Math. Nachr. **170** (1994) 101–126

Hilbert-Siegelsche singuläre Modulformen

Von Eberhard Freitag in Heidelberg

(Eingegangen am 29. 11. 1993)

Einleitung

Ein Hauptziel der Theorie der (holomorphen) singulären Modulformen ist es, singuläre Modulformen auf Tubengebieten als Linearkombinationen von Thetareihen darzustellen und die zwischen den benötigten Thetareihen bestehenden linearen Relationen (Thetarelationen) zu beschreiben, so daß man beispielsweise Dimensionsformeln für Vektorräume singulärer Modulformen erhält. „Singulär" bedeutet hierbei, daß die Fourierkoeffizienten vom Rand des zugrundeliegenden positiven Kegels getragen werden. Man weiß, daß dies genau dann der Fall ist, wenn das Gewicht der Modulform genügend klein ist. Im Falle der Siegelschen Modulgruppe und ihrer Kongruenzuntergruppen bedeutet dies die Ungleichung $r < n$, wobei $r/2$ das Gewicht und n den Grad bezeichne. Dieses Programm ist in [Fr2] weitgehend in allgemeinster Form durchgeführt, allerdings mit der lästigen Einschränkung $2r \leq n$, welche sich aufheben läßt, wenn ein gewisses elementares (in [Fr2] „fundamental lemma" genanntes) Lemma ohne diese Einschränkung bewiesen wird.

In dieser Arbeit soll ein Schritt in Richtung der Verallgemeinerung auf beliebige Tubengebiete getan werden. Es wird die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe zu einem total reellen Zahlkörper, genauer ein kofinales System von Kongruenzuntergruppen, betrachtet. Im Prinzip werden damit beliebige Kongruenzuntergruppen zugelassen. Abweichend von [Fr2] beschränken wir uns auf skalarwertige Modulformen und auf solche ganzen Gewichts ($r \equiv 0 \bmod 2$). Dies scheint angemessen zu sein, da in dieser Arbeit vor allem gezeigt werden soll, wie man die Schwierigkeiten, welche durch die Nichttrivialität der Klassenzahl auftreten, überwinden kann. Unter den genannten Voraussetzungen, einschließlich der Voraussetzung $2r \leq n$, beweisen wir einen Darstellungssatz für Hilbert-Siegelsche Modulformen als Linearkombination von Thetareihen, wobei auch die zwischen diesen Thetareihen bestehenden Relationen beschrieben werden können.

1. Hilbert-Siegelsche Modulformen und Thetareihen

Sei $K \supset \mathbb{Q}$ ein total reeller Zahlkörper vom Grad m. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_K$ den Ring der ganz algebraischen Zahlen in K. Die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades ist die symplektische Gruppe n-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbf{o}_K$,

$$\Gamma_n = \Gamma_{n,K} = \mathrm{Sp}\,(n, \mathbf{o}_K).$$

Sei q eine natürliche Zahl. Die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q ist

$$\Gamma_n[q] = \Gamma_{n,K}[q] = \mathrm{Kern}\,(\mathrm{Sp}\,(n, \mathbf{o}) \to \mathrm{Sp}\,(n, \mathbf{o}/(q))).$$

Da $\mathbf{o}/(q)$ ein endlicher Ring ist, ist sie ein Normalteiler von endlichem Index in Γ_n.

Wir bezeichnen mit

$$K \to \mathbb{R},$$
$$a \mapsto a^{(\nu)}; \qquad 1 \le \nu \le m,$$

die m verschiedenen Einbettungen von K in den Körper der reellen Zahlen und fassen sie zu einer Einbettung

$$K \to \mathbb{R}^m,$$
$$a \mapsto (a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}),$$

zusammen. Bekanntlich ist $\mathbf{o}$ (genauer das Bild von $\mathbf{o}$) ein Gitter in $\mathbb{R}^m$. Die Einbettung von K in $\mathbb{R}^m$ induziert eine Einbettung

$$\mathrm{Sp}\,(n, K) \to \mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R}) \times \ldots \times \mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R}),$$
$$M \mapsto (M^{(1)}, \ldots, M^{(m)}).$$

Insbesondere kann die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe als (diskrete) Untergruppe von $\mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R}) \times \ldots \times \mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R})$ aufgefaßt werden. In diesem Zusammenhang ist es von Vorteil, $\mathbb{R}^n$, allgemeiner $\mathbb{C}^n$, als Ring aufzufassen (komponentenweise Addition und Multiplikation). Wir benötigen die Funktionen Norm und Spur,

$$\mathcal{N}: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}, \qquad \mathcal{N}(z) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_m,$$
$$\mathcal{S}: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}, \qquad \mathcal{S}(z) = z_1 + \ldots + z_m.$$

Ihre Einschränkungen auf K sind die übliche Norm und Spur des Zahlkörpers K. Norm und Spur einer (ganz) algebraischen Zahl sind (ganz) rational. Die Spur einer Matrix A bezeichnen wir mit $\mathrm{tr}\,(A)$ und ihre Determinante mit $\det\,(A)$.

Wir identifizieren häufig m-Tupel von Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ mit Matrizen, deren Koeffizienten in $\mathbb{C}^m$ liegen. Für solche Matrizen müssen wir die Funktionen

$$\mathrm{Det} := \mathcal{N} \det: (\mathbb{C}^m)^{(n,n)} \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Det}\,(A) = \det\,(A_1) \cdot \ldots \cdot \det\,(A_m),$$
$$\mathrm{Tr} := \mathcal{S}\,\mathrm{tr}: (\mathbb{C}^m)^{(n,n)} \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A_1) + \ldots + \mathrm{tr}\,(A_m),$$

betrachten.

Die Gruppe

$$\mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R}^m) = \mathrm{Sp}\,(n, \mathbb{R})^m$$

operiert auf dem kartesischen Produkt von m Siegelschen Halbräumen komponentenweise,

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)\,(CZ + D)^{-1} = (M_1\langle Z_1\rangle, \ldots, M_m\langle Z_m\rangle).$$

Insbesondere operiert die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe auf $\mathbf{H}_n^m$.

Definition 1.1. Sei r eine gerade ganz rationale Zahl. Eine *Hilbert-Siegelsche Modulform vom Gewicht $r/2$ der Stufe q* ist eine holomorphe Funktion

$$f: \mathbf{H}_n^m \to \mathbb{C}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z\rangle) = \operatorname{Det}(CZ + D)^{r/2} f(Z)$$

für alle $M \in \Gamma_{n,K}[q]$.

Im Falle $n = m = 1$ ist noch die Regularität in den Spitzen zu fordern.

Wir bezeichnen mit

$$[\Gamma_{n,K}[q], r/2]$$

den Vektorraum dieser Modulformen. Wichtige Beispiele für Modulformen liefern Thetareihen zu total positiven quadratischen Formen. Eine Zahl aus K heißt total positiv, falls alle m Konjugierten positiv sind, in Zeichen

$$a \succ 0 \Leftrightarrow a^{(1)} > 0, \ldots, a^{(m)} > 0 .$$

Eine symmetrische Matrix S mit Koeffizienten aus K heißt total (semi-) positiv, falls alle m Konjugierten (semi-) positiv sind (im Sinne quadratischer Formen), in Zeichen

$$S \succ 0 \Leftrightarrow S^{(1)} > 0, \ldots, S^{(m)} > 0 ,$$

$$S \succeq 0 \Leftrightarrow S^{(1)} \geq 0, \ldots, S^{(m)} \geq 0 .$$

Seien nun $S = S^{(r)} = S' \succ 0$ eine total positive Matrix mit Koeffizienten aus K und $G = G^{(r,n)}$ eine $r \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus K. Ist $Z \in \mathbf{H}_n^m$, so können wir $S[G]Z = G'SGZ$ betrachten. Dies ist eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus dem Ring $\mathbb{C}^m$. Für eine beliebige $n \times n$-Matrix $A = (A_1, \ldots, A_m)$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}^m$ definieren wir

$$e(A) := \exp \pi i \operatorname{Tr}(A) = \exp \pi i \{\operatorname{tr}(A_1) + \ldots + \operatorname{tr}(A_m)\} .$$

Definition 1.2. Gegeben seien

a) eine total positive Matrix $S = S^{(r)} = S' \succ 0$ mit Koeffizienten aus K,

b) eine Matrix $V \in K^{(r,n)}$,

c) ein $\mathbf{o}$-Gitter $\mathscr{L} \subset K^r$, d. h. ein endlich erzeugter $\mathbf{o}$-Untermodul von K^r, welcher K^r als Vektorraum erzeugt.

Diesen Daten ordnen wir die Thetareihe

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S; Z) = \sum_{\langle G\rangle \subset \mathscr{L}} e(S[G]Z + 2V'G)$$

zu. Dabei bedeute $\langle G\rangle$ den von den Spalten von G erzeugten $\mathbf{o}$-Modul.

Die Summationsbedingung $\langle G\rangle \subset \mathscr{L}$ bedeutet also, daß über alle $r \times n$-Matrizen G zu summieren ist, deren Spalten in dem Gitter $\mathscr{L}$ enthalten sind. Diese Reihen konvergieren in $\mathbf{H}_n^m$ absolut und lokal gleichmäßig, stellen dort also holomorphe Funktionen dar.

Satz 1.3. *Zu gegebenem S, V, $\mathscr{L}$ existiert eine natürliche Zahl q mit*

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S; Z) \in [\Gamma_{n,K}[q], r/2] .$$

(Wir erinnern daran, daß wir uns auf gerade r beschränken.) Der Beweis dieses Satzes ist als „Standard“ anzusehen, man kann ihn durch Diagonalisieren von S auf den Fall $S = (1)$ zurückführen und ihn dann beispielsweise mittels modularer Einbettungen auf den ausgiebig untersuchten rationalen Fall zurückführen.

Wir benötigen die Thetainversionsformel, allerdings für den (scheinbar) allgemeineren Typ von Thetareihe:

Definition 1.4. Gegeben seien
a) eine total positive Matrix $S = S^{(r)} = S' \succ 0$ mit Koeffizienten aus K,
b) ein Paar von Matrizen $U, V \in (\mathbb{C}^m)^{(r,n)}$,
c) ein $\mathfrak{o}$-Gitter $\mathscr{L} \subset K^r$.
Diesen Daten ordnen wir die Thetareihe

$$\vartheta_{\mathscr{L}}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}(S; Z) = \sum_{\langle G\rangle \subset \mathscr{L}} e(S[G + U]\, Z + 2V'G)$$

zu.

