Hans Maaß

von Rolf Busam und Eberhard Freitag

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Einige Stationen seines Lebens*)

Hans Maaß wurde am 17.6.1911 als Sohn der Eheleute Johannes und Maximiliana Maaß (geb. Huber) in Hamburg-Altona geboren. Sein Vater hatte sich dort zu einer Zeit niedergelassen, als sein Gewerbe, die Photographie, noch als Kunstgewerbe angesprochen werden konnte. Hans Maaß war gerade drei Jahre alt, als sein Vater zum Kriegsdienst eingezogen wurde. An Folgen einer Kriegsverletzung verstarb sein Vater bereits 1919. Alles, was er geworden ist, so berichtet Hans Maaß später, verdankt er seiner Mutter, die als Sozialgehilfin den Lebensunterhalt für die Familie bestritt und die ihm nach Ablegung des Abiturs (Ostern 1931) auch die Aufnahme des Studiums ermöglichte.

In seiner Heimatstadt studierte Hans Maaß ab dem Sommersemester 1931 an der Hansischen Universität Mathematik, Physik und Astronomie, zunächst mit dem Ziel, Astronom zu werden. Diese Absicht gab er jedoch bereits im ersten Semester auf, als er beim Studium der *Theoria Motus* von Carl Fr. Gauß auf Kettenbrüche stieß. Da ihm diese mathematischen Objekte bis dato nicht begegnet waren, griff er zum Standardwerk über Kettenbrüche, dem einschlägigen Lehrbuch von Oskar Perron, dessen erste Auflage dieser noch während seiner Lehrtätigkeit an der Universität Tübingen verfaßt hatte. Das Studium der Kettenbrüche hat Hans Maaß so fasziniert, daß er den Anlaß, der zum Studium der Kettenbrüche führte, völlig vergaß. Das war wohl seine erste Hinwendung zur Zahlentheorie.

Die ersten Semester seines Studiums fielen in eine Zeit, in welcher dank der Wirkung hervorragender Mathematiker wie Emil Artin, Erich Hecke und anderen (Blaschke, Lenz, ...) das Mathematische Seminar der Hansischen Universität zu einer Forschungsstätte internationalen Ranges aufstieg. Hans Maaß, zunächst stark von

*) Die folgenden Ausführungen stützen sich auf persönliche Gespräche der Verfasser mit Hans Maaß, seiner Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie, Gespräche mit Kollegen und auf das Studium von Fakultätsakten.

E. Artin beeinflußt, siedelte sich schließlich in der geistigen Umgebung von E. Hecke an, wo insbesondere dessen damaliger Assistent Hans Petersson seine weitere wissenschaftliche Entwicklung stark beeinflussen sollte (siehe das wissenschaftliche Werk von Hans Maaß). Das Ende der Weimarer Republik und die Machtübernahme durch die Nationalsozialisten erlebte Hans Maaß im 4. Semester.

Hans Maaß wurde zwar via Abstammungsbescheid bescheinigt, von „deutschem oder artverwandtem Blut" zu sein, doch fanden sich in seiner Ahnenreihe auch „nichtarische" Mitglieder. Hans Maaß hatte deshalb in den folgenden Jahren einen schweren Stand. Dennoch oder vielleicht gerade deshalb gehörte Maaß von 1935 bis 1938 dem NSKK (nationalsozialistisches Kraftfahrer-Korps) an, und er trat 1937 in die NSDAP ein. Für die Würdigung seiner inneren Einstellung zum Nationalsozialismus ist folgendes Zitat aus der Antrittsrede in der Heidelberger Akademie im Jahre 1974 von Bedeutung:

> *„... Der allgemeine Terror, der nach der Machtübernahme durch die Nationalsozialisten über deutsche Lande hereinbrach, warf seine Schatten auch auf das Mathematische Seminar und setzte dem unbeschwerten fröhlichen Wissenschaftsbetrieb ein abruptes Ende. Furcht vor Denunziantentum sorgte dafür, daß die Kommunikation im größeren Kreis zum Erliegen kam. ..."*

Am 26.6.1937 wurde Hans Maaß mit der Arbeit „Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatatorsystem", die von Hans Petersson angeregt worden war, promoviert.

Am 24.2.1938 wurde ihm nach bestandener Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen die Lehrbefähigung (für höhere Schulen) in Mathematik, Physik und Angewandter Mathematik zuerkannt. Erwägungen wirtschaftlicher Art zwangen ihn anschließend, eine Stellung als Statiker bei der Firma Focke-Wulf-Flugzeugbau G.m.b.H. in Bremen anzunehmen, wo er mit der Berechnung von Flugzeugschwingungen beauftragt war. Sein Gastspiel in der Flugzeugindustrie war jedoch von relativ kurzer Dauer (6.4.1938 bis 31.5.1939). Aufgrund eines Angebots von Prof. Dr. Udo Wegner von der Universität Heidelberg nahm Hans Maaß zum 1.6.1939, also kurz vor Beginn des zweiten Weltkriegs, eine Stelle als wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg an.

Udo Wegner stand dem damaligen Regime nahe. Er war im übrigen Nachfolger des von den Nationalsozialisten zur vorzeitigen Emeritierung gezwungenen Arthur Rosenthal. Diese Tatsache macht eine gewisse anfängliche Reserviertheit des zweiten Lehrstuhlinhabers, Herbert Seifert, gegenüber Maaß verständlich. Herbert Seifert, als Nachfolger des ebenfalls von den Nationalsozialisten zur vorzeitigen Emeritierung gezwungenen Heinrich Liebmann von Dresden nach Heidelberg beordert, stand dem Nazi-Regime kritisch gegenüber. Hans Maaß konnte jedoch aufgrund seiner Geradlinigkeit, seiner Aufrichtigkeit, aber auch durch überzeugende wissenschaftliche Leistungen, diese Vorurteile abbauen, so daß Herbert Seifert die Habilitation von Hans Maaß, die bereits im März 1940 erfolgt, mit Nachdruck unterstützte. Im folgenden ist ein Auszug aus dem Bericht der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät über die *öffentliche Lehrprobe* von Hans Maaß am 1. Juli 1940 über das Thema *„Konstruktionen mit Zirkel und Lineal”* wiedergegeben:

