Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe.

Von

Hans Maaß in Heidelberg.

Die Frage nach der Darstellbarkeit automorpher Formen zur Hilbertschen Modulgruppe durch explizite analytische Ausdrücke kann insofern als gelöst betrachtet werden, als bewiesen wurde[1]), daß die Poincaréschen Reihen zu den parabolischen Fixpunkten bereits alle automorphen Formen von der Dimension $-r < -2$ zu einem Multiplikatorsystem v vom Betrag Eins darstellen. Der etwas komplizierte Bau dieser Poincaréschen Reihen ist dadurch bedingt, daß jeder parabolische Fixpunkt der Hilbertschen Modulgruppe (im Fall der Variablenzahl $n > 1$) zugleich hyperbolischer Fixpunkt ist. Hält man Umschau nach einfacheren Grundelementen für die Theorie der automorphen Formen, so wird man zunächst darauf geführt, die zahlreichen Typen Poincaréscher Reihen systematisch auf ihre Leistungsfähigkeit zu untersuchen. Es ist Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes, für zwei bisher noch nicht betrachtete Typen die analoge Theorie zu entwickeln, wie sie für die Reihen zu den parabolischen Fixpunkten bereits bekannt ist[1]). Es handelt sich dabei erstens um die Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen, zweitens um die Reihen zu den inneren Punkten des Bereichs $\mathfrak{H}$, definiert durch

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{Im}\, \tau^{(\nu)} > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Zuordnung von Poincaréschen Reihen zu Fixpunktsystemen bzw. Punkten ist im Sinne des von H. Petersson beschriebenen Prinzips der Erzeugung Poincaréscher Reihen zu verstehen[2]). Im Falle einer Veränderlichen ($n = 1$) ist die Theorie der beiden genannten Typen von H. Petersson bereits vollständig entwickelt und niedergelegt[2]). Die Art des Vorgehens bewährt sich auch im Fall mehrerer Veränderlicher ($n > 1$). Es zeigt sich jedoch, daß in diesem Fall die Mannigfaltigkeit der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen, die frei von parabolischen Fixpunkten sind, wesentlich größer ist als im Fall $n = 1$. Der Grund liegt darin, daß nicht alle

---

[1]) H. Maaß, Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Annalen **117** (1940), S. 538—578.

[2]) H. Petersson, Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ. **14** (1941), S. 22—60.

Konjugierten $S^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, einer hyperbolischen Substitution S aus der Hilbertschen Modulgruppe selbst hyperbolisch zu sein brauchen. Kommen genau t hyperbolische Konjugierte von S vor und sind dies etwa die t ersten, so sind die restlichen $(n-t)$ Konjugierten elliptisch. Für t sind alle Werte der Reihe $1, 2, \ldots, n$ möglich. Betrachtet man die Poincaréschen Reihen zu dem Fixpunktsystem von S, so liefert $t = n$ das Analogon zum Peterssonschen Ξ-Typus[2]), während die Reihen zu $1 \leqq t < n$ eine Mischung von Ξ- und Ψ-Typus[2]) darstellen. In den t ersten Veränderlichen haben sie nämlich den Charakter einer Ξ-Reihe, in den $(n-t)$ letzten Veränderlichen dagegen den Charakter einer Ψ-Reihe. $t = 0$ bedeute, daß an Stelle des Fixpunktsystems einer hyperbolischen Substitution ein beliebiger innerer Punkt von $\mathfrak{H}$ tritt. Die zugehörigen Poincaréschen Reihen stellen den zweiten zu untersuchenden Typus dar und sind das Analogon zum Ψ-Typus. Im Verlauf der Untersuchung wird ein Formalismus entwickelt, der eine einheitliche Behandlung aller Fälle $0 \leqq t \leqq n$ gestattet. Was die Allgemeinheit der Ansätze anbelangt, so sind sie natürlich für eine beliebige diskontinuierliche hyperabelsche Gruppe durchführbar, sofern nur für diese Gruppen bezüglich ihrer hyperbolischen Fixpunktsysteme ähnliche Vollständigkeitsannahmen gemacht werden, wie sie bei der Definition der parabolischen Spitzen notwendig sind[3]). Um aber klare Voraussetzungen zu schaffen, wollen wir uns auf die Hilbertsche Modulgruppe und ihre Untergruppen von endlichem Index beschränken. Mit $\mathbf{G}$ soll, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, eine solche Untergruppe bezeichnet werden. Die Untersuchung liefert im einzelnen folgende Resultate:

Es sei $\mathfrak{s}$ für $t > 0$ das System derjenigen Fixpunkte einer hyperbolischen Transformation $S \subset \mathbf{G}$, welche auf dem Rand von $\mathfrak{H}$ liegen. $\mathfrak{s}$ enthalte keine parabolischen Fixpunkte und unter den Konjugierten von S mögen genau t selbst hyperbolisch sein (etwa die t ersten). Die Punkte $\tau \subset \mathfrak{s}$ sind dann von der Gestalt