Vergleich mit 1.2 zeigt

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S; Z) = \vartheta_{\mathscr{L}}\begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}(S; Z).$$

Die angekündigte Thetainversionsformel lautet:

Hilfssatz 1.5. *Es gilt*

$$\vartheta_{\mathscr{L}}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}(S^{-1}; Z^{-1})$$
$$= e(2U'V) \operatorname{vol}(\mathscr{L})^n \operatorname{Det}(S)^{n/2} \operatorname{Det}(Z/i)^{r/2}\, \vartheta_{\mathscr{L}^*}\begin{bmatrix} -V \\ U \end{bmatrix}(S; Z).$$

Dabei bezeichnet

$$\mathscr{L}^* := \{a \in K^r;\ \mathscr{S}(a'x) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in \mathscr{L}\}$$

das zu $\mathscr{L}$ *reziproke Gitter und* $\operatorname{vol}(\mathscr{L})$ *das Euklidische Volumen einer Fundamentalmasche des Gitters* $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^r$.

Der Beweis erfolgt wie üblich mittels des Poissonschen Summationsverfahrens.

Wir untersuchen etwas genauer das Periodizitätsverhalten von Thetareihen und ihrer Transformierten. Dazu führen wir ein gewisses Gitter $\mathscr{T} = \mathscr{T}_K$ im Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K ein. Es ist durch

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}^{(n)} = \{T = T' \in K^{(n,n)};\ \operatorname{Tr}(TH) \equiv 0 \bmod 2 \text{ für alle } H = H' \in \mathfrak{o}^{(n,n)}\}$$

definiert. Offensichtlich besteht $\mathscr{T}$ aus allen Matrizen, deren Einträge in der reziproken Differente $\mathfrak{o}^*$ und deren Diagonalelemente sogar in $2\mathfrak{o}^*$ enthalten sind. Die Bedeutung des Gitters $\mathscr{T}$ liegt darin, daß Modulformen der Stufe q Fourierentwicklungen

$$f(Z) = \sum_{qT \in \mathscr{T}} a(T)\, e(TZ)$$

besitzen. Die Thetareihen

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S;Z) = \sum_{\langle G\rangle \subset \mathscr{L}} e(S[G]\,Z + 2V'G)$$

haben dasselbe Periodizitätsverhalten, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$qS[G] \in \mathscr{T} \quad \text{für} \quad \langle G\rangle \subset \mathscr{L}\,.$$

Wir nutzen nun aus, daß die Hauptkongruenzgruppe ein Normalteiler in der vollen Modulgruppe ist. Die Letztere operiert infolgedessen auf $[\Gamma_{n,K}[q], r/2]$ vermöge

$$f \mid M(Z) = \operatorname{Det}(CZ + D)^{-r/2} f(M\langle Z\rangle)\,.$$

Mittels der Thetainversionsformel erhalten wir nun:

Bemerkung 1.6. Die beiden Funktionen

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S;Z)\,, \qquad \det(Z)^{-r/2}\,\vartheta_{\mathscr{L},V}(S;-Z^{-1})$$

sind invariant unter Substitutionen

$$Z \mapsto Z + H\,; \qquad H = H' \in q\mathfrak{o}^{(n,n)}\,,$$

$$Z \mapsto Z[U]\,; \qquad U \in \mathrm{SL}(n,\mathfrak{o})\,, \qquad U \equiv E \bmod q\,,$$

falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
1) $q\langle V\rangle \subset \mathscr{L}^*$.
2) $qS[G] \in \mathscr{T}$, falls $\langle G\rangle \subset \mathscr{L}$,
$qS^{-1}[G + V] \in \mathscr{T}$, falls $\langle G\rangle \subset \mathscr{L}^*$.

Bemerkung 1.7. Das System der durch die Bedingungen 1), 2) aus 1.6 definierten Thetareihen ist endlich. Insbesondere erzeugen sie einen endlichdimensionalen Vektorraum $\Theta = \Theta(q) = \Theta_K(n, r, q)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß das System bei festgehaltenem Gitter $\mathscr{L}$ endlich ist. Zunächst einmal ist klar, daß man V modulo $\mathscr{L}^*$ abändern darf, ohne die Thetareihe zu verändern. Es kommt also nur auf ein endliches Vertretersystem von Matrizen V an. Außerdem kann man eine unimodulare Transformation $S \mapsto S[U]$, $U \in \mathrm{GL}(r, \mathfrak{o})$, über den Summationsindex auf V abwälzen. Es genügt also, wenn S ein Vertretersystem der unimodularen Klassen von Matrizen S durchläuft. Aus den Bedingungen 1) und 2) in 1.6 ergibt sich leicht eine Nennerbeschränkung von $\operatorname{Det} S$ und $\operatorname{Det} S^{-1}$. Die Behauptung ergibt sich nun aus der Tatsache, daß es nur endlich viele Klassen ganzer positiver Matrizen gegebener Reihenzahl und gegebenem $\operatorname{Det} S$ gibt. (Dies folgt aus der Humbertschen Verallgemeinerung der Minkowskischen Reduktionstheorie auf den Zahlkörperfall.)

Wir betrachten nun alle möglichen Gitter $\mathscr{L} \subset K^r$. Auf der Menge dieser Gitter operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(r, K)$. Bekanntlich zerfällt die Menge aller $\mathfrak{o}$-Gitter unter dieser Operation in endlich viele Bahnen. Im Fall $r = 1$ ist dies genau die Aussage über die Endlichkeit der Klassenzahl von K. Den Übergang von $\mathscr{L}$ auf ein transformiertes Gitter kann man in der Thetareihe auf den Summationsindex abwälzen. Man kommt also mit einem endlichen System von Gittern aus und erhält insgesamt nur endlich viele Thetareihen.

Im Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ kann man jedes Gitter in $\mathbb{Z}^r$ transformieren. Man muß also nur die Thetareihen

$$\vartheta_{\mathscr{L},V}(S;Z) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(r,n)}} e(S[G]\,Z + 2V'G)$$

betrachten. Die Bedingungen 1), 2) aus 1.6 besagen dann:

a) qV ist ganz.
b) qS ist eine gerade Matrix, das heißt, sie ist ganz und ihre Diagonaleinträge sind gerade.
c) $qS^{-1}[V + X]$ ist gerade für ganze X.

Eine ähnliche Situation wurde in [Fr2] behandelt. Dort wurden allerdings die Igusaschen Kongruenzgruppen anstelle den Hauptkongruenzgruppen zugrunde gelegt, was eine kleine Modifikation bedeutet (die Bedingung „gerade“ ist durch „ganz“ zu ersetzen).

Eine naheliegende Frage besagt:

Problem 1.8. Gilt

$$[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \subset \Theta \quad \text{(s. 1.7)?}$$

Im Falle $n = m = 1$ ist die Antwort negativ, wie aus der Existenz gewisser elliptischer Modulformen folgt, welche nicht abelschen Artinschen L-Reihen zugeordnet sind [DS], [La]. In dieser Arbeit beweisen wir, daß die Antwort im Falle $2r \leq n$ positiv ist. Im Falle des rationalen Grundkörpers wurde diese Theorie in [Fr2] allgemeiner für vektorwertige Modulformen auch halbganzen Gewichts durchgeführt. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, wie man gewisse Schwierigkeiten im Falle der Klassenzahl größer als 1 überwinden kann.

2. Singuläre Modulformen

Eine wichtige Eigenschaft von Modulformen der Stufe q ist ihre Periodizität, sie sind als Fourier-Reihen

$$f(Z) = \sum_T a(T)\,e(TZ)$$

darstellbar, wobei über ein von der Stufe abhängiges $\mathfrak{o}$-Gitter zu summieren ist. Der sogenannte Koecher-Effekt besagt

$$a(T) \neq 0 \Rightarrow T \geq 0\,.$$

Ein Satz aus der Theorie der singulären Modulformen besagt:

Satz 2.1. *Sei*

$$f(Z) = \sum_T a(T)\,e(TZ)$$

eine Modulform vom Gewicht $r/2$, $r < n$, dann gilt

$$a(T) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } T \leq r\,.$$

Zusatz. *Wenn die Modulform f nicht identisch verschwindet, so existiert ein T mit*

$$a(T) \neq 0\,, \qquad \text{Rang}\ T = r\,.$$

Der Beweis kann wie im rationalen Fall erfolgen, s. z. B. [Fr1], Anhang 2. (In der Arbeit [Re] versucht RESNIKOFF, diesen Satz auf beliebige Tubengebiete mittels der Sprache der Jordanalgebren zu verallgemeinern. Die Arbeit enthält jedoch wesentliche Lücken, die allerdings nicht den hier vorliegenden Fall betreffen.) Ein anderer mehr darstellungstheoretisch orientierter Beweis stammt von HARRIS [Ha]. Ein weiterer Zugang zu dieser Theorie stammt von HOWE [Ho].

Die Klassifikation der Gewichte singulärer Modulformen legt es nahe, folgenden Raum von Fourierreihen einzuführen:

Definition 2.2. Der Raum

$$\mathbf{P}(q) = \mathbf{P}_K(r, n, q)$$

besteht aus allen in $\mathbf{H}_n^m$ konvergenten Fourierreihen

$$f(Z) = \sum a(T)\, e(TZ)$$

mit folgenden Eigenschaften

1) $a(T) \neq 0 \Rightarrow qT \in \mathcal{T}$.
2) $a(T) \neq 0 \Rightarrow T \succeq 0$.
3) $a(T) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}\ T \leq r$.
4) $a(T[U]) = a(T)$ für alle $U \in \text{SL}\,(n, \mathfrak{o}_K)$; $U \equiv E \bmod q$.

Diese Räume sind filtriert,

$$\mathbf{P}(r-1, n, q) \subset \mathbf{P}(r, n, q)\,,$$

wir können daher die sukzessiven Quotienten betrachten

$$\overline{\mathbf{P}(q)} := \mathbf{P}(r, n, q)/\mathbf{P}(r-1, n, q)\,.$$

Bemerkung 2.3. Es gilt
1a) $[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \subset \mathbf{P}(q)$,
1b) $\Theta(q) \subset \mathbf{P}(q)$.
Die natürlichen Abbildungen
2a) $[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \to \overline{\mathbf{P}(q)}$,
2b) $\Theta(q) \to \overline{\mathbf{P}(q)}$
sind injektiv.

Die Aussagen 1a) und 2a) sind äquivalent mit Satz 2.1. Die Aussage 1b) ist evident, 2b) folgt ebenfalls aus Satz 2.1 in Verbindung mit der Tatsache, daß die Thetareihen Modulformen irgendeiner Stufe sind.