> *„... der Vortragende zeigte in dieser zusammengefaßten Behandlung eines nicht ganz einfachen Problems einen umfassenden wissenschaftlichen Weitblick und erhebliche rechnerische und unterrichtliche Begabung. In dieser Hinsicht vermag er ebenso wie persönlich charakterlich allen Anforderungen zu genügen, die an den akademischen Lehrer gestellt werden. ...“*

Hans Maaß übte in den Kriegsjahren eine intensive Lehrtätigkeit am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg aus, gelegentlich bis zu 16 Stunden in der Woche. Er war in dieser Zeit die wesentliche Stütze des Lehrbetriebs. Das Verbleiben in der Heimat forderte jedoch auch seinen Preis: Hans Maaß mußte „kriegswichtige” Berechnungen für die Luftwaffe durchführen (Berechnung von Strömungen an Tragflächen und Schwingungseinflüssen bei Flugzeugen u. ä.). Gegen Ende des Krieges wurde er dennoch eingezogen und im Wetterdienst der Luftwaffe eingesetzt. Hans Maaß geriet im Frühjahr 1945 in amerikanische Gefangenschaft, konnte jedoch seine Lehrtätigkeit zum 1.12.1945 wieder aufnehmen, nachdem er vor der amerikanischen Militärbehörde als „conditional excepted” eingestuft worden war. Auf Vorschlag von H. Seifert und W. Threlfall wurde Hans Maaß 1948 zum planmäßigen Extraordinarius ernannt. Über die Nachkriegszeit führt Hans Maaß in seiner Antrittsrede in der Heidelberger Akademie aus:

> *„... Es war ein beglückendes Gefühl, mit einer Jugend zusammenarbeiten zu können, die jahrelang alles hatte entbehren müssen und die nun in großer Erwartung mit dem Vorsatz, Versäumtes nachzuholen, zur Universität strömte. In den ersten Nachkriegsjahren wurde an dem relativ kleinen Mathematischen Institut mit unvergleichlicher Intensität gearbeitet. ...“*

Schon in seiner Habilitationsschrift *„Zur Theorie der automorphen Funktionen in n Veränderlichen”* [5] hatte Hans Maaß mit einer auf C.L. Siegel zurückgehenden Idee die Struktur gewisser Körper automorpher Formen bestimmt. Unmittelbar nach Siegels Rückkehr von Princeton nach Göttingen lud ihn Maaß zu einem Kolloquiumsvortrag nach Heidelberg ein. Wir zitieren wieder aus der Akademierede:

> *„... Zu Beginn der fünfziger Jahre traf ich zum erstenmal mit Carl Ludwig Siegel zusammen, der durch sein Werk und die Ausstrahlung seiner Persönlichkeit wie kein anderer Einfluß auf meine Entwicklung genommen hat... . Unsere erste Begrüßung glich der alter Freunde. Es wird unverständlich bleiben, warum ich einem Ruf nach Göttingen und damit einem Ruf Siegels nicht gefolgt bin ....“*

Mit C.L. Siegel verband H. Maaß bis zum Tod von Siegel im Jahre 1981 eine enge persönliche und wissenschaftliche Beziehung. Nach Ablehnung des Rufes nach Göttingen wurde Hans Maaß am 12.6.1958 zum ordentlichen Professor an der Universität Heidelberg ernannt.

Hans Maaß war mehrfach Dekan der naturwissenschaftlich-mathematischen bzw. der mathematischen Fakultät.

Im Wintersemester 1962/63 weilte Hans Maaß am Tata Institute of Fundamental Research in Bombay als Gastprofessor. Dieser Gastprofessur war bereits eine solche im Wintersemester 1954/55 vorausgegangen. Bereits aus dieser Zeit stammt die freundschaftliche Verbundenheit von Hans Maaß mit K. Chandrasekharan, dem Begründer der Mathematischen Schule des Instituts und wohl auch die Liebe von Hans Maaß zur asiatischen Kunst und Musik. Ein weiterer für ihn ergiebiger, aber anstrengender Gastaufenthalt im Wintersemester 1969/70 führte ihn an die University of Maryland (USA). Dies war unmittelbar nach seiner zweiten Amtszeit als Dekan der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät, die ihn als Mitglied der Grundordnungsversammlung aufgrund der harten politischen Auseinandersetzungen um die Strukturreform der Universität und ihrer Gremien viel Kraft gekostet hat. Aus der Zeit in Maryland stammt auch eine enge persönliche und wissenschaftliche Verbindung zu Reinhold Remmert.

Anfang der siebziger Jahre hielt Robert P. Langlands (Institute for Advanced Studies, Princeton) auf Einladung von Hans Maaß eine Gastvorlesung über Zetafunktionen am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg. Maaß hielt im gleichen Semester eine Vorlesung über Modulformen und Dirichlet-Reihen. Jeder besuchte die Vorlesung des anderen. Die Überschneidungen bei den Resultaten waren groß, die Methoden allerdings völlig verschiedenen.

Von Beginn der siebziger Jahre an weilte auch Anatoli N. Andrianov (St. Petersburg) mehrfach auf Einladung von Hans Maaß als Gastprofessor in Heidelberg. Maaß schätzte die „solide Mathematik" von Andrianov, und es verband ihn mit Andrianov über seine Emeritierung hinaus eine enge wissenschaftliche und freundschaftliche Beziehung.

1974 wurde H. Maaß Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, die Indian National Science Academy ernannte ihn 1983 zum „foreign fellow".

Nach 44 Dienstjahren im öffentlichen Dienst wurde Hans Maaß mit Ablauf des Sommersemesters 1979 emeritiert. Dieses Jahr bedeutete aber nicht das Ende seiner wissenschaftlichen Aktivitäten. Solange es seine Kräfte zuließen, nahm Hans Maaß lebhaften Anteil an der Entwicklung seines Arbeitsgebiets, er nahm weiterhin an Oberseminaren und Arbeitsgemeinschaften teil, und wie in der Würdigung seines wissenschaftlichen Werkes ausgeführt, stammen wichtige Arbeiten aus der Zeit nach seiner Emeritierung.

