Zur Theorie der Modulformen zweiten Grades

Von *Eberhard Freitag* in Heidelberg

Vorgelegt von Herrn C. L. Siegel in der Sitzung vom 7. Mai 1965

Über den graduierten Ring der endlichen Summen von Modulformen n-ten Grades ist außer in den Fällen $n = 1, 2$ wenig bekannt. Im klassischen Fall $n = 1$ folgt aus den Eigenschaften der Diskriminante $\Delta(z)$ unmittelbar, daß jede Modulform als Polynom in den Eisensteinreihen vom Gewicht 4 und 6 darstellbar ist. Viel komplizierter gestaltet sich bereits der Fall $n = 2$. Hier bewies J. Igusa [3] zunächst unter Verwendung des bekannten Zusammenhangs zwischen den Moduln der Riemannschen Flächen vom Geschlecht zwei und den Modulfunktionen zweiten Grades, daß jede Modulform als Polynom in den Eisensteinreihen vom Gewicht 4, 6, 10, 12 darstellbar ist. Er machte dabei beträchtliche Anleihen aus der Invariantentheorie und algebraischen Geometrie. Kürzlich fand Igusa neben anderen interessanten Ergebnissen einen einfacheren Beweis dieses Satzes [4]. Immerhin wird neben der Kompaktifizierungstheorie von Satake noch die Theorie der Abelschen Funktionen verwendet. Es ist daher vielleicht nicht ohne Interesse, daß der Satz von Igusa auf völlig elementarem Wege gewonnen werden kann.

K. B. Gundlach behandelte in [2] das analoge Problem für den Fall der Hilbertschen Modulgruppe zum Zahlkörper $\mathsf{Q}(\sqrt{5})$. Er konstruierte mittels gewisser, von F. Götzky [1] untersuchter Thetareihen eine Modulform, deren Nullstellenmenge im Fundamentalbereich aus einer einzigen genau bekannten irreduziblen Mannigfaltigkeit besteht. Diese Form stellt ein Analogon zur Diskriminante $\Delta(z)$ dar, und sie spielt bei der Bestimmung der symmetrischen Modulformen dieselbe Rolle wie $\Delta(z)$ im rationalen Fall. In der vorliegenden Arbeit wird die Gundlachsche Methode auf den Fall der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades übertragen.

Angeregt wurde diese Arbeit durch eine Vorlesung von Professor Maaß im Wintersemester 1963/64.

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen

Große lateinische Buchstaben bezeichnen stets quadratische Matrizen. Der obere Index n bringt zum Ausdruck, daß $A^{(n)}$ eine n-reihige Matrix ist. E bzw. 0 wird für die n-reihige Einheits- bzw. Nullmatrix vorbehalten. Die verallgemeinerte obere Halbebene H_n sei der Bereich der symmetrischen komplexen Matrizen $Z = Z^{(n)} = X + iY$ mit positivem Imaginärteil Y. Die Modulgruppe n-ten Grades Γ_n besteht aus allen ganzzahligen Matrizen $M = M^{(2n)}$ mit

$$M' I M = I, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Γ_n operiert auf H_n vermöge

$$Z \to M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

als Gruppe analytischer Automorphismen.
Sei v ein Abelscher Charakter von Γ_n. Eine auf H_n definierte Funktion f heißt Modulform n-ten Grades vom Gewicht k zum Multiplikatorsystem v, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(Z)$ ist in H_n holomorph,
2. $f(M\langle Z\rangle) = v(M)\,|CZ + D|^k f(Z)$ für $M \in \Gamma_n$,
3. Im Falle $n = 1$ ist $f(Z)$ für $Y > Y_0 > 0$ beschränkt.

Bekanntlich ist 3. im Falle $n > 1$ eine Folge von 1. und 2. Der Vektorraum dieser Funktionen wird mit $[\Gamma_n, k, v]$ bezeichnet oder mit $[\Gamma_n, k]$, falls v das triviale Multiplikatorsystem $v = 1$ ist. Es sei hier bemerkt, daß es im Falle $n > 2$ kein, im Falle $n = 2$ genau ein nichttriviales Multiplikatorsystem gibt (s. etwa [5]).