Um gewisse Schwierigkeiten überwinden zu können, welche durch die Klassenzahl von K entstehen, müssen wir neben $\mathfrak{o}$ auch die Lokalisierungen dieses Rings nach Primstellen von K (Primidealen von $\mathfrak{o}$) betrachten. Diese sind diskrete Bewertungsringe, insbesondere Hauptidealringe. Wir bezeichnen die Lokalisierung von $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_K$ nach einem (von 0 verschiedenen) Primideal $\mathbf{p}$ mit

$$\mathbf{o}_\mathbf{p} = \left\{\frac{a}{b};\ a \in \mathbf{o};\ b \in \mathbf{o} - \mathbf{p}\right\}.$$

Ein Element $a \in K$ heißt ganz an der Stelle $\mathbf{p}$, falls es in $\mathbf{o}_\mathbf{p}$ enthalten ist. Eine Matrix mit Koeffizienten aus K heißt ganz an der Stelle $\mathbf{p}$, falls dies auf alle ihre Einträge zutrifft. Die Ordnung des Restklassenkörpers

$$\mathbf{o}/\mathbf{p} = \mathbf{o}_\mathbf{p}/\mathbf{p}\mathbf{o}_\mathbf{p}$$

ist eine Primzahlpotenz $p^{m_\mathbf{p}}$. Sei $\pi = \pi_\mathbf{p}$ ein Erzeugendes des maximalen Ideals von $\mathbf{o}_\mathbf{p}$. Jedes Element von $K - \{0\}$ kann in der Form

$$a = \pi^{v_\mathbf{p}(a)} \cdot u\,, \qquad u \in \mathbf{o}_\mathbf{p}^\times \quad \text{(Einheitengruppe)}\,,$$

geschrieben werden. Der $\mathbf{p}$-adische Betrag von a ist

$$|a|_\mathbf{p} = p^{-m_\mathbf{p} v_\mathbf{p}(a)}\,.$$

Ergänzend wird $|0|_\mathbf{p} = 0$ definiert. Der $\mathbf{p}$-adische Betrag hängt mit der Norm von a durch die Formel

$$|\mathcal{N}(a)| = \prod_\mathbf{p} |a_\mathbf{p}|^{-1}$$

zusammen. Dabei durchläuft $\mathbf{p}$ die endlich vielen Primideale, für welche $v_\mathbf{p}(a)$ von 0 verschieden ist.

Wir müssen die Lokalisierungen von $\mathbf{P}(q)$ nach Primstellen definieren. Dazu benötigen wir folgende einfache Bemerkung:

Bemerkung 2.4. Sei q eine natürliche Zahl und $\mathbf{S}$ eine endliche Menge von Primstellen $\mathbf{p}$ von K. Sei $M \in \mathrm{Sp}\,(n, K)$ eine symplektische Matrix, so daß M und M^{-1} ganz an den Stellen aus $\mathbf{S}$ sind. Dann existiert eine zu allen Stellen aus $\mathbf{S}$ teilerfremde natürliche Zahl l mit der Eigenschaft

$$M\Gamma_{n,K}M^{-1} \supset \Gamma_{n,K}[ql]\,.$$

Zusatz. *Die Zuordnung*

$$f \mapsto f \mid M \qquad (f\mid M(Z) = \mathrm{Det}\,(CZ + D)^{-r/2} f(M\langle Z\rangle))$$

definiert eine lineare Abbildung

$$[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \to [\Gamma_{n,K}[ql], r/2]\,.$$

Definition 2.5. Sei $\mathbf{p}$ eine Primstelle von K. Die Lokalisierung von $\mathbf{P}(q)$ nach $\mathbf{p}$ ist

$$\mathbf{P}(q)_\mathbf{p} := \bigcup_{(\mathbf{p},l)=1} \mathbf{P}(q \cdot l)\,.$$

Dabei durchlaufe l die Menge aller zu $\mathbf{p}$ teilerfremden natürlichen Zahlen.

Die Elemente von $\mathbf{P}(q)_\mathbf{p}$ sind Fourierreihen, deren Koeffizienten der Bedingung

$$a(T) \neq 0 \Rightarrow qT \in \mathcal{T}_\mathbf{p}$$

genügen. Dabei bezeichne $\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von $\mathscr{T}$ nach der Stelle $\mathfrak{p}$. Offensichtlich gilt

$$\mathscr{T} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}; \qquad \mathbf{P}(q) = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathbf{P}(q)_{\mathfrak{p}}.$$

Definition 2.6. Der Raum $\mathbf{M}(q)$ besteht aus allen holomorphen Funktionen $f: \mathbf{H}_n^m \to \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von K und ist $M \in \mathrm{Sp}\,(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$, so gilt

$$f \mid M \in \mathbf{P}(q)_{\mathfrak{p}}.$$

Da die Einheitsmatrix in allen $\mathrm{Sp}\,(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$ enthalten ist, gilt insbesondere $f \in \mathbf{P}(q)$, also

$$\mathbf{M}(q) \subset \mathbf{P}(q).$$

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbf{M}(q)}$ das Bild von $\mathbf{M}(q)$ in $\overline{\mathbf{P}(q)}$. Aus 2.3 und 2.4 folgt

$$[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \subset \mathbf{M}(q).$$

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist

Theorem 2.7. *Sei $2r \leq n$. Das Bild von $\Theta(q)$ in $\overline{\mathbf{P}(q)}$ ist genau $\overline{\mathbf{M}(q)}$, insbesondere hat man einen Isomorphismus*

$$\Theta(q) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{M}(q)}.$$

Folgerung. *Es gilt*

$$[\Gamma_{n,K}[q], r/2] \subset \Theta(q).$$

Darüberhinaus werden wir die zwischen den Thetareihen bestehenden linearen Relationen beschreiben und eine Dimensionsformel für $\Theta(q)$ in invariantentheoretischen Daten erhalten.

3. Die Umkehrrelation

In diesem Abschnitt betrachten wir den Raum

$$\mathbf{P}(\infty) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(q).$$

Die Räume $\overline{\mathbf{P}(\infty)}$, $\mathbf{M}(\infty)$, $\overline{\mathbf{M}(\infty)}$ werden in analoger Weise definiert. Wir wollen die Wirkung der „eingebetteten Involution"

$$I_r = I_r^{(n)} = \begin{pmatrix} E_r & E - E_r \\ E_r - E & E_r \end{pmatrix}, \qquad E_r = E_r^{(n)} = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

auf Elemente von $\mathbf{P}(\infty)$ untersuchen. Zerlegt man $Z = Z^{(n)} \in \mathbf{H}_n$ in 4 Blöcke,

$$Z = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1' & Z_2 \end{pmatrix}, \qquad Z_0 = Z_0^{(r)},$$

so gilt

$$I_r(Z) = \begin{pmatrix} Z_0 - Z_2^{-1}[Z_1'] & -Z_1 Z_2^{-1} \\ -Z_2^{-1} Z_1' & -Z_2^{-2} \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben die Elemente von $\mathbf{P}(\infty)$ in der Form $f(Z) = \sum a(T)\, e(TZ)$, wobei formal über alle symmetrischen $T = T^{(n)}$ mit Koeffizienten aus K zu summieren ist. In Wahrheit verschwinden natürlich alle $a(T)$ außerhalb eines $\mathbf{o}$-Gitters.

Hilfssatz 3.1. *Sei*

$$f(Z) = \sum a(T)\, a(TZ)$$

ein Element von $\mathbf{P}(\infty)$, *so daß auch*

$$g(Z) = \det(Z_2)^{-r/2} f(I_r\langle Z\rangle)$$

in $\mathbf{P}(\infty)$ *enthalten ist,*

$$g(Z) = \sum b(T)\, e(TZ)\,.$$

Seien $S = S^{(r)} \succ 0$ *eine symmetrische total positive Matrix mit Koeffizienten aus* K *und* $G = G^{(r,n-r)}$ *eine* $r \times (n-r)$*-Matrix, ebenfalls mit Koeffizienten aus* K.

Wir wählen eine natürliche Zahl q, *so daß sich* $a(S[E, X])$ *und* $e(G'SX)$ *nicht ändern, wenn man die Substitution*

$$X \mapsto X + qH\,, \qquad H \in \mathbf{o}^{(r,n-r)}\,,$$

vornimmt. Dann gilt

$$b(S[E, G]) = C \sum a(S[E, X])\, e(2G'SX)\,.$$

Summiert wird über ein Vertretersystem von $K^{(r,n-r)}/(q\mathbf{o})^{(r,n-r)}$. *Es gibt nur endlich viele Vertreter, für welche* $a([E, X])$ *von 0 verschieden ist. Die Konstante* C *hängt von* S *und von der Wahl von* q *ab.*

Der Beweis erfolgt in Analogie zum rationalen Fall [Fr2] und braucht daher nur skizziert zu werden. Er beruht auf der einfachen

Bemerkung 3.2. Sei $S = S^{(r)}$ eine symmetrische total positive Matrix mit Koeffizienten aus K. Die Menge aller Matrizen

$$T = T^{(n)} = T' = \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft

$$T \succeq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Rang} T \le r$$

steht in umkehrbar eindeutiger Korrespondenz zur Menge aller Matrizen $G \in K^{(n,n-r)}$ vermöge

$$T = S[E^{(r)}, S^{-1}G] = \begin{pmatrix} S & G \\ G' & S^{-1}[G] \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis von 3.1 betrachtet man die Fourier-Jacobi-Entwicklung von f:

$$f(Z) = \sum_S \varphi_S(Z_1, Z_2)\, e(SZ_0)\,,$$

mit

$$\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum_T a(T)\, e(T_2 Z_2 + 2T'_1 Z_1), \qquad T = \begin{pmatrix} S & T_1 \\ T'_1 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Wegen 3.2 gilt für invertierbares S, welches im folgenden festgehalten sei,

$$\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum a(S[E, S^{-1}G])\, e(S^{-1}[G]\, Z_2 + 2G'Z_1).$$

Wenn wir q so wählen, daß f in $\mathbf{P}(q)$ enthalten ist, so braucht nur über solche G summiert zu werden, so daß $qS[E, S^{-1}G]$ in $\mathcal{T}$ enthalten ist. Da die Koeffizienten $a(T)$ unter einer geeigneten Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}(n, \mathfrak{o})$ invariant sind, existiert ein $\mathfrak{o}$-Gitter $\mathcal{L} \subset K^r$, so daß $a(S[E, S^{-1}G])$ bei der Substitution $G \mapsto G + H$, $H \in \mathcal{L}^r$, invariant bleibt. Läßt man G ein Vertretersystem modulo $\mathcal{L}^r$ durchlaufen, so erhält man

$$\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum_{G \bmod \mathcal{L}^r} a(S[E, S^{-1}G]) \sum_{H \in \mathcal{L}^r} e(S^{-1}[G + H]\, Z_2 + 2(G + H)'\, Z_1).$$

Die äußere Summe ist wegen der Einschränkung an die zu betrachtenden G in Wahrheit endlich. Die inneren Summen können als Thetareihen geschrieben werden. Mit der in 1.4 eingeführten Bezeichnung gilt

$$\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum_{G \bmod \mathcal{L}^r} a(S[E, S^{-1}G])\, \vartheta_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} H \\ Z_1 \end{bmatrix} (S^{-1}; Z_2).$$

Nun kann man die Thetainversionsformel 1.5 anwenden und $\varphi_S(-Z_1 Z_2^{-1}, -Z_2^{-1})$ umformen. Auf diesem Wege erhält man die Fourier-Jacobi-Entwicklung von g und kann die Koeffizienten $b(S[E, G])$ ablesen. Wir verzichten auf die Rechnung im Detail.