Die wissenschaftlichen Arbeiten und Vorlesungsausarbeitungen von Maaß zeichneten sich durch hohe Dichte und Vollständigkeit bis ins Detail aus. Ähnlich waren seine Vorlesungen stets perfekt mit lückenlosen Beweisen ausgearbeitet. Dabei spielte es keine Rolle, ob es sich um eine Anfängervorlesung oder eine Spezialvorlesung handelte, beiden widmete er sich mit gleichem leidenschaftlichem Engagement. Doch stellten seine Vorlesungen durch ihren Inhaltsreichtum hohe Anforderungen an die Hörer, den bequemen Weg gab es bei ihm nicht, wohl ein Umstand, daß Maaß eine relativ geringe Zahl von Schülern hatte. Wer seinen Ideen folgte, konnte sich jedoch unerschütterlicher Unterstützung gepaart mit hoher Toleranz sicher sein.

Hans Maaß war zweimal verheiratet, aus beiden Ehen stammen insgesamt fünf Söhne.

Hans Maaß verstarb am 15.4.1992 in Heidelberg. Sein bescheidenes, aber bestimmtes Auftreten, seine durch Geradlinigkeit und Korrektheit gekennzeichnete Haltung, seine exzellenten Fähigkeiten als akademischer Lehrer, die intensive Betreuung und Unterstützung seiner Schüler, haben ihm Respekt und Achtung unter Kollegen, Freunden und Schülern eingebracht.

Mit Herbert Seifert und F.K. Schmidt hat er die Struktur des Mathematischen Instituts der Universität Heidelberg wesentlich mitgeprägt und die heutige Struktur der Fakultät für Mathematik an der Universität Heidelberg vorgeprägt.

Das wissenschaftliche Werk

Die erste wissenschaftliche Publikation von H. Maaß *„Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen“* weist Maaß als einen Schüler E. Artins aus. Auf Anregung Artins bewies Maaß in dieser Arbeit, welche 1937 in den Hamburger Abhandlungen erschien, daß für jede einfache Algebra S über einem Zahlkörper k mit zyklischem Zentrum der Normensatz gilt: Ein Element $a \in k$ ist genau dann Norm eines Elements von S, wenn dies an jeder Stelle von k der Fall ist. Man nennt diese Verallgemeinerung des Hasseschen Normensatzes heutzutage nicht den „Maaßschen Normensatz“, sondern spricht eher von einem Hasseprinzip, wohl zu Recht, denn Maaß erwähnt in einem Zusatz bei der Korrektur, daß eine etwas schwächere Variante dieses Satzes bereits 1936 von Hasse und Schilling publiziert wurde.

Maaß begann also seine wissenschaftliche Laufbahn als Schüler Artins mit rein algebraisch-zahlentheoretischen Fragestellungen. Auch wenn er sich in der Folgezeit mehr analytischen Problemstellungen zuwenden sollte, so war es immer die Verbindung zur Zahlentheorie, die ihn faszinierte und in seinem Werk überall zutage tritt. Maaß sah sich selbst als analytischen Zahlentheoretiker.

Die Zuwendung zu analytischen Fragestellungen, insbesondere zur Theorie der Modulformen, erfolgte unter dem Einfluß von E. Hecke und H. Petersson, dem damaligen Assistenten Heckes. Unter dessen Anleitung entstand seine Dissertation *„Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen“*, welche in zwei Teilen (Hamb. Abh. 1937, Math. Z. 1938) erschien.

Da diese Arbeit für das weitere Schaffen von Maaß richtungsweisend und in gewisser Weise typisch ist, möchten wir auf den ersten Teil etwas genauer eingehen.

In dieser Arbeit wird u.a. ein neuer Beweis für die bekannte Formel der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von drei Quadraten abgeleitet, und nur auf diesen Teil der Arbeit gehen wir ein. Diese Formel wird aus einer funktionentheoretischen Identität

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}\right)^3 = \sum_{(c,d)\ \text{ganz}} \gamma(c,d)\sqrt{c\tau+d}^{\,-3}$$

abgeleitet. Die Koeffizienten $\gamma(c,d)$ werden so eingerichtet, daß die rechte Seite dasselbe Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen hat wie die Thetareihe auf der linken Seite. Das eigentliche Problem liegt in der Interpretation der rechten Seite. Die Wurzel ist zweideutig, und im übrigen konvergiert die Reihe nicht.

Nach einer Vorgehensweise von Hecke ersetzt man nun den Ausdruck $(c\tau+d)^{-3/2}$ durch $(c\tau+d)^{-3/2}|c\tau+d|^{-s}$ und erhält Konvergenz in der Halbebene $\mathrm{Re}\, s > 1/2$. Man setzt diese Funktion von s analytisch fort und betrachtet ihren Wert bei $s=0$. Wenn die so definierte Eisensteinreihe als Funktion von τ analytisch ist, kann man obige Identität mit Standardschlüssen aus der Theorie der Modulformen beweisen. A priori treten jedoch bei der Analyse der Eisensteinreihe nicht-analytische Terme in τ auf. Deren Verschwinden muß man beweisen. Maaß formuliert hierzu:

> „...*Es zeigt sich also hier eine bemerkenswerte Verschränkung zwischen der Aussage, welche natürlichen Zahlen als Summe von drei Quadraten darstellbar sind und der Tatsache, daß eine bestimmte Funktion von τ in τ analytisch wird.*...“

Maaß sieht hier die auftretenden nicht-analytischen Terme noch als Störterme an, derer man sich zu entledigen hat. Erst ein Jahrzehnt später entstanden seine bahnbrechenden Arbeiten, in denen er die Theorie der nicht-analytischen Modulformen begründete.

Doch zunächst widmete er sich Fragen der Grundlegung der Theorie der Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher. Im zweiten Teil seiner Dissertation wurden bereits Hilbertsche Modulformen zweier Veränderlicher untersucht. Die Theorie dieser Modulformen war von Blumenthal begründet worden, doch die Darstellung Blumenthals hatte, was Einfachheit und Exaktheit angeht, ihre Tücken. In einer Reihe von Arbeiten, darunter seine Habilitationsschrift *„Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen“* (Math. Ann. 1940), erbrachte Maaß eine neue Grundlegung und Weiterentwicklung der Blumenthalschen Theorie, beginnend mit der Konstruktion des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe, welcher nach Maaß h Spitzen hat, wenn h die Klassenzahl des zugrunde gelegten total reellen Zahlkörpers bezeichnet. (Blumenthal war irrtümlicherweise davon ausgegangen, daß dieser Fundamentalbereich stets nur eine Spitze hat.) Weitere Untersuchungen betrafen den Nachweis, daß der Körper der Hilbertschen Modulfunktionen ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n ist. Hier stützte sich Maaß auf die neuen Methoden, die Siegel bei der Entwicklung einer funktionentheoretischen Begründung der nach ihm benannten Modulfunktionen verwandte. Maaß hatte bereits in seiner Dissertation analytische Versionen des Siegelschen Hauptsatzes für quadratische Formen kleiner ungerader Variablenzahl abgeleitet. Die Nähe zu Siegels Arbeiten und Denkweise durchzieht das Gesamtwerk von Maaß.