§ 2. Die Funktion $\Theta(Z)$

Zu zwei reellen Spalten $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ definieren wir die Thetareihe:

$$\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{g}} e^{\pi i (Z[\mathfrak{g} + \mathfrak{a}] + 2\mathfrak{b}'\mathfrak{g})}; \; Z \in \mathsf{H}_2,$$

wobei allgemein $Z[\mathfrak{x}] = \mathfrak{x}' Z \mathfrak{x}$ gesetzt werde.

Dabei durchlaufe $\mathfrak{g}$ alle ganzen Spalten $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$. Im folgenden mögen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ den Bedingungen

$$2\mathfrak{a} \equiv 2\mathfrak{b} \equiv 0 \pmod 1, \quad 2\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \equiv 0 \pmod 1$$

genügen. Das Produkt der dadurch bestimmten zehn Thetareihen wird mit $\Theta(Z)$ bezeichnet.

Wir formulieren die wesentlichen Eigenschaften von $\Theta(Z)$ in

Satz 1:

(1) $\Theta(Z)$ *ist eine Modulform zweiten Grades vom Gewicht* 5 *zum nichttrivialen Multiplikatorsystem v:*

$$\Theta(Z) \in [\Gamma_2, 5, v]$$

(2) $\Theta(Z)$ *verschwindet auf der Mannigfaltigkeit*

$$\mathsf{N} = \left\{Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{H}_2;\quad z_1 = 0\right\}$$

in erster Ordnung und jede Nullstelle von $\Theta(Z)$ *ist einem Punkt in* N *bezüglich der Modulgruppe äquivalent.*

(3) *Ist* $f(Z) \in [\Gamma_2, 2k]$ *bzw.* $[\Gamma_2, 2k, v]$ *und* $f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \equiv 0$, *so ist*

$$f(Z)/\Theta^2(Z) \in [\Gamma_2, 2k-10] \quad \textit{bzw.} \quad [\Gamma_2, 2k-10, v].$$

Beweis.

(1) ist für ein endliches Erzeugendensystem von Γ_2([7]) auf Grund bekannter Thetatransformationsformeln leicht nachzuweisen.

(3) folgt aus (2), da jede Form ungerader Dimension (gleich zu welchem Multiplikatorsystem) auf $z_1 = 0$ verschwindet. Man hat dabei

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & -z_1 \\ -z_1 & z_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \end{array}\right) = 1$$

zu beachten.

(2) wird mittels einer direkten Abschätzung der Thetareihen $\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ im Fundamentalbereich der Modulgruppe bewiesen. Es ist leicht zu sehen, daß der bekannte Siegelsche Fundamentalbereich F_2 in folgendem Bereich B enthalten ist.

$Z = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{B}$ soll heißen, daß

$$0 \leq 2y_1 \leq y_0 \leq y_2, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leq y_0, \quad -\tfrac{1}{2} \leq x_\nu \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2$$

gilt. Es ist zu beachten, daß $z_0 \in \mathsf{F}_1$ aus $\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{F}_2$ folgt.

Wir schätzen die zehn Thetareihen $\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in B ab.

1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$: $\vartheta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = \sum\limits_{g_1, g_2} (-1)^{2\mathfrak{b}'\mathfrak{g}}\, e^{\pi i(z_0 g_1^2 + 2z_1 g_1 g_2 + z_2 g_2^2)}$.

Dabei ist über alle ganzen Zahlen g_1, g_2 zu summieren. Wir bringen das Glied zu $g_1 = g_2 = 0$ auf die linke Seite und schätzen den Rest durch die Betragsreihe ab. Es sind dann zweckmäßig noch die Glieder mit $g_1^2 + g_2^2 = 1$ aus der Summe herauszuziehen.

$$|\vartheta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) - 1| \leqq -1 + 2e^{-\pi y_0} + 2e^{-\pi y_2} + \sum_{g_1^2 + g_2^2 \neq 1} e^{-\pi y_0 g_1^2 - \pi y_2 g_1^2 - 2\pi y_1 g_1 g_2}$$

Aus $2y_1 \leq y_0, y_2$ folgt:

$$-2y_1 g_1 g_2 \leqq -y_1 (g_1 + g_2)^2 + \frac{y_0}{2} g_1^2 + \frac{y_2}{2} g_2^2 .$$