4. Total semipositive Matrizen

In der Theorie der singulären Modulformen über dem Körper der rationalen Zahlen [Fr2] wurde mehrfach von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß es zu jeder semidefiniten rationalen symmetrischen Matrix $T = T^{(n)}$ eine unimodulare Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft

$$T[U] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad S > 0,$$

gibt. Die direkte Verallgemeinerung im Zahlkörperfall ist falsch, da $\mathfrak{o}$ i.a. kein Hauptidealring ist. Wir müssen daher mit den Lokalisierungen von $\mathfrak{o}$ nach Primstellen $\mathfrak{p}$ arbeiten, welche bekanntlich diskrete Bewertungsringe, also insbesondere Hauptidealringe sind.

Bemerkung 4.1. Sei T eine total semipositive $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus K. Ihr Rang sei $r < n$. Dann existiert eine Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, K)$ und eine total positive $r \times r$-Matrix S mit der Eigenschaft

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U].$$

Ist S eine endliche Menge von Primstellen von K, so kann man

$$U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}) \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{S}$$

erreichen. Insbesondere existiert für jede feste Primstelle $\mathfrak{p}$ eine Darstellung

$$T = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_{\mathfrak{p}}], \qquad U_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}).$$

Die Größe

$$\delta_{\mathfrak{p}}(T) := |\det (S_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}^{-1}$$

hängt nicht von der Wahl dieser Darstellung ab. Der Ausdruck

$$\delta(T) := \prod_{\mathfrak{p}} \delta_{\mathfrak{p}}(T)$$

ist eine wohldefinierte, nicht negative rationale Zahl. Sie ist ganz rational, wenn T ganz ($\in \mathfrak{o}^{(n,n)}$) ist.

Wir nennen die Größe $\delta(T)$ die reduzierte Determinante von T.

In Siegels Arbeit [Si] wird jeder nicht notwendig quadratischen, von 0 verschiedenen Matrix A ein Ideal – die sogenannte Diskriminante zugeordnet. Sei r der Rang von A. Die Diskriminante ist das von allen $r \times r$-Unterdeterminanten erzeugte Ideal. Offensichtlich ist die reduzierte Determinante gerade die Norm der Diskriminante.

Beweis. Seien S und $\tilde{S}$ zwei symmetrische $r \times r$-Matrizen mit Koeffizienten aus K. Die Matrix S sei nicht ausgeartet. Es gelte

$$\begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [G]$$

mit einer $n \times n$-Matrix G. Eine einfache Rechnung zeigt, daß G die Form

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad A = A^{(r)},$$

hat und daß $\tilde{S} = S[A]$ gilt. Wenn G ganz an der Stelle $\mathfrak{p}$ ist, so folgt

$$|\det (\tilde{S}_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}^{-1} \geq |\det (S_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}^{-1}.$$

Bemerkung 4.1 ist eine unmittelbare Folgerung aus dieser Rechnung.

Die reduzierte Determinante stellt ein Maß für die Größenordnung von T in folgendem Sinne dar.

Bemerkung 4.2. Seien T_1 und T_2 zwei total semipositive symmetrische $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K. Beide haben denselben Rang r. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ existiere eine Matrix $G_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{(n,n)}$ mit der Eigenschaft $T_2 = T_1[G_{\mathfrak{p}}]$. Dann gilt

$$\delta(T_2) \geq \delta(T_1).$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn sogar Matrizen $U_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$ mit der Eigenschaft $T_2 = T_1[U_{\mathfrak{p}}]$ existieren.

Beweis. Zunächst einmal zeigt man wie beim Beweis von 4.1, daß für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ die Ungleichung $\delta_{\mathfrak{p}}(T_2) \geq \delta_{\mathfrak{p}}(T_1)$ gilt. Dies impliziert die Ungleichung $\delta(T_2) \geq \delta(T_1)$. Wenn das Gleichheitszeichen gilt, so muß an jeder Stelle das Gleichheitszeichen gelten. Wir machen nun den Ansatz

$$T_\nu = \begin{pmatrix} S_{\nu,\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_{\nu,\mathfrak{p}}], \qquad U_{\nu,\mathfrak{p}} \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}) \qquad (\nu = 0, 1).$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} S_{2,\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_{1,\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}} U_{2,\mathfrak{p}}^{-1}]$$

und dann

$$U_{1,\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}} U_{2,\mathfrak{p}}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{\mathfrak{p}} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

mit einer notwendigerweise an der Stelle $\mathfrak{p}$ unimodularen Matrix $A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$. Die Matrix

$$U_{\mathfrak{p}} = U_{1,\mathfrak{p}}^{-1} \begin{pmatrix} A_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & B_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} U_{2,\mathfrak{p}}, \qquad B_{\mathfrak{p}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A_{\mathfrak{p}} \end{bmatrix}^{-1},$$

hat die in 4.2 gewünschte Eigenschaft.

Folgende Frage liegt nahe: Es existiere sogar eine (an allen Stellen) ganze Matrix G mit der Eigenschaft $T_2 = T_1[G]$. Existiert dann unter der Voraussetzung $\delta(T_1) = \delta(T_2)$ sogar eine Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o})$ mit dieser Eigenschaft? Dies ist tatsächlich richtig, aber nicht ganz trivial. Zum Beweis benötigen wir folgenden im wesentlichen auf Siegel ([Si] § 3) zurückgehenden

Hilfssatz 4.3. *Seien P, Q zwei $r \times n$-Matrizen, $r < n$, mit Koeffizienten aus K, deren Spalten denselben $\mathfrak{o}$-Modul $\mathscr{L} = \langle P \rangle = \langle Q \rangle$ erzeugen mögen. Außerdem sei eine natürliche Zahl q mit der Eigenschaft*

$$P - Q \in q\mathscr{L}^n$$

gegeben. Dann existiert eine unimodulare Matrix

$$U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}), \qquad U \equiv E \bmod q, \qquad PU = Q.$$

(Ohne die Bedingung $r < n$ kann man nur $U \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o})$ erreichen.) Bei Siegel ist dieser Hilfssatz allerdings ohne die zusätzliche Kongruenzbedingung formuliert. Diese kann man nachträglich erzwingen, wenn man beachtet, daß die algebraische Gruppe G aller $A \in \mathrm{SL}(n)$, $PA = P$, dem starken Approximationssatz genügt. Dies impliziert, daß zu jedem $U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o})$ mit der Eigenschaft $U(P - E) \in q\mathscr{L}^n$ eine Matrix $\tilde{U} \in G$, $\tilde{U} \equiv U \bmod q$ gefunden werden kann.

R. Kiehl hat mich auf einen anderen sehr eleganten Beweis aufmerksam gemacht, der hier kurz skizziert werden soll:

Der $\mathfrak{o}$-Modul $\mathscr{L}$ ist endlich erzeugt und torsionsfrei. Da $\mathfrak{o}$ ein Dedekindring ist, ist $\mathscr{L}$ sogar projektiv. Die beiden surjektiven Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{o}^n \to \mathscr{L}\,, \\
&(r_1, \ldots, r_n) \mapsto r_1 p_1 + \ldots + r_n p_n \quad (P = (p_1, \ldots, p_n))\,, \\
&(r_1, \ldots, r_n) \mapsto r_1 q_1 + \ldots + r_n q_n \quad (Q = (q_1, \ldots, q_n))
\end{aligned}$$

besitzen also einen Schnitt. Sind $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ die Kerne der beiden Abbildungen, so gilt also

$$\mathfrak{o}^n = \mathscr{K}_1 \oplus \mathscr{L}_1 = \mathscr{K}_2 \oplus \mathscr{L}_2\,,$$

wobei die Moduln $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ isomorph auf $\mathscr{L}$ abgebildet werden. Wir müssen zeigen, daß die Moduln $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ isomorph sind. (Man setzt dann einen fest gewählten Isomorphismus in naheliegender Weise zu einem Automorphismus von $\mathfrak{o}^n$ fort und gewinnt so die gesuchte unimodulare Matrix.) Diese Isomorphie folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß für projektive Moduln über Dedekindringen die Kürzungsregel gilt. (Ein endlich erzeugter projektiver Modul über einem Dedekindring ist direkte Summe eines freien Moduls und eines Ideals [Bo].)

Hilfssatz 4.4. *Seien T_1, T_2 zwei symmetrische total semipositive Matrizen vom Rang r, $r < n$, mit derselben reduzierten Determinante $\delta(T_1) = \delta(T_2)$. Es existiere eine ganze Matrix G mit der Eigenschaft $T_2 = T_1[G]$. Dann existiert sogar eine Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o})$ mit der Eigenschaft $T_2 = T_1[U]$.*

Beweis. Wir schreiben T_1 in der Form $T_1 = S[P]$ mit einer total positiven Matrix $S = S^{(r)} \succ 0$ und mit einer $r \times n$-Matrix P, beide mit Koeffizienten aus K. Es gilt dann $T_2 = S[Q]$ mit $Q = PG$, insbesondere $\langle P \rangle \supset \langle Q \rangle$. Wegen Hilfssatz 4.3 genügt es, $\langle P \rangle = \langle Q \rangle$ zu zeigen. Dazu genügt es, für jede vorgegebene Primstelle $\langle P \rangle_\mathfrak{p} = \langle Q \rangle_\mathfrak{p}$ zu zeigen. Nach Hilfssatz 4.2 existiert eine an der Stelle $\mathfrak{p}$ unimodulare Matrix $U_\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft $S[Q] = S[PU_\mathfrak{p}]$. Da wir für unsere Zwecke P und Q mit einer an der Stelle $\mathfrak{p}$ unimodularen Matrix von rechts und mit einer invertierbaren Matrix von links multiplizieren dürfen, können wir $Q = (E, 0)$ und $U_\mathfrak{p} = E$ annehmen. Dann gilt aber $P = (P_1, 0)$ mit einer $r \times r$-Matrix P_1. Der von ihren Spalten erzeugte $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Modul umfaßt $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^r$. Dies bedeutet, daß P_1^{-1} ganz an der Stelle $\mathfrak{p}$ ist. Aus der Gleichung $S[P_1^{-1}] = S$ folgt jetzt durch Determinantenvergleich, daß P_1 unimodular an der Stelle $\mathfrak{p}$ ist. Die Moduln $\langle G \rangle$ und $\langle P \rangle$ stimmen also wie behauptet an allen Primstellen und damit überhaupt überein.