Neben dem Einfluß Siegels auf diese Phase des Schaffens von Maaß muß auch noch der Einfluß Peterssons hervorgehoben werden. Motiviert durch die Arbeiten Peterssons versuchte Maaß die Theorie der Poincaréreihen verschiedener Typen soweit als möglich auf den Hilbertschen (später auch auf den Siegelschen) Fall zu übertragen.

Sein Interesse galt auch immer wieder hiermit zusammenhängenden zahlentheoretischen Fragen, worüber einige Arbeiten zur Arithmetik der quadratischen Formen über quadratischen Zahlkörpern Zeugnis ablegen. Beispielsweise gelang Maaß der Beweis, daß im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ jede ganze total positive Zahl Summe von drei Quadraten ist, und er gab eine Formel für die Anzahl an. Dieser Satz ist umso bemerkenswerter, als es in jedem anderen reell-quadratischen Zahlkörper total positive ganze Zahlen gibt, die sich nicht einmal als Summe von vier Quadraten darstellen lassen. Die von Maaß gegebene Anzahlformel enthält als Hauptfaktor die Klassenzahl eines biquadratischen Zahlkörpers. Dieser Zusammenhang zwischen Klassenzahlen und Darstellungsanzahlen —von Hecke bereits früher vermutet— waren eines der Motive Heckes für das Studium von Klassenzahlen.

Damit kommen wir auf den Einfluß Heckes auf das Werk von Maaß. Bereits 1936 war Heckes fundamentale Arbeit *„Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“* erschienen. In dieser Arbeit entsprechen gewisse Typen von Dirichletreihen mit Funktionalgleichung durch umkehrbare Integraltransformation automorphen Formen. Der Gammafaktor in Heckes Theorie muß mit $\Gamma(s)$ oder mit $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ übereinstimmen.

Die meisten interessanten Zetafunktionen der algebraischen Zahlentheorie können wegen dieser Einschränkung von Heckes ursprünglicher Theorie nicht erfaßt werden. Dies empfand Maaß als einen Mangel. Er formuliert in einer seiner Arbeiten:

> *„... Es erhebt sich nun die Frage, ob die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers einer ähnlichen Behandlung fähig sind, ob es also eine Funktionenklasse gibt, die für die Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers dasselbe leistet, wie die Modulfunktionen für die Zetafunktionen des rationalen und imaginär-quadratischen Zahlkörpers. ...“*

Und Maaß fährt fort *„Das ist in der Tat der Fall ...“* und stellt seine Theorie der nicht-analytischen Modulformen vor.

Dieses Zitat stammt aus der Arbeit *„Über eine neue Art von nicht-analytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen“*, welche 1949 in den Mathematischen Annalen erschien. Doch war dies nicht die erste einer ganzen Reihe von fundamentalen Arbeiten zu diesem Thema. Es gab zwei Vorläuferarbeiten, welche etwas Licht darauf werfen, wie Maaß zu seiner Theorie gekommen sein mag.

In der Arbeit *„Automorphe Formen und indefinite quadratische Formen“* , welche kurz zuvor ebenfalls 1949 in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften erschienen war, ging Maaß von den Zetafunktionen aus, welche Siegel indefiniten quadratischen Formen der Signatur $(2\alpha, 2\beta)$ zugeordnet hatte. Siegels analytische Theorie der quadratischen Formen bringt die Thetareihen, die man diesen quadratischen Formen zuordnen kann, in Verbindung mit nicht-analytischen Eisensteinreihen des Typs

$$\sum (c\tau + d)^{-\alpha}(c\bar{\tau} + d)^{-\beta}.$$

Maaß suchte nach einer Erweiterung des Begriffs der Modulform, durch welchen diese Eisensteinreihen mit erfaßt werden. Um einen Ersatz für die Analytizität zu bekommen, suchte und fand er eine Differentialgleichung, welcher diese Eisensteinreihe genügt. Modulformen des neuen Typs sollen dann allgemein Lösungen dieser Differentialgleichung sein, die dasselbe Transformationsverhalten wie die Eisensteinreihe unter Modulsubstitutionen besitzen. Gelegentlich nennt er diese Modulformen auch *Wellenformen.* Es gelang Maaß, in dieser und der nachfolgenden Arbeit den umkehrbaren Übergang von den Modulformen des neuen Typs zu den Dirichletreihen zu vollziehen. Schließlich entwickelte er die Theorie der Heckeoperatoren in der verallgemeinerten Form und bewies so, daß die neuen Dirichletreihen, wenn sie nicht schon selbst Eulerprodukte sind, sich aus Eulerprodukten linear kombinieren lassen. Maaß hatte damit —einer Formulierung A. Weils zufolge— die Theorie der Modulformen aus dem Prokrustesbett der Funktionentheorie befreit.

Den beiden genannten Arbeiten geht noch eine Arbeit voraus, welche bereits 1946 anläßlich der Tübinger Mathematikertagung unter dem Titel *„Über automorphe Formen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen"* in den Tagungsberichten erschien. Dieser erste Beitrag von Maaß zum Thema der nicht-analytischen Modulformen umfaßt lediglich zwei Seiten. Die Arbeit beginnt ebenfalls mit dem Hinweis auf den Mangel von Heckes Theorie. Als möglicher Ausweg wird vorgeschlagen, zu automorphen Funktionen in mehreren Variablen überzugehen. Ohne weitere Motivation wird vorgeschlagen, als Grundgebiet den reellen hyperbolischen Raum $(x_1, \dots, x_k),\ x_k > 0$, zu nehmen. Als Ersatz für holomorphe Funktionen werden Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta f = \lambda f$$

genommen, wobei Δ der invariante Laplace-Operator sei. Es wird gefordert, daß f unter einem geeigneten Translationsgitter $x \mapsto x+k$ und unter der Spiegelung $x \mapsto \frac{x}{||x||^2}$ invariant ist. Die Fourierkoeffizienten sind konstante Vielfache gewisser Besselfunktionen. Mit diesen Konstanten $a(b)$ werden die Dirichletreihen

$$\sum \frac{P(b)a(b)}{||b||^s}$$

gebildet. Dabei ist P eine Kugelfunktion, die eingebaut wird, um Koeffizienten $a(b)$ zum selben $||b||$ separieren zu können. Die neuen Dirichletreihen genügen Funktionalgleichungen. Dies findet sich alles auf zwei Seiten, ohne weitere Motivation und ohne Beispiele.