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\tau^{(\nu)} = \tau_0^{(\nu)} \text{ oder } \tau_0^{(\nu)\prime} \text{ (reell) für } \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ t,\\ &\tau^{(\nu)} = \tau_0^{(\nu)} \text{ (mit pos. Imaginärteil) für } \nu = t+1,\ t+2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}$$

Im Fall $t = 0$ bestehe $\mathfrak{s}$ aus einem einzigen inneren Punkt τ_0 von $\mathfrak{H}$. Die Transformation

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix}$$

habe die Eigenschaft, den Bereich $\mathfrak{Im}\, \tau^{(\nu)} > 0$ für $\nu \leqq t$ in sich, für $\nu > t$ in den Einheitskreis und $\mathfrak{s}$ in die spezielle Lage:

$$A\tau_0 = 0, \quad A\tau_0' = \infty$$

---

[3]) H. Maaß, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse (1940), 2. Abhandlung.

überzuführen; dabei bedeutet noch $\tau_0^{(\nu)'} = \tau_0^{(\nu)}$ für $\nu > t$. Jede (ganze) automorphe Form $f(\tau) \subset \{\mathsf{G}, -r, v\}$ besitzt eine Entwicklung nach gewissen „Ortsuniformisierenden" $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des Punktssystems $\mathfrak{s}$. Sie hat die Gestalt

$$h(\tau) f(\tau) = \sum b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \omega_1^{k_1 + \varkappa_1} \ldots \omega_t^{k_t + \varkappa_t} \omega_{t+1}^{k_{t+1}} \ldots \omega_n^{k_n}, \tag{3}$$

wobei über alle ganzzahligen k_μ mit

$$-\infty < k_\mu < \infty \text{ für } \mu \leq t \quad \text{und} \quad 0 \leq k_\mu < \infty \text{ für } \mu > t$$

summiert wird. In der Entwicklung (3) ist zur Abkürzung

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \prod_{\nu=1}^{t} (a_1^{(\nu)'}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)'})^{\frac{r}{2}} (a_1^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)})^{\frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} (a_1^{(\nu)'}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)'})^{r}, \\ \omega_\mu &= \prod_{\nu=1}^{t} \left(A^{(\nu)}\tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i m_\mu^{(\nu)}} \qquad \text{für } \mu \leqq t, \\ \omega_\mu &= A^{(\mu)}\tau^{(\mu)} \prod_{\nu=1}^{t} \left(A^{(\nu)}\tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i m_\mu^{(\nu)}} \quad \text{für } \mu > t \end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt. $m_\mu^{(\nu)}$ und $\varkappa_\mu$ sind reelle Konstanten, die nur von G, A, v und einer Basis für die Gruppe $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ der Substitutionen aus G, welche $\mathfrak{s}$ festlassen, abhängen. Durch geeignete Auswahl eines Zweiges der komplexen Logarithmenfunktion wird für die Fixierung der auftretenden vieldeutigen Funktionen gesorgt. Die Reihenentwicklung (3) besitzt in ganz $\mathfrak{H}$ Gültigkeit. Die Funktionalgleichung

$$f(\tau) = \bar{v}(L)\, \mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^{-r} f(L\tau) \qquad (v\bar{v} = 1)$$

für eine Substitution $L \subset \mathsf{G}$ mit der zweiten Zeile $\underline{L} = (\gamma, \delta)$ liefert zu jedem $L \subset \mathsf{G}$ eine neue Entwicklung wie folgt. In der Darstellung, die man für $f(\tau)$ aus (3) nach Division durch $h(\tau)$ erhält, wird τ durch $L\tau$ ersetzt. Das Resultat geht nach Multiplikation mit $\bar{v}(L)\,\mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^{-r}$ wieder in $f(\tau)$ über. $\mathfrak{S}$ sei ein volles System von Substitutionen aus G, für welche auf diese Weise wesentlich verschiedene Entwicklungen entstehen. Setzt man in der Entwicklung zu L formal einen Koeffizienten, etwa $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, gleich 1, alle anderen Koeffizienten gleich 0 und summiert über alle $L \subset \mathfrak{S}$, so entsteht eine Poincarésche Reihe $\Xi_{-r}(\tau) = \Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (k))$. Sie ist für $r > 2$, $|v| = 1$ in ganz $\mathfrak{H}$ konvergent und stellt für jedes mögliche Exponentensystem (k) eine ganze Spitzenform vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ dar. Nunmehr wird auf die Ξ-Reihen die Metrisierungstheorie für die automorphen Formen angewendet. Die Durchführung einer etwas längeren Rechnung ergibt für das Skalarprodukt einer Spitzenform $f(\tau) \subset \{\mathsf{G}, -r, v\}$ mit der Poincaréschen Reihe $\Xi_{-r}(\tau)$ den Wert

$$(f(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (k))) = C b_{k_1 k_2 \ldots k_n}. \tag{5}$$

wobei $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ der Entwicklungskoeffizient von $f(\tau)$ zum Exponentensystem $k_1, k_2, \ldots, k_n$ und $C = C(\mathsf{G}, r, v, A, (k))$ eine elementare Konstante, die sich im wesentlichen aus Werten der Γ-Funktion zusammensetzt. Diese sogenannte Grundformel ist die Quelle aller weiteren Sätze. Aus ihr ergeben sich die Kennzeichnung aller Poincaréschen Reihen $\Xi_{-r}(\tau)$ durch Orthogonalitätsrelationen und der Beweis des Vollständigkeitssatzes, der besagt, daß unter den Poincaréschen Reihen $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (k))$ zu festem A eine Basis für die Schar der Spitzenformen vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ aufgefunden werden kann.