Wir benutzen häufig Darstellungen einer total semipositiven Matrix $T = T^{(n)}$ vom Rang $r < n$ in der Form $T = S[P]$ mit einer total positiven Matix P. Diese ist in folgendem Sinne eindeutig:

Hilfssatz 4.5. *Seien $S = S^{(r)}$, $\tilde{S} = \tilde{S}^{(r)}$ zwei total positive symmetrische Matrizen mit Koeffizienten aus K, und seien $P = P^{(r,n)}$, $\tilde{P} = \tilde{P}^{(r,n)}$ $(r < n)$ zwei Matrizen vom Rang r, ebenfalls mit Koeffizienten aus K. Es gelte $S[P] = \tilde{S}[\tilde{P}]$. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit der Eigenschaft $\tilde{S} = S[A]$, $P = A\tilde{P}$.*

Zum Beweis ergänzt man P und $\tilde{P}$ zu invertierbaren $n \times n$-Matrizen U und $\tilde{U}$. Es gilt dann

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U] = \begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[\tilde{U}]\,.$$

Man erhält

$$U\tilde{U}^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

und hieraus die Behauptung.

Es kommt immer wieder vor, daß $r \times n$-Matrizen P vom Rang $r < n$ zu invertierbaren $n \times n$-Matrizen ergänzt werden müssen. Solche Ergänzungen sind natürlich nicht eindeutig. Es existieren jedoch für unsere Zwecke besonders geeignete Ergänzungen.

Hilfssatz 4.6. *Sei $P = P^{(r,n)}$ $(r < n)$ eine Matrix vom Rang r mit Koeffizienten aus K. Es existiert eine Darstellung*

$$P = (E, 0)\,U\,, \qquad U \in \mathrm{SL}\,(n, K)\,,$$

mit folgender Eigenschaft: Ist $X = X^{(r,n-r)}$ eine beliebige $r \times (n - r)$-Matrix mit Koeffizienten aus K und definiert man $P_X = (E, X)\,U$, so gilt

$$\langle P_X \rangle \supset \langle P \rangle\,.$$

Man kann erreichen, daß U an allen Stellen unimodular ist, an denen P primitiv (d. h. zu einer Matrix aus $\mathrm{GL}\,(n, \mathfrak{o}_\mathfrak{p})$ ergänzbar) ist.

Beweis. Wir wählen für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ eine an dieser Stelle unimodulare Matrix $U_\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft

$$P = (A_\mathfrak{p}, 0)\,U_\mathfrak{p}\,.$$

Es gilt dann

$$P = (E, 0)\begin{pmatrix} A_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & B_\mathfrak{p} \end{pmatrix} U_\mathfrak{p}\,, \qquad B_\mathfrak{p} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A_\mathfrak{p} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Nach dem starken Approximationssatz für die Gruppe $\mathrm{SL}\,(n)$ existiert eine Matrix $U \in \mathrm{SL}\,(n, K)$ mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} A_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & B_\mathfrak{p} \end{pmatrix} U_\mathfrak{p} = U V_\mathfrak{p}\,, \qquad V_\mathfrak{p} \in \mathrm{SL}\,(n, \mathfrak{o}_\mathfrak{p})\,.$$

Wir behaupten, daß U die gewünschten Eigenschaften hat. Jedenfalls ist U an allen Stellen unimodular, an denen P primitiv ist. Wir müssen $\langle P_X \rangle \supset \langle P \rangle$ zeigen. Es genügt, für jede Primstelle $\langle P_X \rangle_\mathfrak{p} \supset \langle P \rangle_\mathfrak{p}$ zu zeigen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \langle P_X \rangle_\mathfrak{p} &= \langle (E, X)\,U \rangle_\mathfrak{p} = \left\langle (E, X)\begin{pmatrix} A_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & B_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \right\rangle_\mathfrak{p} = \langle A_\mathfrak{p}, X B_\mathfrak{p} \rangle_\mathfrak{p} \supset \langle (A_\mathfrak{p}, 0) \rangle_\mathfrak{p} \\ &= \langle P \rangle_\mathfrak{p}\,. \end{aligned}$$

Hilfssatz 4.6 wird in Verbindung mit folgendem Hilfssatz angewendet werden:

Hilfssatz 4.7. *Sei $S = S^{(r)}$ eine total positive symmetrische Matrix, und seien $P = P^{(r,n)}$, $Q = Q^{(r,n)}$ zwei Matrizen vom Rang $r < n$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

a) $S[P] = S[Q]$,
b) $\langle P \rangle \subset \langle \Omega \rangle$.
Dann gilt sogar

$$\langle P \rangle = \langle Q \rangle .$$

Beim Beweis orientiere sich man an dem von 4.4.

5. Kernformen

Definition 5.1. Sei $f(Z) = \sum a(T)\, e(TZ)$ ein Element von $\mathbf{P}(\infty)$. Eine Matrix $T = T' = T^{(n)}$ vom Rang r mit Koeffizienten aus K heißt *Kernform von f* – kurz *f-Kernform* –, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $a(T) \neq 0$.

2) Sei $\tilde{T}$ eine weitere Matrix vom Rang r, so daß $a(\tilde{T})$ nicht verschwindet. Es existiere eine ganze Matrix G mit der Eigenschaft $T = \tilde{T}[G]$. Dann existiert sogar eine Matrix $U \in \mathrm{SL}\,(n, \mathbf{o})$ mit der Eigenschaft $T = \tilde{T}[U]$.

Bemerkung 5.2. Jedes Element f aus $\mathbf{P}(\infty)$, dessen Bild in $\overline{\mathbf{P}(\infty)}$ nicht verschwindet, besitzt eine Kernform.

Beweis. Jedes T vom Rang r mit minimalem $\delta(T)$ hat wegen 4.4 diese Eigenschaft. Ein solches T existiert, da $\delta(T)$ beschränkten Nenner hat.

Hilfssatz 5.3. *Seien f ein Element von $\mathbf{P}(q)$ und T eine f-Kernform. Wir betrachten eine Darstellung*

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U] = S[P]\,, \qquad U = \begin{pmatrix} P \\ * \end{pmatrix} \qquad (U \in \mathrm{SL}\,(n, K), S > 0)$$

und bezeichnen mit $\langle P \rangle$ den von den Spalten von P erzeugten $\mathbf{o}$-Modul. Sei $G = G^{(r,n)}$ eine weitere Matrix mit Koeffizienten aus K und mit folgenden beiden Eigenschaften:

a) $\langle P \rangle \subset \langle G \rangle$,
b) $a(S[G]) \neq 0$.
Dann gilt $\langle P \rangle = \langle G \rangle$.

Beweis. Wegen a) existiert eine ganze Matrix A mit der Eigenschaft $P = GA$. Da T eine Kernform ist, existiert eine unimodulare Matrix $U \in \mathrm{SL}\,(n, \mathbf{o})$ mit der Eigenschaft $S[P] = S[GU]$. Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 4.7.

Wir beweisen nun, daß Kernformen von Elementen aus $\mathbf{M}(q)$ (2.6) starken Einschränkungen unterliegen.

Satz 5.4. *Seien $T = S[P]$, $S = S^{(r,)} > 0$, $P = P^{(r,n)}$ Kernform einer Funktion $f \in \mathbf{M}(q)$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L} = \langle P \rangle$ das von den Spalten von P erzeugten $\mathbf{o}$-Gitter und mit $\mathscr{L}^*$ dessen duales Gitter. Es gilt*

$$qS^{-1}[H] \in \mathscr{T}^{(n-r)} \quad \textit{für} \quad \langle H \rangle \subset \mathscr{L}^* .$$

Zusatz. *Im Falle $r \geq n + 2$ folgt sogar*

$$qS^{-1}[G] \in \mathcal{T} \quad \textit{für} \quad \langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*, \qquad G = G^{(r,n)}.$$

Beweis. Wir zeigen, daß für jede fest vorgegebene Primstelle $\mathfrak{p}$

$$qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}^{(n-r)} \quad \text{für} \quad H \in \mathcal{L}^{n-r}$$

gilt. Zunächst bemerken wir, daß wegen 4.5 diese Aussage unabhängig von der Wahl der Darstellung von T in der Form $T = S[P]$ ist. Wir können also eine an die Primstelle $\mathfrak{p}$ adaptierte Darstellung wählen. Nach 4.1 können wir erreichen, daß P primitiv an der Stelle $\mathfrak{p}$ ist. Nach Hilfssatz 4.6 existiert eine Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$ mit den Eigenschaften

$$P = (E, 0)\, U\,, \qquad \langle P_X \rangle \supset \langle P_X \rangle \supset \langle P \rangle \qquad (P = (E, X)\, U, X \in K^{(r,n-r)}).$$

Wir betrachten nun neben f die Funktion $\tilde{f}(Z) = f(Z[U'^{-1}])$. Ihre Fourierentwicklungen haben die Form

$$f(Z) = \sum a(T)\, e(TZ)\,, \qquad \tilde{f}(Z) = \sum a(T[U])\, e(TZ)\,.$$

Schließlich betrachten wir noch

$$\tilde{g}(Z) = \det{(Z_2)}^{-r/2} \tilde{f}(I_r\langle Z \rangle) = \sum \tilde{b}(T)\, e(T, Z)\,.$$

Nach Definition von $\mathbf{M}(q)$ (2.6) gilt $\tilde{g} \in \mathbf{P}(q)_{\mathfrak{p}}$. Insbesondere gilt

$$\tilde{b}(T) \neq 0 \Rightarrow qT \in \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}\,.$$

Wir nutzen nun die Umkehrrelation (3.1) aus:

$$\tilde{b}(S[E, G]) = C \sum \tilde{a}(S[E, X]\, U)\, e(2G'SX)\,.$$

Wir wählen ein G, so daß $\tilde{b}(S[E, G])$ von 0 verschieden ist. Ein solches existiert, da $\tilde{a}(S[E, 0]\, U)$ von 0 verschieden ist und da man bei der Umkehrrelation die Rollen von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ vertauschen kann. Jetzt nutzen wir aus, daß T eine Kernform ist: Der Koeffizient $a(S[E, X]\, U)$ kann wegen 5.3 nur dann von 0 verschieden sein, falls $\langle P_X \rangle = \langle P \rangle$. Da U an der Stelle $\mathfrak{p}$ unimodular und P an dieser Stelle primitiv ist, erhalten wir

$$a(S[E, X]\, U) \neq 0 \Rightarrow X \quad \text{ist ganz an der Stelle } \mathfrak{p}\,.$$

Da nur endlich viele dieser Fourierkoeffizienten von 0 verschieden sind, folgt die Existenz einer zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden natürlichen Zahl l mit der Eigenschaft

$$a(S[E, X]\, U) \neq 0 \Rightarrow lX \in \mathfrak{o}^{(r,n)}\,.$$

Sei nun $H = H^{(r,n-r)}$ eine beliebige Matrix mit Koeffizienten aus der reziproken Differente $\mathfrak{o}^*$. Es gilt dann $e(2lH'X) = 1$ für die endlich vielen X. Aus der Umkehrrelation folgt

$$\tilde{b}(S[E, G + lS^{-1}H]) = \tilde{b}(S[E, G])\,.$$

Es muß dann aber

$$qS[E, G + lS^{-1}H] \in \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$$

gelten. Dies gilt für alle H mit Koeffizienten aus der reziproken Differente. Man folgert nun leicht durch Variieren von H, daß

$$qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}^{(n-r)} \quad \text{für} \quad H \in (\mathfrak{o}^*)^{(r,n-r)}$$

gilt. Da die rechte Seite nach $\mathfrak{p}$ lokalisiert ist, kann man sogar alle H mit Koeffizienten aus der Lokalisierung der reziproken Differente nach $\mathfrak{p}$ zulassen, mit anderen Worten, alle H mit $\langle H \rangle \subset (\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^*)^r$. Dies impliziert unsere Behauptung, denn die Darstellung $T = S[P]$ wurde ja so normiert, daß $\mathscr{L}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^r$ gilt. Wenn also $\langle H \rangle$ in $\mathscr{L}^*$ enthalten ist, so ist es erst recht in $(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^*)^r$ enthalten. Satz 5.4 ist somit bewiesen. Der Zusatz ist klar.

