta - 1)(\tau - 1)\big)$ verschwindet.

5.2. Folgerung. *M sei ein beliebiger G-Modul,* $P = JM = \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) M$. *Wenn die Gruppe G mit ihrer Kommutatorgruppe* $[G, G]$ *übereinstimmt, so gilt*

$$P = JP.$$

Es sei L ein total reeller galoischer Zahlkörper vom Grad $n > 1$ mit der Galoisgruppe G. E sei eine Gruppe total positiver Einheiten, von endlichem Index in der Gruppe aller Einheiten von L. Nach dem Dirichletschen Einheitensatz ist dann E eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Rang $n-1$.

5.3. Hilfssatz. *Die Gruppe total positiver Einheiten* $\Lambda = \prod_{\delta \in G} (\delta - 1) E$ *ist G-stabil und hat einen endlichen Index in der Gruppe aller Einheiten. Damit ist* Λ *ebenfalls eine freie abelsche Gruppe vom Rang* $n-1$.

Beweis. Die Norm $N\varepsilon = \prod_{\delta \in G} \delta\varepsilon$ jeder Einheit ε aus E ist Eins, damit $\varepsilon^{-n} = \prod_{\delta \in G} \delta\varepsilon/\varepsilon = \prod_{\delta \in G} (\delta - 1)\varepsilon$ in Λ enthalten. Also ist E^n in Λ enthalten!

5.4. Hilfssatz. *Gegeben sei ein Gitter M in L, d.h. ein endlicher* $\mathbb{Z}$*-Untermodul vom Rang n in L.* Λ *sei eine G-stabile total positive Untergruppe von endlichem Index in der Gruppe aller Einheiten von L. Wir setzen:*

$$N = \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) M, \qquad P = \sum_{\varepsilon \in E} \varepsilon N.$$

Die Gruppe G stimme mit ihrer Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ *überein. Dann ist der* $G - \Lambda$*-Modul P ein Gitter und es gilt:*

$$P = \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) P + \sum_{\varepsilon \in \Lambda} (\varepsilon - 1) P.$$

Beweis. Wegen Hilfssatz 5.2 gilt:

$$N = \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) N.$$

Für eine Einheit f aus Λ gilt:

$$\begin{aligned} fN \subseteq N + (f-1)N &\subseteq \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) N + \sum_{\varepsilon \in \Lambda} (\varepsilon - 1) N \\ &\subseteq \sum_{\delta \in G} (\delta - 1) P + \sum_{\varepsilon \in \Lambda} (\varepsilon - 1) P. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß P ein Gitter ist.

N ist ein endlicher $\mathbb{Z}$-Modul. Weil M nicht im Körper $\mathbb{Q} = K^G$ der rationalen Zahlen enthalten ist, muß N von Null verschieden sein.

$\mathfrak{v} = \sum_{\varepsilon \in \Lambda} \mathbb{Z}\,\varepsilon$ ist ein Ring ganzer Größen in L. Sein Quotientenkörper K enthält $n-1$ unabhängige Einheiten. Nach dem Dirichletschen Einheitensatz muß der Grad von L mindestens n sein. Also stimmen K und L überein und $\mathfrak{v}$ ist eine Ordnung von L. P ist ein (vielleicht gebrochenes) von Null verschiedenes $\mathfrak{v}$-Ideal!

5.5. Lemma. *Gegeben sei ein total reeller galoisscher Zahlkörper vom Grad $n \geqq 2$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und G seine Galoisgruppe. Die Gruppe G stimme mit ihrer Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ überein, sei also z.B. eine einfache Gruppe.*

Dann gibt es eine G-stabile Gruppe Λ total positiver Einheiten von L vom Rang $n-1$ und ein $\Lambda-G$-stabiles Gitter $\mathfrak{A}$ in L mit folgenden Eigenschaften:

$$\Lambda = \prod_{\delta \in G} (\delta - 1)\, \Lambda$$

$$\mathfrak{A} = \sum_{\delta \in G} (\delta - 1)\ \mathfrak{A} + \sum_{\varepsilon \in \Lambda} (\varepsilon - 1)\ \mathfrak{A}.$$

Sei Γ das semidirekte Produkt von $\mathfrak{A}$ und Λ, $\hat{\Gamma}$ das semidirekte Produkt von Γ und G

$$\Gamma = \mathfrak{A} \times \Lambda, \qquad \hat{\Gamma} = \Gamma \times G.$$

Dann stimmt die Gruppe $\hat{\Gamma}$ mit ihrer Kommutatoruntergruppe $[\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}]$ überein.