§ 1.

Entwicklungen automorpher Formen zu hyperbolischen Fixpunktsystemen.

Es sei K ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Absolutgrad n, M die (engere) Hilbertsche Modulgruppe zu K und G eine Untergruppe aus M von endlichem Index. Eine hyperbolische Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \mathsf{G}$$

denken wir uns so ausgewählt, daß unter den Fixpunkten von S keine parabolischen vorkommen. Das ist genau dann der Fall, wenn $\gamma \neq 0$ und $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4$ kein Quadrat einer Zahl aus K ist. Die 2^n Fixpunkte τ von S bestimmt man durch die beiden Punkte

$$(6) \qquad \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + \frac{1}{2|\gamma|}\sqrt{\Delta} \\ \tau_0' &= \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} - \frac{1}{2|\gamma|}\sqrt{\Delta} \end{aligned} \qquad (\sqrt{\Delta} > 0 \text{ oder } -i\sqrt{\Delta} > 0),$$

indem man $\tau^{(\nu)} = \tau_0^{(\nu)}$ oder $\tau^{(\nu)'}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ unabhängig voneinander setzt. Es soll nun angenommen werden, daß etwa

$$\Delta^{(\nu)} > 0 \text{ für } \nu \leqq t \quad \text{und} \quad \Delta^{(\nu)} < 0 \text{ für } \nu > t \qquad (t \geqq 1).$$

Infolgedessen sind $\tau_0^{(\nu)}$ und $\tau_0^{(\nu)'}$ für $\nu \leqq t$ reell, für $\nu > t$ dagegen konjugiert komplex. Die 2^t Fixpunkte von S, die auf dem Rand von $\mathfrak{H}$ liegen, werden zu einem System $\mathfrak{s}$ vereinigt. Durch das Fixpunktsystem $\mathfrak{s}$ ist auf Grund von (6) eine quadratische Erweiterung $\Omega = K(\tau_0 - \tau_0')$ über K eindeutig bestimmt. Eine beliebige Zahl $\omega \subset \Omega$ werde durch den erzeugenden Automorphismus von Ω/K in ω' übergeführt. Diese Festsetzung steht im Einklang mit der Zuordnung: $\tau_0 \to \tau_0'$. Ausgehend von $\mathfrak{s}$ bestimmen wir nun die abelsche Gruppe $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ aller Substitutionen aus G, welche $\mathfrak{s}$ festlassen, und beweisen, daß $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ t Substitutionen mit unabhängigen Multiplikatoren enthält. Multiplikatoren λ^2 sollen unabhängig heißen, wenn die zugehörigen Vektoren $\{\log|\lambda^{(1)}|^2, \log|\lambda^{(2)}|^2, \ldots, \log|\lambda^{(n)}|^2\}$ in bezug auf den Körper der reellen Zahlen linear unabhängig sind. Wie man leicht sieht, gibt es höchstens t Substitutionen in $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ mit unabhängigen Multiplikatoren. Um die erste der Behauptungen einzusehen, beachten wir, daß jede Substitution $L \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s})$ in der Gestalt

$$L = Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}Q \quad \text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix}1 & -\tau_0\\ 1 & -\tau_0'\end{pmatrix} \tag{7}$$

angesetzt werden kann; dabei ist λ^2 der Multiplikator von L. Sind α und δ die Diagonalelemente von L, so ist offenbar $\alpha + \delta = \lambda + \lambda^{-1}$ oder

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\,\lambda + 1 = 0,$$

d. h. λ eine Einheit aus Ω mit Relativnorm 1:

$$\lambda\lambda' = 1. \tag{8}$$

Es genügt, den beabsichtigten Beweis für die Hilbertsche Modulgruppe M an Stelle von G zu führen; denn eine geeignet hohe Potenz einer jeden Substitution aus M liegt ja auch in G. Wir müssen also Einheiten $\lambda \subset \Omega$ mit Relativnorm 1 derart bestimmen, daß die Koeffizienten von L nicht nur, wie aus der Darstellung (7) leicht zu ersehen ist, in K liegen, sondern überdies ganze Zahlen sind. Das ist bestimmt dann der Fall, wenn für ein gewisses auftretendes ganzes Nennerideal $\mathfrak{a} \subset \Omega$ die Kongruenz