Später (1949) wird Maaß diese Arbeit in einer E. Artin gewidmeten Arbeit noch einmal aufgreifen und vertiefen. Dort werden die Picardschen Modulgruppen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum benutzt und als vielleicht wichtigstes Resultat bewiesen, daß gewisse Zetafunktionen zu biquadratischen Erweiterungen Mellintransformierte Picardscher Modulformen sind. Daß die Frage der Beschreibung der Zetafunktionen der algebraischen Zahlentheorie durch automorphe Formen zu einem beherrschenden Thema der Mathematik werden sollte, hat Maaß in diesen Arbeiten sicherlich nicht vorhergesehen. In seiner Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1974) formuliert dies Maaß folgendermaßen: *„Heute gibt es eine umfangreiche Literatur über nicht-analytische automorphe Formen, die weit über das hinausgeht, was ich ursprünglich angestrebt hatte."*

Maaß bezieht sich in seinen späteren Arbeiten wenig auf die kurze Tübinger Arbeit. Es ist eine historische Merkwürdigkeit, daß am Anfang der Untersuchungen von

Maaß zur Theorie der nicht-analytischen Modulformen die Gruppe $\mathrm{SO}(1,n)$ stand, um dies in heute üblicher Sprechweise auszudrücken.

Eine formal vollendete Darstellung seiner Theorie hat Maaß 1953 in der Arbeit „*Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*“ (Math. Annalen) gegeben. Beschränkungen in den Gewichten sind völlig aufgehoben, die Differentialgleichungen erscheinen nun als ein konsistentes Eigenwertproblem eines invarianten Laplace-Operators zweiter Ordnung, welcher sich aus linearen Operatoren zusammensetzt, von Maaß gelegentlich *„Schaukeloperatoren“* genannt. Diese Schaukeloperatoren führen Modulformen in Modulformen über, verändern aber ihr Gewicht. Diese Arbeit stellt wohl einen der Höhepunkte der wissenschaftlichen Arbeit von Maaß dar und auch in der Darstellung, konzentriert und mit lückenlosen Beweisen, hatte Maaß zu höchster Meisterschaft gefunden.

Die nachfolgende Arbeit „*Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen*“ erschien ebenfalls in den Annalen drei Jahre später, eine für Maaß lange Zeitspanne, die mit den enormen technischen Schwierigkeiten zusammenhängt, mit denen Maaß zu kämpfen hatte, um seine Theorie der Differentialgleichungen auf den symplektischen Fall zu übertragen.

An dieser Stelle muß auf einen anderen Aspekt des Werkes von Maaß eingegangen werden. Wir haben bereits gesehen, daß Maaß an automorphen Funktionen in mehreren Variablen interessiert war und eine Reihe von wichtigen Arbeiten über Hilbertsche Modulformen geschrieben hat. Etwa 1950 wandte er sich den Siegelschen Modulfunktionen zu. Siegel und Maaß verband seit Beginn der fünfziger Jahre eine enge Freundschaft, die bis zum Tode Siegels (1981) dauerte. Siegel nahm durch sein Werk und die Ausstrahlung seiner Persönlichkeit —so formulierte es Maaß in der bereits erwähnten Heidelberger Antrittsrede— wie kein anderer Einfluß auf seine Entwicklung. Am Rande sei erwähnt, daß Maaß bereits 1942 in der Arbeit *„Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum“* die metrische Grundform der symplektischen Geometrie eingeführt und explizite Parameterdarstellungen ihrer Geodätischen angegeben hat. Unter den Arbeiten über die allgemeine Theorie der analytischen Siegelschen Modulformen ist die Arbeit *„Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen“* hervorzuheben, hatte doch der Darstellungssatz von Modulformen genügend großen und geraden Gewichts zur Folge, daß der Siegelsche Spezialisierungsoperator, welcher Modulformen n-ten Grades in solche $(n-1)$-ten Grades überführt, in diesen Gewichten surjektiv ist. Eine andere Anwendung dieses Darstellungssatzes gab Maaß in der Arbeit *„Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulformen“*. In dieser Arbeit benutzte Maaß den Darstellungssatz, um ein Vertauschungsgesetz für Heckeoperatoren und Siegelschem Spezialisierungsoperator zu beweisen. Diese Arbeit ist der erste tiefere Beitrag zur Theorie der Heckeoperatoren im Siegelschen Fall.

Maaß war, wie wir wissen, stets an Zetafunktionen interessiert und damit natürlich mit Fragen konfrontiert, wie Siegelsche Modulfunktionen —sowohl analytische als auch nicht-analytische— und Zetafunktionen zusammenhängen. Wir wissen, daß Maaß zu den nicht-analytischen Modulformen u.a. über die Zetafunktionen gestoßen war, welche Siegel indefiniten quadratischen Formen zugeordnet hatte. Diese