Anhang. Die Existenz total reeller galoisscher Zahlkörper mit einfacher Galoisgruppe

Über die Existenz galoisscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe ist sehr wenig bekannt. Nach Hilbert [5] gibt es galoissche Zahlkörper zu allen alternierenden Gruppen. Leider sind diese Hilbertschen Beispiele nicht total reell. Es soll daher die Konstruktion einiger Beispiele total reeller Zahlkörper mit einfacher Galoisgruppe kurz skizziert werden.

Gegeben sei eine rein transzendente endlich erzeugte Körpererweiterung $K = \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_n)$ des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erzeugt durch die algebraisch unabhängigen Elemente $t_1, \ldots, t_n$ und eine endliche galoische Körpererweiterung L von K mit der Galoisgruppe G. $K = L^G$.

Sei $A = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] = \mathbb{Z}[t]$; der ganze Abschluß B von A in L ist dann endlicher A-Modul. Es gilt: $A = B^G$.

Gegeben sei ein Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ aus dem Zahlraum $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{Q}(a)$ sei der von den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ über $\mathbb{Q}$ erzeugte Körper. Man hat einen natürlichen Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Q}(a)$$

$$t_i \mapsto a_i$$

und $\mathbb{Q}(a)$ ist über diesen Homomorphismus ein A-Modul. Wir setzen:

$$L(a) = B \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}(a).$$

Die Gruppe G operiert auf $L(a)$. Hilberts Irreduzibilitätssatz [5] sagt aus, daß die Menge H derjenigen $a \in \mathbb{Q}^n$, für die $K(a)$ ein Körper, damit $K(a)$ eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Galoisgruppe G ist, dicht im Raum $\mathbb{R}^n$ liegt.

Die Menge U derjenigen Elemente $a \in \mathbb{R}^n$, für die $L(a)$ ein Produkt total reeller Körper ist (insbesondere ist dann der Kern des natürlichen Homomorphismus $\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Q}(a)$ unverzweigt in B), ist offen. Wir wollen annehmen, daß U nicht leer ist. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn L über $\mathbb{Q}$ rein transzendent ist. Dann ist $H \cap U$ nicht leer. Es gibt also total reelle galoissche Zahlkörper $L(a)$ mit Galoisgruppe G.

Sei $\mathbb{Q}$ algebraisch abgeschlossen in L. Dann ist L immer verzweigt über $\mathbb{Q}[t]$: Es gibt keine unverzweigten Überlagerungen des affinen Raumes über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Wir wollen unter diesen Voraussetzungen zeigen:

Es gibt unendlich viele total reelle galoissche Zahlkörper mit Galoisgruppe G, die untereinander nicht isomorph sind.

Der Beweis wird zunächst mit Hilfe von Hilberts Irreduzibilitätssatz auf den Fall $n=1$ zurückgeführt.

Wir wollen also annehmen, daß $n=1$ ist. Nach einer geeigneten Substitution $t \to \frac{1}{t-\alpha}$ kann man annehmen, daß alle genügend großen reellen Zahlen a, insbesondere alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ in U liegen.

$\mathbb{Q}[t]$ ist verzweigt in L. Die Diskriminante $d(t)$ ist also ein nicht konstantes Polynom in $\mathbb{Q}[t]$. Nach Multiplikation mit einer passenden natürlichen Zahl kann man annehmen, daß $d(t)$ ganzzahlig ist. Wir zerlegen $d(t)$ in $\mathbb{Q}[t]$ in irreduzible Faktoren:

$$d(t) = d_1(t)^{e_1} \dots d_r(t)^{e_r}.$$

Auch die nicht konstanten Polynome $d_i(t)$ können ganzzahlig angenommen werden.