Definition 5.5. Eine Matrix $T = T^{(n)} = T' \succeq 0$ vom Rang r heißt *potentielle Kernform (der Stufe q)*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $qT \in \mathscr{T}$,

b) Sei $T = S[P]$, $S \succ 0$ und $\mathscr{L} = \langle P \rangle$. Für jede Matrix $G = G^{(r,n)}$ mit der Eigenschaft $\langle G \rangle \subset \mathscr{L}^*$ gilt $qS^{-1}[G] \in \mathscr{T}$.

Wir haben bereits gesehen, daß die Bedingung b) nicht von der Wahl der Darstellung $T = S[P]$ abhängt. Satz 5.4 besagt, daß Kernformen von Elementen aus $\mathbf{M}(q)$ potentielle Kernformen sind.

Bemerkung 5.6. Es gibt (zu gegebenem q) nur endlich viele unimodulare Klassen $\{T[U],\ U \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o})\}$ von potentiellen Kernformen.

Wir erhalten damit die Endlichdimensionalität von $\overline{\mathbf{M}(q)}$ und sogar eine effektive Abschätzung für die Dimension dieses Raumes. Gleichzeitig erhalten wir eine Strategie für den Beweis des Darstellungssatzes:

Wir ordnen ein Repräsentantensystem der unimodularen Klassen potentieller Kernformen nach wachsender reduzierter Determinante an,

$$T_1, \ldots, T_h \qquad (\delta(T_1) < \ldots < \delta(T_h)) .$$

Sei nun $f \in \mathbf{M}(q)$ eine Funktion, deren Bild in $\overline{\mathbf{M}(q)}$ nicht verschwindet. Nach Satz 5.4 existieren ein Index k und eine unimodulare Matrix U_0 mit der Eigenschaft

$$a(T_k[U_0]) \neq 0 .$$

Wir wählen k minimal mit dieser Eigenschaft. Das Ziel ist es nun, eine Linearkombination von Thetareihen

$$g(Z) = \sum b(T)\, e(TZ) \in \Theta(q)$$

zu konstruieren, so daß folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

a) Ist $b(T)$ von 0 verschieden, so gilt $T = T_k[G]$ mit einer ganzen Matrix G.

b) Für jede unimodulare Matrix U gilt $a(T_k[U]) = b(T_k[U])$.

Wenn dies gelungen ist, so betrachte man $h = f - g$. Die Fourierkoeffizienten $c(T)$ zu den Indizes $T = T_j[U], j < k$, (U unimodular) wurden wegen a) nicht verändert, wohingegen die Fourierkoeffizienten $c(T_k[U])$ für alle unimodularen U verschwinden. Der Darstellungssatz kann nun durch Induktion nach k bewiesen werden.

Der Ansatz für die Konstruktion von g ist naheliegend. Man schreibt T_k in der Form $T_k = S[P]$, $S = S^{(r)} > 0$, und betrachtet Thetareihen $\vartheta_{\mathscr{L},V}(S; Z)$, wobei $\mathscr{L}$ das von den Spalten von P aufgespannte $\mathfrak{o}$-Gitter sei. Die Matrix V möge den in 1.6 formulierten Bedingungen genügen. Die Nullmatrix genügt beispielsweise diesen Bedingungen. Die Funktion g soll als Linearkombination dieser Thetareihen konstruiert werden. Die Bedingung a) ist dann in jedem Fall erfüllt. Die Frage ist, ob man genügend viele V finden kann, um alle $a(T_k[U])$, $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{o})$, zu erfassen. Natürlich handelt es sich hierbei um ein endliches System von Koeffizienten, da es nur auf die Rechtsnebenklasse von U nach einer Kongruenzgruppe ankommt. Es stellt sich nun aber heraus, daß zwischen diesen endlich vielen Koeffizienten nichttriviale Relationen bestehen. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Relationen beweisen.

Auf einen Sonderfall sollte an dieser Stelle hingewiesen werden. Im Falle der vollen Hilbert-Siegelschen Modulgruppe ($q = 1$) tritt nur ein Koeffizient auf. Dieser Fall ist also bereits erledigt, man braucht nur die Matrix $V = 0$.

6. Relationen zwischen Fourierkoeffizienten zu Kernformen

Wir betrachten eine Funktion $f \in \mathbf{M}(q)$ mit Fourierkoeffizienten $a(T)$. Sei T eine f-Kernform. Wir wollen das System der Fourierkoeffizienten $a(T[U])$, $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{o})$, betrachten und gewisse Relationen zwischen diesen ableiten. Dazu schreiben wir T in der Form $T = S[P]$, $S = S^{(r)} > 0$. Es gilt dann $T[U] = S[PU]$. Wir erinnern daran (4.3), daß sich eine Matrix Q genau dann in der Form PU mit unimodularem $U \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{o})$ schreiben läßt, falls die von den Spalten von Q und P erzeugten Moduln übereinstimmen. Wir haben also die Koeffizienten

$$\alpha(Q) = a(S[Q]), \qquad \langle Q \rangle = \mathscr{L} := \langle P \rangle,$$

zu betrachten. Satz 4.3 gibt genauere Auskunft. Sei $\bar{Q}$ das Bild von Q in $(\mathscr{L}/q\mathscr{L})^n$. Der Koeffizient $\alpha(Q)$ ($\langle Q \rangle = \mathscr{L}$) hängt nur von diesem Bild ab. Damit werden wir dazu geführt, den Modul

$$\mathscr{M} := \mathscr{L}/q\mathscr{L}$$

genauer zu betrachten. Wir können ihn sowohl als $\mathbf{o}$- als auch als $\mathbf{o}/(q)$-Modul auffassen. Ein n-Tupel von Elementen aus $\mathscr{M}$ heißt primitiv, falls es den Modul $\mathscr{M}$ erzeugt. Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{P} = (\mathscr{M}^n)_{\mathrm{prim}}$$

die Menge aller primitiven n-Tupel. Die Gruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbf{o}/(q))$ operiert durch Multiplikation von rechts auf $\mathscr{P}$ und zwar transitiv. Wir erinnern daran, daß die natürliche Abbildung $\mathrm{SL}(n, \mathbf{o}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbf{o}/(q))$ surjektiv ist. Insbesondere ist jedes Element aus $\mathscr{P}$ von der Form $\bar{Q}$, $\langle Q \rangle = \mathscr{L}$. Wenn wir der Einfachheit halber $\alpha(\bar{Q}) = \alpha(Q)$ schreiben, so können wir also α als Funktion

$$\alpha : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$$

auffassen. Neben $\mathscr{M}$ müssen wir auch den Modul

$$\mathscr{M}^* = \mathscr{L}^*/q\mathscr{L}^*$$

betrachten, wobei $\mathscr{L}^*$ das im ersten Abschnitt eingeführte reziproke Gitter bezeichne. Für die Formulierung des benötigten Relationensystems benötigen wir

Definition 6.1. Eine Matrix $V = V^{(r,k)}$, mit der Eigenschaft $\langle V \rangle \subset \mathscr{L}^*$ heißt *isotrop* (*in bezug auf die Daten* S, P, q), falls für jede Matrix X mit der Eigenschaft $\langle X \rangle \subset \mathscr{L}$ gilt:

$$(qS)^{-1}[V + qX] \in \mathscr{T}^{(k)}.$$

Diese Bedingung hängt nur von dem Bild $\overline{V}$ von V in $(\mathcal{M}^*)^k$ ab. Wir wollen daher auch $\overline{V}$ isotrop nennen. Offenbar ist $V = V^{(r,k)}$ genau dann isotrop, wenn jede aus zwei Spalten von V gebildete Teilmatrix isotrop ist. Für uns ist neben $k = n$ vor allem der Fall $k = n - r$ von Interesse. Aus diesem Grund wollen wir im folgenden stets $n \geq r + 2$ annehmen. Wenn man den Fall $n = r + 1$ mitbehandeln will, so muß man Definition 6.1 leicht modifizieren (vgl. [Fr2]). Wir verzichten in dieser Arbeit hierauf, da letztendlich ohnehin $n \geq 2r$ angenommen wird. Ab jetzt setzen wir jedenfalls $n \geq r + 2$ voraus.

Wir formulieren nun das angekündigte Relationensystem:

Satz 6.2. *Sei $e = (e_1, \ldots, e_r)$ ein r-Tupel von Elementen von $\mathcal{M}^r$, welche diesen Modul erzeugen. Sei außerdem w ein anisotropes (= nicht isotropes) $(n - r)$-Tupel von Elementen aus $\mathcal{M}^*$. Dann gilt für jede Matrix $u \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{o}/(q))$*

$$\sum_{x \in \mathcal{M}^{n-r}} \alpha((e, x)\, u)\, e(x, w) = 0\,.$$

Dabei sei $e(x, w)$ die Paarung

$$e(x, w) = \mathrm{e}^{2\pi i \operatorname{Tr}(X'W)/q}\,,$$

wobei X bzw. W ein Urbild von x bzw. w in $\mathcal{L}^{n-r}$ bzw. $(\mathcal{L}^*)^{n-r}$ bezeichne.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Behauptung unabhängig ist von der Wahl des Erzeugendensystems e. Ist f ein zweites Erzeugendensystem, so existiert eine Matrix $a \in \mathrm{GL}(r, R)$, $R = \mathbf{o}/(q)$, mit der Eigenschaft $f = ea$. Diese Matrix kann man auf u abwälzen. Ist $b \in \mathrm{GL}(n - r, R)$, so ist mit w auch wb anisotrop. Auch die Matrix b kann man auf u abwälzen und sich aus diesem Grunde auf den Fall $u \in \mathrm{SL}(n, R)$ beschränken. Dann ist aber u das Bild einer Matrix aus $\mathrm{SL}(n, \mathbf{o})$. Da diese Gruppe auf $\mathbf{M}(q)$ operiert, braucht man Satz 6.2 nur für ein fest gewähltes u (und für fest gewähltes e) zu beweisen. Schließlich bemerken wir noch, daß 6.2 auch unabhängig ist von der Wahl der Darstellung $T = S[P]$ (wegen 4.5).