$$\lambda \equiv 1\ (\mathfrak{a}) \tag{9}$$

befriedigt wird. Die Frage nach Substitutionen mit unabhängigen Multiplikatoren läuft also darauf hinaus, unabhängige Einheiten in Ω zu finden, welche den Bedingungen (8) und (9) genügen. Nach Dirichlet ist die genaue Anzahl der Grundeinheiten in Ω gleich $n - 1 + t$, also um t größer als die Anzahl der Grundeinheiten in K. Elementare Überlegungen liefern dann t unabhängige Einheiten λ mit den Eigenschaften (8) und (9). Damit ist nun die Behauptung über $\mathsf{A}(\mathfrak{s}) \subset \mathsf{G}$ bewiesen. $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_t^2$ sei eine multiplikative Basis für die Gruppe der Multiplikatoren von Substitutionen aus $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$, und $S_1, S_2, \ldots, S_t$ seien die zugehörigen Substitutionen. Setzen wir voraus, daß stets

$$-E = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \subset \mathsf{G},$$

so hat man in den Substitutionen $-E, S_1, S_2, \ldots, S_t$ eine Basis für $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$. Die Unabhängigkeit der Multiplikatoren $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_t^2$ hat wegen $\lambda_\mu^{(\nu)}\lambda_\mu^{(\nu)\prime} = 1$ für $\mu \leq t$, $\nu > t$ zur Folge, daß die Determinante der Matrix $(\log \lambda_\mu^{(\nu)2})$, $\mu, \nu \leqq t$, nicht verschwindet:

$$|\log \lambda_\mu^{(\nu)2}| \neq 0 \qquad (\mu, \nu \leqq t). \tag{10}$$

Im folgenden benötigen wir eine feststehende Definition der analytischen

Funktion $(a_1\tau + a_2)^r$ für ein beliebiges Paar komplexer Zahlen $a_1, a_2 \neq 0, 0$, eine komplexe Veränderliche τ und $a_1\tau + a_2 \neq 0$. Wir setzen fest:

$$(a_1\tau + a_2)^r = e^{r \log(a_1\tau + a_2)},$$

$$\log(a_1\tau + a_2) = \log|a_1\tau + a_2| + i \arg^*(a_1\tau + a_2).$$

$$(11) \qquad \arg^*(a_1\tau + a_2) = \begin{cases} \arg\left(\tau + \frac{a_2}{a_1}\right) - \arg \overline{a_1} & \text{für } a_1 \neq 0, \\ \arg a_2 & \text{für } a_1 = 0. \end{cases}$$

$$-\pi < \arg\omega \leqq \pi \text{ für eine beliebige komplexe Zahl } \omega \neq 0.$$

Man beachte, daß der Wert der Funktion $(a_1\tau + a_2)^r$ nicht nur von $a_1\tau + a_2$, sondern auch noch von a_1 abhängt. Ist $a_1 \neq 0$ und $\mathfrak{Im}\,\frac{a_2}{a_1} \geqq 0$, so ist $(a_1\tau + a_2)^r$ im ganzen Bereich $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$ regulär analytisch. Für ein reelles Zahlenpaar a_1, a_2 stimmt die Definition (11) mit der Regelung in [1]) [Formel (7)] überein. In den weiteren Betrachtungen soll stets $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$ und im Falle $a_1 \neq 0$ auch $\mathfrak{Im}\,\frac{a_2}{a_1} \geqq 0$ vorausgesetzt werden. Sei S eine unimodulare reelle Matrix mit der zweiten Zeile $\underline{S} = (\gamma, \delta)$ und $(a_1, a_2)\,S = (a_1^*, a_2^*)$. Eine komplexe Matrix A werde so bestimmt, daß $\underline{A} = (a_1, a_2)$. Dann besteht die Transformationsformel

$$(12) \qquad (a_1 S\tau + a_2)^r = \sigma_0^{(r)}(A, S)\,\frac{(a_1^*\tau + a_2^*)^r}{(\gamma\tau + \delta)^r} \qquad (\text{für } \mathfrak{Im}\,\tau > 0)$$

mit

$$(13) \qquad \begin{aligned} \sigma_0^{(r)}(A, S) &= e^{2\pi i r w(A, S)}, \\ 2\pi w(A, S) &= \arg^*(a_1 S\tau + a_2) - \arg^*(a_1^*\tau + a_2^*) + \arg^*(\gamma\tau + \delta). \end{aligned}$$

Für reelle Argumente hat H. Petersson die Funktion $w(A, S)$ bestimmt[4]).