Man zeigt:

Es gibt eine endliche Menge S von Primzahlen, so daß folgendes gilt:

Für eine ganze Zahl $m \in H$ und eine Primzahl $p \notin S$, die in $d_1(m)$ in erster Ordnung aufgeht, ist $B \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Z}_{(p)}$ ganz abgeschlossen in $L(m) = B \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Q}$, damit Lokalisierung der Hauptordnung von $L(m)$ nach dem Primideal (p), und $d(m)$ ist bis auf eine Einheit in $\mathbb{Z}_{(p)}$ Diskriminante von $B \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Z}_{(p)}$ über $\mathbb{Z}_{(p)}$. Damit ist eine solche Primzahl p Teiler der Körperdiskriminante $d_{L(m)/\mathbb{Q}}$ von $L(m)$ über $\mathbb{Q}$.

Andererseits gibt es eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ von Primzahlen p, die nicht in S enthalten sind, so daß das Polynom $d_1(t)$ modulo p in die „richtige" Anzahl von teilerfremden Linearfaktoren zerfällt [4].

Es gibt dann zu einer solchen Primzahl p aus $\mathfrak{M}$ eine natürliche Zahl m mit

$$p \mid d_1(m), \qquad p^2 \nmid d_1(m).$$

Betrachte die Folge natürlicher Zahlen $(m+q\,p^2)$, $q \in \mathbb{N}$. Nach Hilberts Irreduzibilitätssatz gibt es beliebig große natürliche Zahlen q, so daß $L(m+q\,p^2)$ ein galoisscher Zahlkörper mit Galoisgruppe G ist. Für genügend große q liegt $m+q\,p^2$ nach Voraussetzung in U, ist also $L(m+q\,p^2)$ total reell. Die Diskriminante von $L(m+q\,p^2)$ wird durch p geteilt.

Also gibt es unter den total reellen galoisschen Zahlkörpern $L(a)$ $(a \in U \cap H)$ mit Galoisgruppe G solche mit beliebig großer Diskriminante.

Es soll ein Beispiel für die angegebene Situation diskutiert werden:

5.7. Satz. *Es gibt unendlich viele nicht untereinander isomorphe galoissche total reelle Zahlkörper, deren Galoisgruppen isomorph sind zur Gruppe A_5 der alternierenden Permutationen von fünf Elementen.*

Dazu betrachten wir den Raum der binären Formen

$$f(x,y) = \sum_{\kappa=1}^{5} a_\kappa x^{5-\kappa} y^\kappa = \prod_{\kappa=1}^{5} (\alpha_\kappa x - \beta_\kappa y)$$

vom Grad fünf.

Auf diesem Raum operiert die lineare Gruppe Gl_2: $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Dann transformiert γ die Form $f(x,y)$ in die Form $f(a\,x+b\,y, c\,x+d\,y)$.

Damit operiert G auf dem Körper Δ der über $\mathbb{Q}$ rationalen Funktionen $h(a_0, \ldots, a_5)$ der Koeffizienten a_κ, die homogen sind vom Grad Null. Außerdem operiert Gl_2 auf natürliche Weise auf dem Oberkörper Ω der über $\mathbb{Q}$ rationalen Funktionen

$$f\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_5}{\alpha_5}\right)$$

in den Wurzeln $\beta_\kappa/\alpha_\kappa$ der Formen. Der Invariantenkörper $K_0 = \Delta^{Gl_2}$ der Formen fünften Grades ist nach dem Hauptsatz der Invariantentheorie rein transzendent über $\mathbb{Q}$ mit den algebraisch unabhängigen Erzeugenden

$$u = \frac{D}{I_4^2}, \qquad v = \frac{I_{12}}{I_4^3}$$

$$K_0 = Q(u,v).$$

Dabei ist die Diskriminantenform $D=D(a_0, \ldots, a_5)$ eine invariante Form vom Grad 8, $I_4=I_4(a_0, \ldots, a_5)$ eine invariante Form vom Grad 4, $I_{12}=I_{12}(a_0, \ldots, a_5)$ eine invariante Form vom Grad 12 [7].