Die Darstellung $T = S[P]$ sei so gewählt, daß P an allen Primteilern $\mathbf{p}$ von q primitiv ist. Es gilt dann $\mathcal{L}_{\mathbf{p}} = \mathbf{o}_{\mathbf{p}}^r$ für alle Primteiler von q. Danach wählen wir eine an allen Primteilern von q unimodulare Matrix $U \in \mathrm{SL}(n, K)$ so, daß $P = (E, 0)\, U$ und $\langle P_X \rangle \supset \langle P \rangle$ für alle $X = X^{(r, n-r)}$ gilt (4.6). Wir wollen nun e und u in 6.2 geeignet wählen. Dazu beachten wir, daß

$$\mathcal{L}_{\mathbf{p}} = \mathbf{o}_{\mathbf{p}}^r \quad (\mathbf{p} \in \mathrm{S})$$

gilt und daß die natürliche Abbildung

$$\mathbf{o}/q\mathbf{o} \to \prod_{\mathbf{p} \in \mathrm{S}} \mathbf{o}_{\mathbf{p}}/q\mathbf{o}_{\mathbf{p}}$$

ein Isomorphismus ist. Wir betten $\mathbf{o}$ diagonal in $\prod_{\mathbf{p} \in \mathrm{S}} \mathbf{o}_{\mathbf{p}}$ ein und können so e und u als Bilder von E und U definieren. In analoger Weise wollen wir den Summationsindex x als Bild einer Matrix X mit Koeffizienten aus K interpretieren. Dabei sollen nur solche X zugelassen sein, so daß $\langle P_X \rangle = \langle P \rangle$ gilt. Wir bezeichnen die Menge dieser X mit $\mathcal{N}$. Dies ist ein $\mathbf{o}$-Modul. Sind nämlich X, Y zwei Elemente von $\mathcal{N}$, so gilt

$$\langle P \rangle \subset \langle P_{X+Y} \rangle \subset \langle P_X \rangle + \langle P_Y \rangle = \langle P \rangle\,.$$

Da die Nenner von $\mathcal{N}$ beschränkt sind, ist $\mathcal{N}$ ein endlich erzeugter $\mathbf{o}$-Modul. Es folgt, daß die diagonale Einbettung $\mathcal{N} \to \prod_{\mathbf{p} \in S} \mathcal{N}_{\mathbf{p}}$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{N}/q\mathcal{N} \to \prod \mathcal{N}_{\mathbf{p}}/q\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$$

induziert. Es gilt $\mathcal{N}_{\mathbf{p}} = \mathbf{o}_{\mathbf{p}}^{(r, n-r)}$. Wir erhalten also, daß jedes x Bild eines Elements $X \in \mathcal{N}$ ist. Wir erinnern noch einmal daran, daß der Koeffizient $\alpha(P_X)$ nur dann von 0 verschieden ist, wenn X in $\mathcal{N}$ enthalten ist. Wir können nach diesen Überlegungen die Formel aus 6.2 auch in der Form

$$\sum_X \alpha((E, X)\, U)\, e(x, w) = 0 \quad (w \text{ anisotrop})$$

schreiben. Dabei durchläuft X ein Vertretersystem aller $r \times (n-r)$-Matrizen mit Koeffizienten aus K nach einem $\mathbf{o}$-Gitter. Dieses muß nur so gewählt werden, daß jeder Summand bezüglich dieses Gitters invariant ist. Es entsteht nun eine kleine Schwierigkeit bei der Interpretation der Paarung $e(x, w)$. Diese ist durch

$$e(x, w) = e^{2\pi i \operatorname{Tr}(X_1' W_1)/q},$$

definiert, wobei X_1 bzw. W_1 ein Urbild von x bzw. w in $\mathcal{L}^{n-r}$ bzw. $(\mathcal{L}^*)^{n-r}$ bezeichne. In unserer Summation tritt anstelle von X_1 jedoch ein Repräsentant aus dem Modul $\mathcal{N}$ auf. Entsprechend wollen wir mit W jetzt einen Repräsentanten in dem reziproken $\mathbf{o}$-Gitter $\mathcal{N}^*$ bezeichnen. Eine einfache Überlegung zeigt

$$e^{2\pi i \operatorname{Tr}(X'W)/q} = e^{2\pi i \operatorname{Tr}(X_1' W_1)/q}.$$

Wir können die Formel in 6.2 auch in der Form

$$\sum_X \alpha((E, X)\, U)\, e^{2\pi i \operatorname{Tr}(X'W)/q} = 0$$

schreiben, müssen allerdings noch klären, was die Anisotropie von w für W (anstelle von W_1) bedeutet. Die Anisotropie für w bedeutet definitionsgemäß, daß

$$(qS)^{-1}[W_1 + qX_1] \notin \mathcal{T}^{(n-r)}, \qquad X_1 \text{ geeignet mit } \langle X_1 \rangle \subset \mathcal{L}^*.$$

Definiert man X_2 durch die Gleichung $W_1 + X_1 = W + X_2$, so gilt $X_2 \in \mathcal{N}_{\mathbf{p}}^*$ $(= (\mathbf{o}_{\mathbf{p}}^*)^{(r, n-r)})$ für alle Primteiler von q. Wir wählen eine zu q teilerfremde natürliche Zahl l, $l \equiv 1 \bmod q$, mit der Eigenschaft $lX_2 \in \mathcal{N}^*$. Es gibt eine Primstelle $\mathbf{p}$ mit der Eigenschaft

$$(qS)^{-1}[W_1 + qX_1] \notin \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^{(n-r)}.$$

Diese Primstelle muß wegen Satz 5.4 notwendigerweise q teilen. Wir erhalten

$$(qS)^{-1}[lW + qlX_2] \notin \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^{(n-r)}.$$

Definiert man $X = \dfrac{l-1}{q} W + lX_2$, so gilt

$$(qS)^{-1}[W + qX] \notin \mathcal{T}_{\mathbf{p}}^{(n-r)} \quad \text{und} \quad X \in \mathcal{N}^*.$$

Man findet umgekehrt zu jedem Paar (W, X) mit dieser Eigenschaft ein Paar (W_1, X_1). Fassen wir zusammen:

Die in 6.3 formulierte Bedingung ist mit folgender Aussage gleichbedeutend:

Sei $W = W^{(r,n-r)}$ eine Matrix mit Koeffizienten aus K, welche folgenden beiden Bedingungen genügt:

a) $W \in \mathcal{N}^*$,

b) $(qS)^{-1}[W] \notin \mathcal{T}$.

Dann gilt

$$\sum_{X \in \mathcal{N}} \alpha((E, X)\, U)\, e^{2\pi i \operatorname{Tr}(X'W)/q} = 0\,.$$

(Wir konnten W durch $W + qX$ ersetzen, da diese Substitution die rechte Seite nicht verändert.)

Diese Relation folgert man aus der Umkehrrelation (3.1) ähnlich wie Satz 5.4. Zunächst findet man einen Primteiler $\mathbf{p}$ von q mit der Eigenschaft $(qS)^{-1} \notin \mathcal{T}_{\mathbf{p}}$. Man wende dann die Umkehrrelation auf die Funktion $\tilde{f}(Z) = f(Z[U'^{-1}])$ an und beachte, daß der Fourierkoeffizient $\tilde{b}(S[E, S^{-1}W])$ der transformierten Funktion $\tilde{g}$ verschwindet.

Sei $v \in (\mathcal{M}^*)^n$ ein isotropes n-Tupel. Dann genügt die Fuktion $\alpha(p) = e(p,v)$, $p \in \mathcal{P}$, offensichtlich dem Relationensystem 6.2. Zumindest unter der Voraussetzung $n \geq 2r$ gilt hiervon auch die Umkehrung.

Satz 6.3. *Sei $n \geq 2r$. Jede Funktion $\alpha: \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, welche dem in 6.2 formulierten Gleichungssystem genügt, ist Linearkombination von Funktionen $\alpha(p) = e(p, v)$ mit isotropem v.*

Wir verweisen für den Beweis dieses eigentümlich komplizierten Satzes auf [Fr2], wo ihm ein eigenes Kapitel (V The fundamental lemma) gewidmet ist. Allerdings ist der Satz dort ein wenig anders formuliert. Anstelle von $\mathcal{M}^*$ wird dort der Dualmodul

$$\operatorname{Hom}_R(\mathcal{M}, R)\,, \qquad R = \mathbf{o}/(q)\,,$$

betrachtet. Wir erläutern daher, wie man unseren Modul $\mathcal{M}^*$ mit dem Dualmodul zu identifizieren hat. Zunächst erinnern wir an die Definition von $\mathcal{L}^*$. Da $\mathcal{L}$ ein $\mathbf{o}$-Modul ist, gilt

$$\mathcal{L}^* := \{a \in K^r;\ a'x \in o^* \text{ für alle } x \in \mathcal{L}\}\,.$$

Jedes Element $a \in \mathcal{L}^*$ definiert also eine Abbildung

$$\mathcal{L} \to \mathbf{o}^*\,, \qquad a \mapsto a'x\,.$$

Diese induziert eine Abbildung

$$\mathcal{M} \to \mathbf{o}^*/(q\mathbf{o}^*)\,.$$

Wir wählen nun ein Element $\delta \in \mathbf{o}^*$, welches zusammen mit q das Ideal $\mathbf{o}^*$ erzeugt, $\mathbf{o}^* = (q, \delta)$. Die Zuordnung $x \mapsto \delta x$ definiert eine surjektive Abbildung

$$\mathbf{o}/(q) \to \mathbf{o}^*/(q\mathbf{o}^*)\,,$$

welche auch injektiv ist, da beide Seiten dieselbe Ordnung haben. Damit ist jedem Element $a \in \mathcal{L}$ eine Abbildung

$$\mathcal{M} \to \mathbf{o}/(q)$$

zugeordnet worden. Man zeigt leicht, daß diese Konstruktion einen Isomorphismus

$$\mathscr{M}^* \to \operatorname{Hom}_R(\mathscr{M}, R)$$

induziert. Dabei läßt sich leicht verfolgen, wie sich die Paarung $e(x, y)$ umsetzt:

Mittels des (nicht ausgearteten) Charakters

$$\varepsilon: R \to \mathbb{C}^\times, \qquad \varepsilon(\bar{a}) = e^{2\pi i \operatorname{Tr}(a\delta)/q} \quad (a \in \mathbf{o}),$$

schreibt sich die Paarung in der Form

$$e(x, l) = \varepsilon(l(y)), \qquad x \in \mathscr{M}^k, \qquad l \in (\mathscr{M}^*)^k,$$

wobei jetzt $\mathscr{M}^*$ als Dualmodul von $\mathscr{M}$ aufgefaßt wird (und entsprechend $(\mathscr{M}^*)^k$ als Dualmodul von $\mathscr{M}^k$). Damit haben wir den Anschluß an die Formulierung des „fundamental lemma" in [Fr2] gewonnen.