Nun zurück zu unserm Fixpunktsystem $\mathfrak{s}$! Wir bestimmen eine Transformation

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \text{ mit } |A^{(\nu)}| > 0 \text{ für } \nu \leqq t, \quad -i|A^{(\nu)}| > 0 \text{ für } \nu > t,$$

welche $\mathfrak{H}$ in den Bereich $\mathfrak{Im}\,\tau^{(\nu)} > 0$ für $\nu \leqq t$ und $|\tau^{(\nu)}| < 1$ für $\nu > t$ überführt und dabei $\mathfrak{s}$ in die spezielle Lage

$$(14) \qquad A\tau_0 = 0, \quad A\tau_0' = \infty$$

transformiert. Die Determinantenbedingungen für A sind gleichwertig damit, daß $A^{(\nu)}$ für $\nu \leqq t$ reell ist, für $\nu > t$ dagegen konjugiert komplexe Zeilen hat. In Anlehnung an [5]) untersuchen wir nun die Wirkung der Transformationen von $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ bei Anwendung auf die Hilfsfunktion

$$h(\tau) = h_A(\tau) = \prod_{\nu=1}^{t} \left(a_1^{(\nu)'}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)'}\right)^{\frac{r}{2}} \left(a_1^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)}\right)^{\frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(a_1^{(\nu)'}\tau^{(\nu)} + a_2^{(\nu)'}\right)^r$$

[4]) H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Annalen **115** (1938), S. 23—67, insbesondere S. 44, Satz 4.

[5]) H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen V. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 127—155.

mit dem Ziel, $h(\tau)$ als automorphe Form der Dimension $+r$ zu $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ und einem gewissen Multiplikatorsystem v_0 zu erkennen. Es sei

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \text{ (allgemein)}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = -TA = \begin{pmatrix} -a_1' & -a_2' \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s}), \qquad S = A^{-1} D_\lambda A = A'^{-1} D_{\lambda'} A' \qquad (\lambda\lambda' = 1).$$

$$g^{(r)}(\tau^{(1)}) = \begin{cases} (a_1^{(r)'}\tau^{(r)} + a_2^{(r)'})^{\frac{r}{2}} (a_1^{(r)}\tau^{(r)} + a_2^{(r)})^{\frac{r}{2}} & \text{für } r \leq t, \\ (a_1^{(r)'}\tau^{(r)} + a_2^{(r)'})^{r} & \text{für } r > t. \end{cases}$$

Vernachlässigen wir vorübergehend den Konjugiertenindex r, so ergibt sich

1. für $r \leq t$:

$$\begin{aligned} g(S\tau) &= (a_1' A^{-1} D_\lambda A\tau + a_2')^{\frac{r}{2}} (a_1 A'^{-1} D_{\lambda'} A'\tau + a_2)^{\frac{r}{2}} \\ &= \sigma_0^{\binom{r}{2}}(A, S)\, \sigma_0^{\binom{r}{2}}(A', S)\, (\gamma\tau + \delta)^{-r} (\lambda' a_1'\tau + \lambda' a_2')^{\frac{r}{2}} (\lambda a_1\tau + \lambda a_2)^{\frac{r}{2}} \\ &= e^{\pi i r \operatorname{sgn}_+ \gamma \frac{1-\operatorname{sgn}\lambda}{2}} (\gamma\tau + \delta)^{-r} g(\tau)\,[6], \end{aligned}$$

2. für $r > t$:

$$\begin{aligned} g(S\tau) &= e^{r(\log|a_1'| - i\arg \overline{a_1'})} (S\tau - \tau_0')^r = e^{r(\log|a_1'| - i\arg \overline{a_1'})} (S\tau - S\tau_0')^r \\ &= e^{r(\log|a_1'| - i\arg \overline{a_1'})} (\gamma\tau_0' + \delta)^{-r} (\gamma\tau + \delta)^{-r} (\tau - \tau_0')^r \\ &= \lambda^{-r} (\gamma\tau + \delta)^{-r} g(\tau), \end{aligned}$$

woraus erhellt, daß

(15) $$h(S\tau) = v_0(S)\, \mathrm{N}(\gamma\tau + \delta)^{-r} h(\tau) \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s})$$

mit

(16) $$v_0(S) = \prod_{r=1}^{t} e^{\pi i r \operatorname{sgn}_+ \gamma^{(r)} \frac{1-\operatorname{sgn}\lambda^{(r)}}{2}} \prod_{r=t+1}^{n} \lambda^{(r)-r}.$$

Für eine automorphe Form $f(\tau)$ vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ ist daher $g(\tau) = h(\tau) f(\tau)$ eine Form von der Dimension 0 zur Gruppe $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ und zum Multiplikatorsystem $v v_0$. Dieses ist also ein abelscher Charakter für $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$. Die Invarianzeigenschaft von $g(\tau)$:

(17) $$g(S\tau) = v(S) v_0(S) g(\tau) \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s})$$

wird uns die eingangs beschriebene Entwicklung für $f(\tau)$ liefern. Die „Ortsuniformisierenden" werden schrittweise wie folgt eingeführt. Wir setzen $\tau_1 = A\tau$ und bestimmen aus dem Gleichungssystem

(18) $$\log \tau_1^{(r)} = \sum_{\mu=1}^{t} \log \lambda_\mu^{(r)2}\, z_\mu \qquad (r = 1, 2, \ldots, t)$$