Hieraus und aus $y_1 \geq 0$; $y_0, y_2 \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ergibt sich

$$|\vartheta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) - 1| \leq -1 + 4e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} + \sum_{g_1^2 + g_2^2 \neq 1} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{3}(g_1^2+g_2^2)} .$$

Auf der rechten Seite dieser Ungleichung steht eine von Z unabhängige Zahl. Eine numerische Rechnung zeigt, daß diese reichlich kleiner als 1 ist. Es ist also sicher

$$\vartheta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) \neq 0 \quad \text{für} \quad Z \in \mathbf{B}.$$

2. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vartheta\left(Z;\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix};\ \mathfrak{b}\right) e^{-\pi i Z[\mathfrak{a}]} = \sum_{g_1, g_2} (-1)^{2\mathfrak{b}'\mathfrak{g}} e^{\pi i (z_0 g_1(g_1+1) + z_1 g_2(2g_1+1) + z_2 g_2^2)}$.

Man ziehe die Glieder zu $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ und $g_1 = -1$, $g_2 = 0$ auf die linke Seite und schätze den Rest durch die Betragsreihe ab. Mittels der Identität

$$\pi y_1 g_2(2g_1 + 1) = \pi y_1(g_1 + g_2 + 1)(g_1 + g_2) - \pi y_1 g_1(g_1 + 1) - \pi y_1 g_2^2$$

folgt ähnlich wie im Falle 1.

$$\left|\vartheta\left(Z;\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{b}\right) e^{-\pi i Z[\mathfrak{a}]} - 2\right| \leq -2 + \sum_{g_1, g_2} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{3}\, g_1(g_1+1) - \frac{\pi}{4}\sqrt{3}\, g_2^2} < 2$$

also $\vartheta\left(Z;\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{b}\right) \neq 0$ für $Z \in \mathbf{B}$ und analog $\vartheta\left(Z;\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathfrak{b}\right) \neq 0$ für $Z \in \mathbf{B}$.

Es bleibt der Fall $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\mathfrak{b} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon = 0$ oder 1 zu untersuchen. Eine einfache Umformung der Thetareihe zeigt:

$$e^{-\pi i Z[\mathfrak{a}] + \pi i z_1} \vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) =$$
$$2 \sum_{g_1, g_2 \geq 0} (-1)^{\varepsilon(g_1+g_2)} e^{\pi i g_1(g_1+1)(z_0 - z_1) + \pi i g_2(g_2+1)(z_2 - z_1)} \{e^{\pi i (g_1+g_2+1)^2 z_1} + (-1)^\varepsilon e^{\pi i (g_2 - g_1)^2 z_1}\}.$$

Nachdem man die Gleichung durch $2(1 + (-1)^\varepsilon e^{\pi i z_1})$ dividiert hat, bringe man das zu $g_1 = g_2 = 0$ gehörige Glied auf die linke Seite und schätze den Rest durch die Betragsreihe ab.

$$\left| \frac{\vartheta(Z;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{2e^{\pi i (Z[\mathfrak{a}] - z_1)}(1 + (-1)^\varepsilon e^{\pi i z_1})} - (-1)^\varepsilon \right| \leq$$
$$-1 + \sum_{g_1, g_2 \geq 0} \{e^{-\pi g_1(g_1+1)(y_0 - y_1) - \pi g_2(g_2+1)(y_2 - y_1)} \sum_{n=0}^{(2g_1+1)(2g_2+1)-1} e^{-\pi n y_1}\}.$$

Dabei ist

$$e^{\pi i (g_1+g_2+1)^2 z_1} + (-1)^\varepsilon e^{\pi i (g_1 - g_2)^2 z_1}$$
$$= e^{\pi i (g_1 - g_2)^2 z_1}(1 + (-1)^\varepsilon e^{\pi i z_1})(-1)^\varepsilon \sum_{n=0}^{(2g_1+1)(2g_2+1)-1} (-1)^{n(\varepsilon-1)} e^{\pi i n z_1}$$

verwendet worden.