Zetafunktionen hängen ähnlich wie die Epsteinschen Zetafunktionen mit Fragen der räumlichen Verteilung von Punkten eines Gitters zusammen. Es lag nahe, diese Zetafunktionen dahingehend zu verallgemeinern, daß auch die Verteilung von Untergittern eines Gitters analytisch erfaßt werden konnte. Die beiden Fragen sind formal voneinander unabhängig, aber, wie man vom Fall einer Variablen her weiß, eng miteinander korrelliert. Die analytischen Schwierigkeiten, denen sich Maaß gegenübersah, waren nur schwer zu überwinden, und die Arbeiten, die Maaß zu diesen Themenkreisen in den fünfziger Jahren, vor allem 1955-1960 verfaßte, gehören zu den technisch schwierigsten, die er verfaßt hat. Wenden wir uns zunächst der ersten Frage zu. Es war in den Anfängen der Theorie nicht klar, wie man selbst holomorphen Siegelschen Modulformen Zetafunktionen zuordnen sollte. Man konnte daran denken, diese Zetafunktionen aus den Fourierkoeffizienten der Siegelschen Modulformen zu bilden, und dies war ein Themenkreis, der Maaß stets interessierte. Ein anderer naheliegender Gedanke, die Zetafunktionen aus den Eigenwerten der Heckeoperatoren zu bilden, konnte erst dann realisiert werden, als die Theorie der Heckeoperatoren im höherdimensionalen Fall formal in geeigneter Form entwickelt war. Dies sollte geraume Zeit dauern. Wir wissen, daß gerade dieser Aspekt der automorphen Zetafunktionen für die Zahlentheorie eine ungeahnte Bedeutung erlangt hat und zu einer gewaltigen Theorie geführt hat, die Maaß zwar angestoßen aber nicht eigentlich entwickelt hat. Hier sind andere Namen wie Andrianov und vor allem Langlands zu nennen. Was jedoch die Zetafunktionen angeht, die man den Fourierkoeffizienten der Siegelschen Modulformen zuordnen kann, so sind die Arbeiten von Maaß immer noch aktueller Standard. Ein Teil dieser Arbeiten fand in den Springer lecture notes 216 (1971) „*Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*“ eine abschließende Darstellung. Im §15 werden einer Siegelschen Modulform mit Fourierkoeffizienten $a(T)$ (die Indizes durchlaufen ein Gitter symmetrischer Matrizen) die Zetafunktionen

$$D(s,u) = \sum_{\{T>0\}} \frac{a(T)u(T)}{\varepsilon(T)|T|^s}$$

zugeordnet. Dabei ist $\varepsilon(T)$ lediglich die Zahl der Einheiten der quadratischen Form T. Die Funktion $u(T)$ wird eingeführt, um Koeffizienten $a(T)$ mit gleicher Determinante T separieren zu können. Man will schließlich die Modulform aus den assoziierten Dirichletreihen rekonstuieren können. In Analogie zu Heckeschen L-Funktionen, welche mit der Hilbertschen Modulgruppe in Verbindung stehen, nannte er diese Funktionen Größencharaktere. Diese sollten in erster Linie invariant unter der unimodularen Gruppe und homogen vom Grade 0 sein. Damit diese Funktionen ein vernünftiges analytisches Verhalten bekommen, beschränkt man sich auf Eigenfunktionen invarianter Differentialoperatoren, wobei man im Hintergrund bedenken muß, daß man jede Funktion u nach Eigenfunktionen spektral entwickeln kann. Diese Eigenfunktionen sind in heutiger Sprechweise Modulformen auf der Gruppe $\mathrm{SL}(n)$. Im Falle $n = 2$ sind das genau die Wellenformen. Der Beweis der analytischen Fortsetzung und Funktionalgleichung dieser Dirichletreihen war das Resultat jahrelanger schwerer Arbeit, ebenso wie die der Zetafunktionen, die Maaß den erwähnten Gitterproblemen zuordnete.

Auf diese wurde Maaß über folgendes zahlentheoretische Problem geführt. Gegeben ist eine positiv definite m-reihige reelle Matrix S. Man will ganzzahlige Darstellungen $S[G] = T$ studieren, wobei T eine n-reihige Matrix ist. Man gibt sich zwei Bereiche A und B vor. A ist ein Teilkegel des Minkowskikegels im Bereich der positiven n-reihigen Matrizen und B ist ein Teilbereich im Raum aller reellen $m \times n$-Matrizen, welcher unter der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bei Rechtsmultiplikation invariant ist. Das zahlentheoretische Problem besteht nun darin, die Asymptotik in t der Anzahl der ganzen Darstellungen

$$S[G] = T \quad \text{mit} \quad T \in \mathrm{A},\ G \in \mathrm{B} \quad \text{und} \quad |T| = t$$

zu studieren. Die Idee ist es, Taubersätze auf Dirichletreihen

$$\sum_{\{G\}} \frac{w_0(QG)u(S[G])}{|S[G]|^{s+k}} \quad (S = Q'Q)$$

anzuwenden. Die Funktionen w_0 und u werden aus den charakteristischen Funktionen der Bereiche A und B gebildet. Um vernünftige analytische Eigenschaften zu bekommen, führt man eine Approximation durch und ersetzt u durch einen Größencharakter. Um den „Winkelbereich“ B analytisch erfassen zu können, approximiert man seine charakteristische Funktion durch Polynome w_0 mit der Eigenschaft $w_0(XV) = |V|^{2k} w_0(X)$. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Klasse dieser Polynome nicht allgemein genug ist, um Konsistenz in dem gesamten Formalismus zu erhalten. Man muß allgemeiner Polynome zulassen, welche von rechts lediglich unter der orthogonalen Gruppe invariant sind. Maaß verwendete einen raffinierten Trick, um diese Polynome zu beschreiben. Sei L ein Differentialoperator, welcher als Polynom in $X \frac{\partial}{\partial X'}$ geschrieben werden kann. Dann ist durch

$$L e^{-\pi\sigma(X'X)} = w_0(X) e^{-\pi\sigma(X'X)}$$

ein Polynom w_0 mit dieser Invarianzeigenschaft definiert und man erhält jedes invariante Polynom w_0 auf diesem Wege. Die Zerlegungstheorie der Polynome in einer Matrixvariablen $X = X^{(m,n)}$, welche unter der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(m)$ von rechts invariant sind, insbesondere ihr Aufbau aus harmonischen Polynomen, ist schwierig. Maaß hat dieses algebraische Problem in mehreren Arbeiten aufgegriffen. Man hat heutzutage einen einfacheren Zugang zu dieser Theorie, welcher darauf beruht, daß man die Darstellung der Gruppe $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{O}(n)$ auf dem Raum der Polynome $P(X^{(m,n)})$ studiert und mittels der Theorie der Höchstgewichte in irreduzible Komponenten zerlegt. Maaß lagen darstellungstheoretische Methoden fern, er bevorzugte die Sprache der Differentialoperatoren, zu der er selbst soviel beigetragen hat. Wie man weiß, hat die Darstellungstheorie an allen Ecken und Enden in der Theorie der Modulformen Einzug gehalten. Maaß hat manches, was später darstellungstheoretisch „neuentdeckt“ wurde, zumindest in Ansätzen vorweggenommen. Ein schönes Beispiel hierzu ist die Arbeit „*Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades*“, welche 1973 in den Acta Arithmetica erschienen ist. In dieser Arbeit werden analytische

Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{\{N\}>0} \frac{a(N)\overline{b(N)}}{\varepsilon(T)|N|^s}$$

bewiesen, wobei $a(N)$ und $b(N)$ die Fourierkoeffizienten zweier Siegelscher Modulformen zweiten Grades gleichen Gewichts seien. Beim Beweis werden Eisensteinreihen zur symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2)$ und zur orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2,2)$ miteinander in Verbindung gebracht. Es wird gezeigt, daß beide durch eine Integraltransformation mit einem Thetakern ineinander überführt werden könnnen. Daß Modulformen zur orthogonalen und symplektischen Gruppe mittels Thetakernen ineinander transformiert werden können, ist heutzutage ein eigenständiges umfangreiches Teilgebiet in der Theorie der automorphen Formen geworden, wobei manchmal vergessen wird, daß Maaß auch hier Pionierarbeit geleistet hat.

Der eben angesprochene „Thetalift“ ist wiederum ein Spezialfall eines allgemeinen Funktorialitätsprinzips, welches es nach den Vorstellungen von Langlands erlaubt, Modulformen zwischen verschiedenen Gruppen hin- und herzuschieben. Dieses Funktorialitätsprinzip ist eine der großen offenen Fragen der gegenwärtigen Theorie der automorphen Formen und konnte bislang nur in Spezialfällen ausgearbeitet werden. In einem wichtigen Fall sollte Maaß —fast siebzigjährig— nocheinmal bahnbrechende Ideen entwickeln und Resultate erzielen. Es handelt sich um seine vier Arbeiten zum „Kurokawa-Lift“, welche 1979 und 1980 in den Inventiones erschienen sind, die erste unter dem Titel *„Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades“*. Ausgangspunkt wie mehrmals in seinem wissenschaftlichen Werk war wiederum das detaillierte Studium von Eisensteinreihen, diesmal der Siegelschen Eisensteinreihen zur Modulgruppe zweiten Grades. In zwei Arbeiten aus den Jahren 1964 und 1972 in der dänischen Zeitschrift Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk berechnete Maaß die sogenannte singuläre Reihe und kam so zu einem expliziten Ausdruck für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe. Als Folge leitete Maaß die Relation

$$a(T) = \sum_{\substack{d|n,\, m,\, t \\ d>0}} d^{k-1} a\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2d} \\ \frac{t}{2d} & \frac{nm}{d^2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix},$$

für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe ab. Computerrechnungen von Resnikoff und Saldana legten nahe, daß solchen Relationen auch manche Spitzenformen genügen können. Maaß faßte alle Modulformen dieser Art zu seiner „Spezialschar“ zusammen. Eine Vermutung von Kurokawa und die Arbeiten von Maaß erbrachten schließlich ein faszinierendes Bild. Die Spezialschar ist isomorph zu einem Vektorraum elliptischer Modulformen. Dieser „Lift“ elliptischer Modulformen zu Siegelschen Modulformen führt Hecke-Eigenformen in Hecke-Eigenformen über und läßt sich auch über die Zetafunktionen, die diesen Modulformen zugeordnet werden, beschreiben, nebenbei im Einklang mit Langlands allgemeinem Funktorialitätsprinzip. Maaß verdankte die Vertrautheit mit der schwierigen Teorie der Zetafunktionen, welche man den Eigenwerten Siegelscher Eigenformen zuordnen kann, den Arbeiten Andrianovs mit dem er bis zu seinem Tode freundschaftlich verbunden war.

Die Arbeiten von Maaß über seine Spezialschar stellen sicherlich ein außergewöhnliches Beispiels für schöpferische Schaffenskraft eines Mathematikers in schon vorgerücktem Alter dar.

Schon über siebzigjährig publizierte Maaß die Arbeit „*Über eine Kennzeichnung der Koecherschen Dirichletreihen mit Funktionalgleichung*" (Math. Ann. 1982), einen Beitrag zur Charakterisierung der reell-analytischen Eisensteinreihen zur Siegelschen Modulgruppe durch seine Differentialoperatoren. Dieses Problem ist bis heute ungelöst, Maaß gelang in dieser Arbeit wenigstens die Charakterisierung des nullten Fourierkoeffizienten.

Maaß hat neben seinen in Zeitschriften publizierten Arbeiten auch einige wichtige Monographien verfaßt. Zur Standardliteratur gehören seine beiden Tata-lecture notes „*Lectures on Siegel's Modular Functions*" und „*Lectures on Modular Functions of One Complex Variable*" aus den Jahren 1954 und 1964. Beide entstanden aus Vorlesungen am Tata Institute of Fundamental Research in Bombay. Auf diese Aufenthalte geht auch die enge Freundschaft mit Chandrasekharan zurück. Die zweite dieser Vorlesungen erschien 1983 in revidierter Form beim Springer-Verlag. Die Monographie „*Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*" (Springer Lecture Notes 216, 1971) entstand bei Gastvorlesungen an der University of Maryland. Diese letze große Reise kostete Maaß viel Kraft. „*Ungestraft treibt niemand Raubbau mit seinen Kräften.*", formulierte er in der Antrittsrede bei der Heidelberger Akademie.

Anläßlich einer Würdigung des wissenschaftlichen Werkes von Maaß dürfen auch seine Vorlesungsausarbeitungen nicht unerwähnt bleiben, die —zum Teil handschriftlich— zum wertvollen Bestand der Bibliothek der Fakultät für Mathematik der Universität Heidelberg gehören.