[6]) Es ist $\operatorname{sgn}_+ \gamma = \operatorname{sgn}\gamma$ für $\gamma \neq 0$, $\operatorname{sgn}_+ 0 = 1$ gesetzt.

durch Umkehrung die Variablen

$$z_\mu = \sum_{\nu=1}^{t} m_\mu^{(\nu)} \log \tau_1^{(\nu)}. \tag{19}$$

Nach (10) ist das möglich. Ferner sei

$$\lambda_\mu^{(\nu)2} = e^{2\pi i \varphi_\mu^{(\nu)}} \qquad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, t, \ \nu = t+1, t+2, \ldots, n, \tag{20}$$

$$m_\mu^{(\nu)} = -\sum_{\varrho=1}^{t} m_\varrho^{(\nu)} \varphi_\varrho^{(\mu)} \ \text{für } \mu = t+1, t+2, \ldots, n, \ \nu = 1, 2, \ldots, t$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= e^{2\pi i z_\mu} = \prod_{\nu=1}^{t} \left(\tau_1^{(\nu)}\right)^{2\pi i m_\mu^{(\nu)}} && \text{für } \mu \leqq t, \\ \omega_\mu &= \tau_1^{(\mu)} \prod_{\nu=1}^{t} e^{-2\pi i \varphi_\nu^{(\mu)} z_\nu} = \tau_1^{(\mu)} \prod_{\nu=1}^{t} \left(\tau_1^{(\nu)}\right)^{2\pi i m_\mu^{(\nu)}} && \text{für } \mu > t. \end{aligned} \tag{21}$$

Der Bereich $\mathfrak{H}$ wird beschrieben durch die Ungleichungen

$$0 < \Im \log \tau_1^{(\nu)} < \pi \ \text{für } \nu \leqq t \quad \text{und} \quad \left|\tau_1^{(\nu)}\right| < 1 \ \text{für } \nu > t$$

oder in den „Ortsuniformierenden" durch

$$\begin{aligned} e^{-2\pi^2} &< \prod_{\mu=1}^{t} |\omega_\mu|^{\log \lambda_\mu^{(\nu)2}} < 1 \quad \text{für } \nu \leqq t, \\ &|\omega_\mu| \prod_{\nu=1}^{t} |\omega_\nu|^{\varphi_\nu^{(\mu)}} < 1 \quad \text{für } \mu > t. \end{aligned} \tag{22}$$

Das ist ein sogenannter Reinhardtscher Körper mit dem Mittelpunkt $(0, 0, \ldots, 0)$. Zu den Erzeugenden S_μ der Gruppe bestimme man nunmehr Zahlen $\varkappa_\mu$ im Intervall $0 \leqq \varkappa_\mu < 1$ durch die Gleichungen

$$v(S_\mu)\, v_0(S_\mu) = e^{2\pi i \varkappa_\mu} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, t. \tag{23}$$

Die Funktion

$$F(\tau) = e^{-\sum_{\mu=1}^{t} 2\pi i \varkappa_\mu z_\mu} g(\tau) = \prod_{\mu=1}^{t} \omega_\mu^{-\varkappa_\mu} \cdot g(\tau) \tag{24}$$

erweist sich dann gegenüber den Substitutionen von $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ als absolut invariant:

$$F(S\tau) = F(\tau) \quad \text{für } S \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s}). \tag{25}$$

Das ergibt sich sofort aus (17), wenn man beachtet, daß entsprechend einer Ersetzung von τ durch $S_\mu \tau$ die Variable z_μ in $z_\mu + 1$ übergeht, z_ϱ für $\varrho \neq \mu$ dagegen unverändert bleibt. Die Invarianz (25) besagt nichts anderes, als daß $F(\tau)$ eine im Bereich (22) eindeutige Funktion der ω_μ ist. Um das einzusehen, brauchen wir uns nur zu überlegen, wieweit ein Punkt τ durch die Variablen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bestimmt ist. Da die z_μ mod 1 bestimmt sind, genügt es offenbar, die Wirkung festzustellen, die durch die Abänderung etwa von z_1 in $z_1 + 1$ hervorgerufen wird, während alle anderen z_μ festbleiben. Zunächst folgt nach (18), daß $\tau_1^{(\nu)}$ für $\nu \leqq t$ den Faktor $\lambda_1^{(\nu)2}$ aufnimmt; nach (20) und (21) gilt das auch für $\nu > t$. τ_1 durch $\lambda_1^2 \tau_1$ ersetzen heißt aber τ in $S_1 \tau$ überführen. Damit ist die Behauptung bewiesen. $F(\tau)$ ist also eine im Bereich (22) eindeutige und reguläre Funktion der ω_μ, als solche in eine Laurent-Reihe der Art

$$F(\tau) = \sum b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_n^{k_n} \tag{26}$$

mit den Summationsbedingungen

$$-\infty < k_\mu < \infty \quad \text{für } \mu \leqq t, \quad 0 \leq k_\mu < \infty \quad \text{für } \mu > t \tag{27}$$

zu entwickeln. Für $f(\tau)$ ergibt sich damit die Entwicklung

$$h(\tau) f(\tau) = \sum b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \omega_1^{k_1 + \varkappa_1} \ldots \omega_t^{k_t + \varkappa_t} \omega_{t+1}^{k_{t+1}} \ldots \omega_n^{k_n}. \tag{28}$$