Ist $Z \in \mathsf{B}$, so folgt unmittelbar:

$$\left|\frac{\vartheta(Z;\, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{2\, e^{\pi i (Z[\mathfrak{a}] - z_1)}\,(1 + (-1)^{\varepsilon}\, e^{\pi i z_1})} - (-1)^{\varepsilon}\right| \leq -1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4} n(n+1)}\,(2n+1)\right)^2 < 1.$$

Es zeigt sich somit, daß

$$\vartheta\left(Z;\, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix};\, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad z_1^{-1}\, \vartheta\left(Z;\, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right) \text{ in } \mathsf{B}$$

nirgends verschwindende holomorphe Funktionen sind. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3. Der Satz von Igusa

Im folgenden werden nur Modulformen geraden Gewichts zum trivialen Multiplikatorsystem betrachtet. Die Abbildung $(z_0, z_2) \to \begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ definiert eine Einbettung von $\mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_1$ in H_2. Wir bestimmen die Funktionen auf $\mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_1$, die man durch Beschränkung von Modulformen zweiten Grades erhält.

Es sei f eine Modulform zweiten Grades vom Gewicht k. Nach Witt [7] gilt eine Relation der Art:

$$f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \sum f_i(z_0)\, h_i(z_2)$$

mit elliptischen Modulformen f_i, h_i ebenfalls vom Gewicht k. Beachtet man, daß die elliptischen Modulformen von den Eisensteinreihen g_2 und g_3 erzeugt werden und verwendet man die Symmetrierelation $f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & z_0 \end{pmatrix}$, so folgt, daß $f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ linear aus den Termen

$$g_2^{\nu}(z_0)\, g_3^{\mu}(z_0)\, g_2^{\alpha}(z_2)\, g_3^{\beta}(z_2) + g_2^{\alpha}(z_0)\, g_3^{\beta}(z_0)\, g_2^{\nu}(z_2)\, g_3^{\mu}(z_2)$$

mit der Nebenbedingung $4\nu + 6\mu = 4\alpha + 6\beta = k$ kombiniert werden kann. Zieht man aus diesen Termen geeignete Potenzen von

$$g_2(z_0)\, g_2(z_2), \quad g_3(z_0)\, g_3(z_2)$$

heraus, so zeigt sich, daß $f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ als isobares Polynom in

$$g_2(z_0)\, g_2(z_2), \quad g_3(z_0)\, g_3(z_2), \quad g_2^{a}(z_0)\, g_3^{b}(z_2) + g_3^{b}(z_0)\, g_2^{a}(z_2)$$

mit $4a = 6b$ dargestellt werden kann. Der letzte Term kann wegen der Exponentenrelation in der Form

$$\left(g_2^3(z_0)\, g_3^2(z_2)\right)^h + \left(g_3^2(z_0)\, g_2^3(z_2)\right)^h$$

geschrieben werden. Zieht man hiervon

$$\left(g_2^3(z_0)\, g_3^2(z_2) + g_3^2(z_0)\, g_2^3(z_2)\right)^h$$

ab, so sieht man, etwa mittels vollständiger Induktion, daß $f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ als isobares Polynom in

$$g_2(z_0)\, g_2(z_2), \quad g_3(z_0)\, g_3(z_2), \quad g_2^3(z_0)\, g_3^2(z_2) + g_3^2(z_0)\, g_2^3(z_2)$$

darstellbar ist. Diese drei Funktionen können leicht zu Modulformen zweiten Grades fortgesetzt werden. Es bieten sich etwa die Eisensteinreihen G_4, G_6, G_{12} an. Man hat zu zeigen, daß in der Relation

$$G_{12}\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = c_1\left(g_2(z_0)\, g_2(z_2)\right)^3 + c_2\left(g_3(z_0)\, g_3(z_2)\right)^2 + c_3\left(g_2^3(z_0)\, g_3^2(z_2) + g_3^2(z_0)\, g_2^3(z_2)\right)$$

der Koeffizient c_3 von Null verschieden ist. Wäre dies nicht der Fall, so würde $G_{12}(Z) - c_1 G_4^3(Z) - c_2 G_6^2(Z)$ auf $z_1 = 0$ verschwinden und folglich durch $\Theta^2(Z)$ teilbar sein. Hieraus würde $G_{12}(Z) = c_1 G_4^3(Z) + c_2 G_6^2(Z)$ folgen, was jedoch durch eine Rechnung mit bekannten Werten der Fourierkoeffizienten [3] dieser Reihen widerlegt werden kann. Es sei hier noch bemerkt, daß diese etwas mühselige Rechnung mit Fourierkoeffizienten vermieden werden kann, wenn man statt der Eisensteinreihen geeignete Kombinationen der zehn Thetareihen zur Fortsetzung dieser drei Funktionen verwendet (vergleiche [4]).