Dank Satz 6.3 in Verbindung mit der am Ende von § 5 skizzierten Beweisstrategie ist nunmehr das Hauptresultat (Theorem 2.7) bewiesen. Wir haben bereits angedeutet, daß die Methode mehr, nämlich auch die Thetarelationen in $\Theta(q)$ mitliefert. Dies soll in einem abschließenden Abschnitt näher erläutert werden.

7. Thetarelationen

Sind $T = S[P]$ eine potentielle Kernform und $V = V^{(r,n)}$ eine isotrope Matrix im Sinne von 6.1, so definiert die Thetareihe

$$\sum_{\langle G \rangle \subset \langle P \rangle} e(S[G]\,Z + 2V'G)$$

ein Element von $\Theta(q)$. Wir bezeichnen den von diesen Reihen aufgespannten Unterraum mit

$$\Theta(T; q) \subset \Theta(q).$$

Es ist leicht zu sehen (wegen 4.5), daß dieser Raum nicht von der Darstellung von T in der Form $T = S[P]$ abhängt. Wir wissen

$$\Theta(q) = \sum \Theta(T; q),$$

wobei T ein Repräsentantensystem der endlich vielen Klassen potentieller Kernformen durchläuft. (Es ist bemerkenswert, daß diese nur Thetareihen betreffende Aussage nicht auf der Hand liegt, sondern über den allgemeinen Darstellungssatz 2.7 gewonnen wurde.)

Um die Thetarelationen zu beschreiben, wählen wir für jeden Repräsentanten der Klassen potentieller Kernformen eine Darstellung $T = S[P]$ fest aus. Jedem T sind dann die Moduln $\mathscr{L} = \langle P \rangle$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}/q\mathscr{L}$ sowie die Menge der primitiven Tupel $\mathscr{P} \subset \mathscr{M}^n$ zugeordnet. Schließlich erinnern wir noch daran, daß gewisse Elemente von $(\mathscr{M}^*)^n$ isotrop genannt wurden.

Definition 7.1. Der Raum $\mathbf{A} = \mathbf{A}(S, \mathscr{L})$ besteht aus der Menge aller Funktionen

$$\alpha: \mathscr{M}^n \to \mathbb{C},$$

welche sich als Linearkombination von Funktionen

$$\alpha_v(x) = e(v, x)\,, \quad v \text{ isotrop}\,,$$

schreiben lassen.

Wir verweisen auf § 6 für die Definition der Paarung $e(v, x)$. Sind G ein Element von $\mathscr{L}^n$ und $g = \overline{G}$ sein Bild in M^n, so definieren wir $\alpha(G) = \alpha(g)$. Die Thetareihe

$$\sum_{\langle G\rangle \in \mathscr{L}} \alpha(G)\, e(S[G]\, Z)$$

ist in $\Theta(T, g)$ enthalten, die lineare Abbildung

$$\mathbf{A} \to \Theta(T, q)$$

ist surjektiv. Aus verschiedenen Gründen ist sie nicht injektiv. Zunächst einmal bestehen triviale Relationen, welche von den Einheiten von S herrühren. Die Einheitengruppe $\mathscr{E} = \mathscr{E}(S, \mathscr{L})$ besteht aus allen $U \in \mathrm{GL}\,(n, K)$ mit den Eigenschaften $S[U] = S$ und $Ux = x$ für $x \in \mathscr{L}$. Sie ist natürlich endlich. Die Einheitengruppe operiert auf $\mathscr{L}$ und auf der Menge der isotropen Matrizen durch Multiplikation von links. Sie operiert infolgedessen auf $\mathbf{A}$ durch Translation. Wir bezeichnen den Invariantenraum mit

$$\mathbf{A}^{\mathscr{E}} = \mathbf{A}^{\mathscr{E}}(S, \mathscr{L})\,.$$

Es ist klar, daß schon die Abbildung

$$\mathbf{A}^{\mathscr{E}} \to \Theta(T, q)$$

surjektiv ist. Doch auch diese ist noch nicht injektiv. Um die Thetarelationen beschreiben zu können, müssen wir die Einschränkungen der Funktionen aus $\mathbf{A}$ auf die Menge $\mathscr{P} \subset \mathscr{M}^n$ der primitiven Tupel betrachten. Wir bezeichnen die Menge der Einschränkungen mit

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(S, \mathscr{L}) = \{\alpha \mid \mathscr{P} : \mathscr{P} \to \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbf{A}\}$$

und mit

$$\mathbf{B}^{\mathscr{E}} = \mathbf{B}^{\mathscr{E}}(S, \mathscr{L})$$

die Invarianten unter der Einheitengruppe.

Thetarelationen kommen dadurch ins Spiel, daß die natürliche Einschränkungsabbildung

$$\mathbf{A}^{\mathscr{E}} \to \mathbf{B}^{\mathscr{E}}$$

zwar surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aus diesem Grund wählen wir einen Untervektorraum $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(S, \mathscr{L}) \subset \mathbf{A}^{\mathscr{E}}$ aus, so daß die Einschränkungsabbildung

$$\mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}^{\mathscr{E}}$$

ein Isomorphismus ist. Den mit diesen Koeffizienten gebildeten Unterraum von Thetareihen bezeichnen wir mit $\Theta_0(T, q) \subset \Theta(T, q)$.

Bemerkung 7.2. Die Abbildung

$$\mathbf{A}_0(S, \mathscr{L}) \to \Theta_0(T, q)$$

ist ein Isomorphismus.

Theorem 7.3. *Es gilt*

$$\Theta(q) = \bigoplus \Theta_0(T, q),$$

wobei T ein Repräsentantensystem unimodularer Klassen potentieller Kernformen durchläuft.

Folgerung. *Es gilt*

$$\dim \overline{\mathbf{M}(q)} = \dim \Theta(q) = \sum_T \dim \mathbf{B}^{\mathscr{C}}(S, \mathscr{L}).$$

Innerhalb des Raumes $\Theta_0(T, q)$ bestehen also keine nichttrivialen Thetarelationen. Aber dieser Raum ist i. a. ein echter Unterraum von $\Theta(T, q)$. Stellt man ein Element aus $\Theta(T, q)$, welches nicht in $\Theta_0(T, q)$ enthalten ist, gemäß 7.3 als Linearkombination von Thetareihen dar, so wird man aus dem Raum $\Theta(T, q)$ herausgeführt (und erhält eine Thetarelation). Die Thetarelationen werden also nicht innerhalb eines Raumes $\Theta(T, q)$ beschrieben, sondern innerhalb ihrer Summe. Da die Klassenzahlen quadratischer Formen tendenziell sehr groß sind, ist es schwierig, konkrete Anwendungen – etwa auf die Riemannschen Thetarelationen – zu erzielen.

Der Beweis von 7.2 und 7.3 ergibt sich unmittelbar aus der Beweisstrategie, wie sie am Ende von § 5 dargelegt wurde.

8. Der einfachste Spezialfall

Wir behandeln den besonders einfachen Spezialfall der Stufe $q = 1$ und der Klassenzahl $h = 1$. In diesem Falle braucht man die isotropen Matrizen nicht, es treten insbesondere keine nichttrivialen Thetarelationen auf. Wie schon in § 1 dargelegt wurde, muß man nur das Gitter $\mathscr{L} = \mathbf{o}^r$ betrachten. Sei δ ein Erzeugendes der reziproken Differente $\mathbf{o}^*$. Im Falle des reell quadratischen Zahlkörpers mit der Diskriminante d ist $\delta = 1/\sqrt{d}$. Wir schreiben für die quadratische Form δS anstelle von S, betrachten also die Thetareihe

$$\sum_{G \text{ ganz}} e^{\pi i \operatorname{Tr}(\delta S[G] Z)}.$$

Die Bedingungen an S besagen, daß S gerade und unimodular im üblichen Sinne ist, daß also die Elemente von S und S^{-1} in $\mathbf{o}$, die der Diagonalen sogar in $2\mathbf{o}$ enthalten sind. Solche Matrizen können nur im Falle $rm \equiv 0 \bmod 8$ existieren. Natürlich muß S an allen Stellen, an denen δ positiv ist, positiv sein, an allen anderen aber negativ (definit). In diesem Spezialfall sind die Elemente von $\mathbf{M}(1)$ auch Modulformen zur vollen Modulgruppe und (wegen $rm \equiv 0 \bmod 8$) auch zum trivialen Multiplikatorsystem. Wir erhalten

Satz 8.1. *Seien K ein total reeller Zahlkörper vom Grad m der Klassenzahl* 1 *und δ ein Erzeugendes der reziproken Differente. Mit $h(r, K)$ werde die Anzahl der unimodularen Klassen*

$$\{S[U];\ U \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{o})\}$$

gerader unimodularer Matrizen $S = S^{(r)}$ bezeichnet, so daß δS total positiv ist. Es gilt

$$\dim [\Gamma_{n,K}, r/2] = h(r, K).$$

Literatur

[Bo] Bourbaki, N.: Algèbre Commutative, Chap. VII § 4, Hermann, Paris (1965)
[DS] Deligne, P., Serre, J. P.: Formes Modulaires de Poids 1, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **4** (1974) 507–530
[Fr1] Freitag, E.: Siegelsche Modulformen, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. **254**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer (1983)
[Fr2] Freitag, E.: Singular Modular Forms and Theta Relations, Lectures in Math. **1487**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer (1991)
[Ha] Harris, M.: Singular Holomorphic Representations and Singular Modular Forms, Math. Ann. **256** no. 2 (1982) 227–244
[Ha] Howe, R.: Automorphic Forms of Low Rank, in: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups. Lectures in Math. **880**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1981
[La] Langlands, R. P.: Base Change for GL(2), Ann. of Math. Study **96** (1980)
[Re] Resnikoff, H. L.: Automorphic Forms of Singular Weight Are Singular Forms, Math. Ann. **215** (1975) 173–193
[Si] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, in: Gesammelte Abhandlungen, Band I, 469–548. Springer-Verlag Berlin–Heidelberg–New York (1966)

Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 228
69120 Heidelberg
Germany