Das Ergebnis ist im Fall $t = 0$ trivial. Es sei daran erinnert, daß im Fall $t = 0$ das System $\mathfrak{s}$ aus einem einzigen inneren Punkt τ_0 von $\mathfrak{H}$ bestehen soll. $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ bestehe dann aus den beiden Substitutionen $\pm E$. Die Entwicklungskoeffizienten $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ sind bei festem Punktsystem $\mathfrak{s}$ noch abhängig von der Auswahl der Basis $S_1, S_2, \ldots, S_t$, sowie der Transformation A. Die Art der Abhängigkeit läßt sich in beiden Fällen übersehen. Setzt man nämlich noch $\varkappa_\mu = 0$ für $\mu > t$ und

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu^{(\nu)} (k_\mu + \varkappa_\mu) = j^{(\nu)} \quad \text{für } \nu \leqq t, \tag{29}$$

so wird

$$\omega_1^{k_1 + \varkappa_1} \ldots \omega_t^{k_t + \varkappa_t} \omega_{t+1}^{k_{t+1}} \ldots \omega_n^{k_n} = \prod_{\nu=1}^{t} (\tau_1^{(\nu)})^{2\pi i j^{(\nu)}} \prod_{\nu=t+1}^{n} (\tau_1^{(\nu)})^{k_\nu}. \tag{30}$$

Die umbenannten Koeffizienten

$$c(j^{(1)}, \ldots, j^{(t)}, k_{t+1}, \ldots, k_n) = b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{31}$$

sind dann offenbar von der Basis S_μ nicht abhängig. Wählt man andererseits eine andere Transformation B an Stelle von A, die das gleiche leistet wie A, so ist notwendig

$$B = \varrho D_{\lambda_0} A,$$

wobei $\varrho > 0$, $\lambda_0^{(\nu)}$ für $\nu \leqq t$ reell und für $\nu > t$ vom Betrag 1 ist. Bei der Ersetzung von A durch B nimmt $h(\tau)$ einen von ϱ, λ_0 und A abhängigen Faktor auf, τ_1 multipliziert sich mit λ_0^2, so daß sich schließlich nach (30) auch $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ nur um einen von A, ϱ, λ_0 und (k) abhängigen Faktor ändert. In diesem Sinne ist die Entwicklung (28) von $f(\tau)$ zum Punktsystem $\mathfrak{s}$ eindeutig. Schließlich soll noch bewiesen werden, daß die Entwicklung (28) gegenüber Transformation von $f(\tau)$ mit einer beliebigen reellen unimodularen Substitution S invariant ist. Trägt man $S\tau$ an Stelle von τ in (28) ein, so gehen die „Ortsuniformisierenden" ω_μ in ein System von „Ortsuniformisierenden" zum Punktsystem $S^{-1}(\mathfrak{s})$ über. Die linke Seite von (28): $h(\tau)\, f(\tau) = h_A(\tau)\, f(\tau)$ verwandelt sich in

$$\begin{aligned}(32)\qquad h_A(S\tau)\, f(S\tau) &= \zeta^{(r)}(A, S)\, h_{AS}(\tau)\, \mathsf{N}\,(\gamma\tau + \delta)^{-r} f(S\tau)\\ &= \zeta^{(r)}(A, S)\, h_{AS}(\tau) f^S(\tau)\ \text{[Bezeichnung s. 1)]}\end{aligned}$$

mit

$$(33)\qquad \zeta^{(r)}(A, S) = \prod_{\nu=1}^{t} \sigma_0^{\left(\frac{r}{2}\right)}(A^{(\nu)}, S^{(\nu)})\, \sigma_0^{\left(\frac{r}{2}\right)}(A^{(\nu)\prime}, S^{(\nu)}) \prod_{\nu=t+1}^{n} \sigma_0^{(r)}(A^{(\nu)}, S^{(\nu)}).$$

Die Entwicklungskoeffizienten der Form $f^S(\tau) \subset \{S^{-1}\mathsf{G}\,S, -r, v^S\}$ zum Punktsystem $S^{-1}(\mathfrak{s})$ stimmen also mit denen der Form $f(\tau)$ zum Punktsystem $\mathfrak{s}$ im wesentlichen überein.

§ 2.

Poincarésche Reihen. Transformationsformeln und Konvergenz.