Von Hans Maaß betreute Dissertationen

1. Herrmann, Oskar: *Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung (1953)*
2. Roelcke, Walter: *Uber die Wellengleichung der Grenzkreisgruppen erster Art (1954)*
3. Becker, Hugo: *Poincarésche Reihen zur hermiteschen Modulgruppe (1954)*
4. Freitag, Eberhard: *Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper (1966)*
5. Busam, Rolf: *Eine Verallgemeinerung der Dimensionsformeln von Shimizu (1970)*
6. Bauhoff, Eugen Peter: *Konstruktion von Nichtkongruenzgruppen in Picardschen Modulgruppen (1970)*
7. Hoppe, Klaus: *Über die spektrale Zerlegung der algebraischen Formen auf der Graßmann-Mannigfaltigkeit (1971)*
8. Neunhöffer, Helmut: *Über die analytische Fortsetzung der Poincaré-Reihen (1972)*

Wissenschaftliche Veröffentlichungen

BÜCHER

Lectures on Siegel's Modular Functions (Notes by T.P. Srinivasan). – Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1954–1955

Lectures on Modular Functions of One Complex Variable (Notes by Sunder Lal). – Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1964; Berlin u.a.: Springer 1983 (rev.)

Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series: Course given at the University of Maryland, 1969–1970. – Berlin u.a.: Springer 1971 (Lecture Notes in Mathematics, vol. 216)

zus. mit Komaravolu Chandrasekharan (Hrsg.): *Carl Ludwig Siegel: Gesammelte Abhandlungen.* – Berlin u.a.: Springer – Bände I–III: 1966 – Band IV: 1979

ABHANDLUNGEN

1. *Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen* in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität **12** (1937), 64–69
2. *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen* (Dissertation, 1. Teil) in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität **12** (1937), 133–162
3. *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen* (Dissertation, 2. Teil) in: Mathematische Zeitschrift **43** (1938), 709–738
4. *Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen* in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1940, 2. Abhandlung
5. *Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen* (Habilitationsschrift) in: Mathematische Annalen **117** (1940), 538–578

6. *Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper* $R(\sqrt{5})$ in: Mathematische Annalen **118** (1941), 65–84
7. *Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers* $R(\sqrt{5})$ *als Summe von drei Quadraten* in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität **14** (1941), 185–191
8. *Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum* in: Mathematische Annalen **118** (1942), 312–318
9. *Theorie der Poincarśchen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe* in: Mathematische Annalen **118** (1942), 518–543
10. *Über automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen* in: Berichte über die Math.-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. Sept. 1946 (herausgeg. v. Math. Inst. d. Univ. Tübingen), 100–102
11. *Quadratische Formen über quadratischen Körpern* in: Mathematische Zeitschrift **51** (1948), 233–254
12. *Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe* in: Mathematische Zeitschrift **51** (1948), 255–261
13. *Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen* in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1949, 1. Abhandlung
14. *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen* in: Mathematische Annalen **121** (1949), 141–183
15. *Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen* in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** (1949), 72–100
16. *Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen* in: Mathematische Annalen **122** (1950), 90–108
17. *Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen* in: Mathematische Annalen **123** (1951), 125–151
18. *Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen* in: Mathematische Annalen **124** (1951), 87–122
19. *Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen* in: Mathematische Annalen **125** (1953), 235–263
20. *Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen* in: Mathematische Annalen **126** (1956), 44–68
21. *Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen* in: Mathematische Zeitschrift **58** (1953), 385–390
22. *Die Bestimmung der Dirichletreihen mit Größencharakteren zu den Modulformen n-ten Grades* in: Journal of the Indian Mathematical Society **19** (1955), 1–23

23. *Differentialgleichungen und automorphe Funktionen* in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, Amsterdam September 2 – September 9, Vol. III, 34–39

24. *Spherical Functions and Quadratic Forms* in: Journal of the Indian Mathematical Society **20** (1956), 117–162

25. *Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen* in: Mathematische Annalen **134** (1957), 1–32

26. *Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen* in: Mathematische Annalen **135** (1958), 391–416

27. *Zur Theorie der harmonischen Formen* in: Mathematische Annalen **137** (1959), 142–149

28. *Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter* in: Mathematische Annalen **137** (1959), 319–327

29. *Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik* in: Mathematische Annalen **138** (1959), 287–315

30. *Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe* in: Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, II. Mathematisch-physikalische Klasse, 1964, Nr. 11, 125–135

31. *Über die gleichmäßige Konvergenz der Poincarschen Reihen n-ten Grades* in: Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, II. Mathematisch-physikalische Klasse, 1964, Nr. 12, 137–144

32. *Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades* in: Matematisk-fysike Meddelelser (udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab) **34** (1964), Nr. 7

33. *Modulformen zu indefiniten quadratischen Formen* in: Mathematica Scandinavica **17** (1965), 41–55

34. *Some Remarks on Selberg's Zeta Functions* in: Several Complex Variables I, Maryland 1970, Proceedings of the International Mathematical Conference, held at College Park, April 6–17, 1970, edited by John Horvth, Berlin u.a.: Springer 1970 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 155), 122–131

35. *Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades* in: Matematisk-fysike Meddelelser (udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab) **38** (1972), Nr. 14

36. *Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades* in: Acta Arithmetica **24** (1973), 225–238

37. *Indefinite quadratische Formen und Eulerprodukte* in: Communications on Pure and Applied Mathematics **24** (1976), 689–699

38. *Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen* in: Mathematische Annalen **226** (1977), 275–284

39. *Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades* in: Mathematische Annalen **232** (1978), 163–175

40. *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades* in: Inventiones mathematicae **52** (1979), 95–104
41. *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (II)* in: Inventiones mathematicae **53** (1979), 249–253
42. *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (III)* in: Inventiones mathematicae **53** (1979), 255–265
43. *Über ein Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa* in: Inventiones mathematicae **60** (1980), 85–104
44. *Harmonische Formen in einer Matrixvariablen* in: Mathematische Annalen **252** (1980), 133–140
45. *Über eine Kennzeichnung der „Koecherschen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung"* in: Mathematische Annalen **260** (1982), 119–131

VORLESUNGSMANUSKRIPTE (Mathematisches Institut der Universität Heidelberg)

1. Analytische Zahlentheorie I, SS 1950
2. Analytische Zahlentheorie II, WS 1950/51
3. Algebraische Zahlen, WS 1950/51
4. Funktionentheorie I, WS 1948/49
5. Funktionentheorie II, SS 1949
6. Funktionentheorie III, WS 1949/50
7. Algebraische Funktionen, SS 1948
8. Differentialgleichungen I, WS 1951/52
9. Differentialgleichungen II, SS 1952