Es ist leicht zu sehen, daß $L=\Omega^{Gl_2}$ rein transzendent über $\mathbb{Q}$ ist und daß auf L die volle Permutationsgruppe S_5 (durch Vertauschung der Wurzeln β_i/α_i) operiert. Es gilt

$$L^{S_5}=K_0.$$

Die in L enthaltene quadratische Erweiterung

$$K=K_0(\sqrt{u})=\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{D}}{I_4}, v\right)$$

ist ebenfalls rein transzendent und wird von der Untergruppe A_5 der alternierenden Permutationen aus S_5 invariant gelassen. Also ist L/K galoissch mit der Galoisgruppe A_5. Für die Erweiterung K liegt unsere Ausgangssituation vor!

Aus Bemerkung 4.2 und den Theoremen 4.4, 5.5 und 5.7 erhält man

5.8. Theorem. *Es gibt unendlich viele untereinander nicht isomorphe ZPE-Ringe der Tiefe* 3 *von z.B. der Dimension* 60.

§6. Die Starrheit der Spitzen

Gegeben sei eine analytische Algebra A. Eine *Deformation* dieser Algebra A ist ein flacher Homomorphismus $B \to C$ analytischer Algebren zusammen mit einem Isomorphismus

$$C/\mathfrak{m}_B C \cong A.$$

Dabei ist $\mathfrak{m}_B$ das maximale Ideal von B. Man erklärt auf natürliche Weise die Äquivalenz von Deformationen.

Die Deformation $B \to C$ heißt *trivial*, wenn sie zur trivialen Deformation

$$C \to C \tilde{\otimes} A$$

äquivalent ist. $C \tilde{\otimes} A$ bezeichnet das *analytische* Tensorprodukt der Algebren C und A über $\mathbb{C}$.

6.1. *Definition.* Die analytische Algebra A heißt starr, wenn jede Deformation trivial ist. Ein analytischer Raum X heißt starr im Punkt $a \in X$, wenn der Ring $\mathcal{O}_{X,a}$ der Keime holomorpher Funktionen in a starr ist.

Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn Schuster gilt folgendes Starrheitskriterium:

6.2. Lemma. *Gegeben sei ein Steinscher normaler Raum X der Dimension $n \geqq 2$ in einem Punkt $a \in X$. X sei außerhalb von a glatt. Ω_X sei die Garbe der holomorphen Differentialformen vom Grad Eins auf X, $\mathscr{D}_X = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ die dazu duale Garbe. Es verschwinde die Kohomologiegruppe $H^1(X - \{a\}, \mathscr{D}_X)$. Dann ist X im Punkt a starr.*

Der *Beweis* soll kurz skizziert werden:

Wir können annehmen, daß X ein durch die kohärente Idealgarbe $\mathscr{J}$ definierter abgeschlossener Unterraum eines komplexen Zahlraumes $\mathbb{C}^m$ ist. j sei die natürliche Einbettung von $U = X - \{a\}$ in X, $\underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} j_* \mathcal{O}_U$ der abgeleitete direkte Bildkomplex von $\mathcal{O}_U$ im Sinne von Verdier, $\mathscr{H}^0_{\{a\}} \mathcal{O}_X$ die Garbe der Schnitte von $\mathcal{O}_X$ mit Trägern in $\{a\}$ und $\underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} \mathscr{H}^0 \mathcal{O}_X$ der abgeleitete Komplex im Sinne von Verdier.

Man hat auf natürliche Weise einen Komplex $\mathscr{K}^{\cdot}$:

$$\mathscr{K}^1 = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2 | X \to \mathscr{K}^0 = \Omega_{\mathbb{C}^m} / \mathscr{J}\, \Omega_{\mathbb{C}^m} | X .$$

Wir betrachten die exakte Folge von Hyperkohomologiegruppen:

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} \mathscr{H}^0_{\{a\}} \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} j_* \mathcal{O}_U) \to \cdots .$$

$\mathscr{K}^{\cdot}|U$ ist quasiisomorph zu Ω_U, also gilt:

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} j_* \mathcal{O}_U) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{K}^{\cdot}|U, \mathcal{O}_U) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_U}(\Omega_U, \mathcal{O}_U) \cong H^1(U, D_X) = 0 .$$

Weil die Tiefe von $\mathcal{O}_{X,a}$ mindestens Zwei ist, verschwindet $H^i(\underline{\underline{\mathscr{R}}}^{\cdot} \mathscr{H}^0_{\{a\}} \mathcal{O}_X) = H^i_{\{a\}}(X, \mathcal{O}_X)$ für $i \leqq 1$ [8], damit $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \underline{\underline{\mathscr{R}}} \mathscr{H}^0_{\{a\}} \mathcal{O}_X)$. Wir erhalten:

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,a}}(\mathscr{K}^{\cdot}_a, \mathcal{O}_{X,a}) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{K}^{\cdot}, \mathcal{O}_X) = 0 .$$

$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,a}}(\mathscr{K}^{\cdot}_a, \mathcal{O}_{X,a})$ ist aber isomorph zur Gruppe der infinitesimalen Deformationen von $\mathcal{O}_{X,a}$.

Gegeben sei nun eine Transformationsgruppe Γ des Hilbertschen Halbraumes H^n im Sinne von § 2. Wir bezeichnen mit p die Projektion von H^n auf den Restklassenraum $X^0 = H^n/\Gamma$. Auf X^0 erklären wir die Geradenbündel $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_n$ und das Vektorraumbündel $\mathscr{M}$ vom Rang n durch ihre Schnitte über offenen Teilmengen von X^0.

Sei U eine offene Teilmenge von X^0. Das Urbild $Y = p^{-1}(U)$ ist eine Γ-saturierte offene Teilmenge von H^n.

$\mathscr{G}_i(U)$ ist der Vektorraum der holomorphen Funktionen $f\colon Y \to \mathbb{C}$, die folgendes Transformationsverhalten bei Substitutionen $\gamma\colon z \to \varepsilon z + a$ der Gruppe Γ haben:

$$f(\gamma z) = \varepsilon_i^{-1} f(z) .$$

$\mathcal{M}(U)$ ist der Vektorraum der Γ-invarianten holomorphen Differentialformen

$$f_1(z)\,dz_1+\cdots+f_n(z)\,dz_n$$

auf Y.

Die Γ-Invarianz bedeutet:

Für jede Transformation

$$\gamma\colon\; z\to\varepsilon z+a$$

aus Γ gilt

$$f_1(\gamma z)\,d(\varepsilon_1 z_1)+\cdots+f_n(\gamma z)\,d(\varepsilon_n z_n)=f_1(z)\,dz_1+\cdots+f_n(z)\,dz_n,$$

d.h.

$$f_1(\gamma z)=\varepsilon_1^{-1}f_1(z),\ldots,f_n(\gamma z)=\varepsilon_n^{-1}f_n(z).$$

Klar ist folgender Hilfssatz:

6.3. Hilfssatz. *Die Garbe $\mathcal{M}$ ist isomorph zur Garbe Ω_{X^0} der holomorphen Differentialformen vom Grade Eins auf X^0. $\mathcal{M}$ zerfällt in die direkte Summe der Geradenbündel $\mathcal{G}_i$:*

$$\mathcal{M}=\mathcal{G}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{G}_n,$$
$$\mathcal{D}_{X^0}=\mathcal{G}_1^{-1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{G}_n^{-1}.$$

Sei $X=X^0\cup\{\infty\}$ die „Kompaktifizierung" von X^0 durch die Spitze ∞. $R(\Gamma)$ ist die Algebra der Keime holomorpher Funktionen in der Spitze ∞.

6.4. Theorem. *Sei $n\geqq 3$. Dann ist die Algebra $R(\Gamma)$ starr.*

Der Raum X ist ein Steinscher Raum: Die Γ-invariante Funktion

$$H^n\to\mathbb{C}$$
$$z\to N(\operatorname{Im} z)^{-1}$$

definiert eine plurisubharmonische Funktion auf X^0, die sich stetig mit dem Wert Null auf ∞ fortsetzen läßt.