Wir erhalten damit das folgende

Lemma: Ist $f(Z)$ eine Modulform zweiten Grades, so verschwindet $g(Z) = f(Z) - P\left(G_4(Z), G_6(Z), G_{12}(Z)\right)$ für ein geeignetes Polynom P auf $z_1 = 0$. $g(Z)$ ist somit durch $\Theta^2(Z)$ teilbar.

Wiederholte Anwendung dieser Reduktion liefert

Satz 2: *Jede Modulform zweiten Grades ist als isobares Polynom in*

$$G_4(Z), G_6(Z), \Theta^2(Z), G_{12}(Z)$$

darstellbar.

Insbesondere gilt:

$$G_{10}(Z) = c_1 G_4(Z) G_6(Z) + c_2\, \Theta^2(Z).$$

Eine Rechnung mit Fourierkoeffizienten ergibt $c_1 = 1$ und $c_2 \neq 0$, also

$$\Theta^2(Z) = c\left(G_{10}(Z) - G_4(Z) G_6(Z)\right)$$

und damit den wichtigen

Satz 3 (Igusa): *Alle Modulformen zweiten Grades sind als isobare Polynome in den Eisensteinreihen*

$$G_4(Z), \quad G_6(Z), \quad G_{10}(Z), \quad G_{12}(Z)$$

darstellbar.

Jede Modulfunktion n-ten Grades, d.h. jede unter Γ_n invariante in H_n meromorphe Funktion, die im Falle $n = 1$ noch einer Meromorphieforderung im Unendlichen genügt, ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts. Daher ist jede Modulfunktion zweiten Grades als rationale Funktion in den speziellen Modulfunktionen

$$G_4^{\nu_1} G_6^{\nu_2} G_{10}^{\nu_3} G_{12}^{\nu_4} \quad (\nu_1, \ldots, \nu_4 \text{ ganz}; \; 4\nu_1 + 6\nu_2 + 10\nu_3 + 12\nu_4 = 0)$$

darstellbar.

Für $4\nu_1 + 6\nu_2 + 10\nu_3 + 12\nu_4 = 0$ bestätigt man leicht die Identität

$$\left(\frac{G_4 G_6}{G_{10}}\right)^{\nu_2 + 2\nu_4} \left(\frac{G_6^2}{G_{12}}\right)^{-\nu_4} \left(\frac{G_4^5}{G_{10}^2}\right)^{\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 + 2\nu_4} = G_4^{\nu_1} G_6^{\nu_2} G_{10}^{\nu_3} G_{12}^{\nu_4}.$$

Damit resultiert in etwas anderer Form der Satz von Igusa über die Rationalität des Körpers der Modulfunktionen zweiten Grades:

Satz 4: *Die Modulfunktionen zweiten Grades bilden einen rationalen Funktionenkörper mit den Erzeugenden:*

$$\frac{G_4 G_6}{G_{10}}; \; \frac{G_6^2}{G_{12}}; \; \frac{G_4^5}{G_{10}^2}.$$

Die algebraische Unabhängigkeit dieser drei Funktionen ist gesichert, da der Körper den Transzendenzgrad drei hat.

Literatur

[1] Götzky, F.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. 100, 411—437 (1928).

[2] Gundlach, K. B.: Funktionen zur Modulgruppe von $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. 152, 226—256 (1963).

[3] Igusa, J.: On Siegel Modular Forms of Genus Two. Amer. J. Math. 84, 306—316 (1962).

[4] Igusa, J.: On Siegel Modular Forms of Genus Two. (II). Amer. J. Math. 86, 392—412 (1964).

[5] Maaß, H.: Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Klasse 1964, Nr. 11.

[6] Siegel, C. L.: Über die algebraische Abhängigkeit von Modulfunktionen n-ten Grades. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Klasse 1960, Nr. 12.

[7] Witt, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Hansische Universität 14, 323—337 (1941).