Wegen Kriterium 6.2 und Hilfssatz 6.3 genügt es deshalb zu zeigen, daß $H^1(X^0,\mathcal{G}_i^{-1})$ für alle i verschwindet.

Allgemeiner zeigen wir:

6.5. Theorem. *Gegeben sei ein n-Tupel ganzer Zahlen $(r_1,\ldots,r_n)\neq(0,\ldots,0)$. Wir betrachten folgendes Geradenbündel automorpher Formen. Sei U eine offene Teilmenge von X^0, $Y=p^{-1}(U)$ das Urbild in H^n. $\mathcal{G}(U)$ ist der Raum der holomorphen Funktionen $f\colon Y\to\mathbb{C}$, die folgendes Transformationsverhalten bei Substitutionen $\gamma\colon z\to\varepsilon z+a$ der Gruppe haben:*

$$f(\gamma z)=\varepsilon_1^{-r_1}\ldots\varepsilon_n^{-r_n}f(z).$$

Dann verschwinden die Kohomologiengruppen

$$H^\nu(X^0, \mathscr{G}); \qquad 1 \leqq \nu \leqq n-2.$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie die in [3] durchgeführte Bestimmung der Kohomologiegruppen des trivialen Bündels auf X^0.

Sei M der Vektorraum aller holomorphen Funktionen auf dem Halbraum H^n. Auf M operiert Γ folgendermaßen:

$$\gamma^{-1}: \; z \to \varepsilon z + a$$

sei eine Substitution aus Γ, f eine holomorphe Funktion auf dem Halbraum H^n

$$(\gamma f)(z) = \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n} f(\gamma z).$$

Es gilt:

$$H^\nu(X^0, \mathscr{G}) = H^\nu(\Gamma, M) = H^\nu(\Lambda, M^t).$$

M^t kann als Vektorraum gewisser Fourierreihen beschrieben werden:

$$f(z) = \sum_{g \in t^0} a_g e(g z).$$

Λ operiert auf M^t:

Das Element $\varepsilon^{-1} \in \Lambda$ werde durch die Substitution

$$z \to \varepsilon^{-1}(z+a)$$

aus Γ repräsentiert

$$(\varepsilon f)(z) = \sum_{g \in t^0} \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n} e(g a) a_{g\varepsilon} e(g z).$$

M^t zerfällt in eine direkte Summe des Λ-Moduls N aller Fourierreihen ohne konstanten Term und den Λ-Modul $\mathbb{C}$ der konstanten Funktionen. Man beachte, daß im Gegensatz zum Falle des in [3] behandelten trivialen Bündels Λ *nicht trivial* auf $\mathbb{C}$ operiert!

$$\varepsilon c = \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_n^{r_n} c.$$

Deshalb gilt

$$H^\nu(\Lambda, \mathbb{C}) = 0 \qquad \text{für alle } \nu.$$

Wörtlich wie in [3] folgert man das *Verschwinden* der Kohomologiegruppen $H^\nu(\Lambda, N)$ $1 \leqq \nu \leqq n-2$ aus der *Endlichkeit* [8] dieser Vektorräume.

Literatur

1. Bourbaki, N.: Elements de mathematique. Fas. XXXIV, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. V. Paris: Hermann 1968
2. Chevalley, C.: Séminaire: Groupes de Lie algebriques (1956/58)
3. Freitag, E.: Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. Inventiones math. 17, 106–134 (1972)

4. Hasse, H., Roquette, P.: Algebraische Zahlentheorie, Berichte aus dem Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, S. 53. Mannheim: Bibl. Institut
5. Lang, S.: Diophantine geometrie, chap. VIII, S. 142 – 162, Interscience tracts in pure and applied Math. New York: Interscience Publishers
6. Pjatecki-Shapiro: Geometry of classical domains and automorphic functions (russisch). Moskau: Fitzmatgiz 1961
7. Schur, I.: Vorlesungen über Invariantentheorie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
8. Trautmann, G.: Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie. Inventiones math. **8**, 143 – 174 (1969)

E. Freitag
R. Kiehl
D-6900 Heidelberg 1
Dantestraße 19
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 28. September 1973)