Zu jeder Substitution $S \subset \mathsf{G}$ gibt es auf Grund von (28) bis (32) und

$$f^S(\tau) = v(S)\, f(\tau)$$

eine Entwicklung

$$(34)\quad f(\tau) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \frac{\prod_{\nu=1}^{t} \left(A^{(\nu)} S^{(\nu)} \tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i j^{(\nu)}} \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(A^{(\nu)} S^{(\nu)} \tau^{(\nu)}\right)^{k_\nu}}{\zeta(A, S)\, v(S)\, h_{AS}(\tau)}.$$

Wir zerlegen nun G in Linksrestklassen nach $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$:

$$\mathsf{G} = \sum_{S^*} \mathsf{A}(\mathfrak{s}) S^*$$

und vereinigen alle Transformationen AS^* zu einer Menge $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$. Ausgenommen, daß $t = 0$ und τ_0 elliptischer Fixpunkt von G ist, gelangt man zu einer solchen Menge $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$ auch, wenn man aus der Menge $A\mathsf{G}$ ein vollständiges System von Substitutionen mit paarweise nicht assoziierten zweiten Zeilen aussondert. Dabei heißen die zweiten Zeilen zweier Substitutionen S_1 und S_2 assoziiert, wenn es ein Zahlsystem $\lambda = \{\lambda^{(\nu)}\}$ gibt, so daß $\underline{S_2} = \lambda \underline{S_1}$. Im Fall $t = 0$ bedeutet die Auswahl von $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$, daß für jedes $S \subset \mathsf{G}$ entweder AS oder $-AS$ in $A\mathsf{G}$ ausgezeichnet wird. Über (34) gelangen wir jetzt zu einer Poincaréschen Reihe, indem wir in (34) formal $b_{q_1 q_2 \ldots q_n} = 1$, alle anderen Koeffizienten gleich 0 setzen und über $AS \subset \mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$ summieren:

$$\begin{aligned}(35)\qquad \Xi_{-r}(\tau) &= \Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))\\ &= \sum_{AS \subset \mathfrak{S}(A, \mathsf{G})} \frac{\prod_{\nu=1}^{t} \left(A^{(\nu)} S^{(\nu)} \tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i p^{(\nu)}} \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(A^{(\nu)} S^{(\nu)} \tau^{(\nu)}\right)^{q_\nu}}{\zeta(A, S)\, v(S)\, h_{AS}(\tau)},\end{aligned}$$

Die Zahlen $p^{(\nu)}$ haben für das System (q) dieselbe Bedeutung wie $j^{(\nu)}$ für (k). Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß $\Xi_{-r}(\tau)$ von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$ nicht abhängt. Wir ersetzen im allgemeinen Summenglied S durch $S_0 S$, wobei $S_0 = A^{-1} D_\lambda A \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s})$ und etwa

$$\lambda^2 = \lambda_1^{2a_1} \lambda_2^{2a_2} \ldots \lambda_l^{2a_l}.$$

Da nun $AS\tau$ in $\lambda^2 AS\tau$ übergeht, so nimmt der Zähler in (35) folgenden Faktor auf:

$$e^{2\pi i \sum\limits_{\nu \leq l} \log \lambda^{(\nu)2}\, p^{(\nu)}} \prod_{\nu > p} \lambda^{(\nu)2 q_\nu}$$

$$= e^{2\pi i \sum\limits_{\mu \leq l} (q_\mu + z_\mu) a_\mu - \sum\limits_{\mu > l} q_\mu \sum\limits_{\varrho \leq l} 2\pi i q_\varrho^{(\mu)} a_\varrho} \prod_{\nu > p} \lambda^{(\nu)2 q_\nu}$$

$$= e^{2\pi i \sum\limits_{\mu \leq l} z_\mu a_\mu} = v(S_0)\, v_0(S_0).$$

Der Nenner

$$\zeta(A, S)\, v(S)\, h_{AS}(\tau) = v(S)\, \mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^r h_A(S\tau) = v(S)\, h_A^S(\tau)$$

$[h_A(\tau)$ ist eine Form der Dimension $+r$!$]$ dagegen wird ersetzt durch

$$v(S_0 S)\, h_A^{S_0 S}(\tau) = v(S_0 S)\, \sigma^{(-r)}(S_0, S)\, (h_A^{S_0}(\tau))^S$$
$$= v(S)\, h_A^S(\tau) \cdot v(S_0)\, v_0(S_0) \quad [\text{vgl. } ^{1}),\ \text{Formeln (19), (20)}]$$

und nimmt also ebenfalls den Faktor $v(S_0)\, v_0(S_0)$ auf, q. e. d. Zur Ableitung der Transformationsformeln für Ξ_{-r} benötigen wir noch folgende Beziehung für $\zeta^{(r)}(A, S)$. Für zwei reelle unimodulare Matrizen S, L folgt zunächst aus dem Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation, angewendet auf (12), daß

$$\sigma_0^{(r)}(A, SL)\, \sigma_0^{(r)}(S, L) = \sigma_0^{(r)}(AS, L)\, \sigma_0^{(r)}(A, S)$$

oder

(36) $$w(A, SL) + w(S, L) = w(AS, L) + w(A, S).$$

Zu der bekannten Formel

(37) $$\sigma^{(r)}(A, SL)\, \sigma^{(r)}(S, L) = \sigma^{(r)}(AS, L)\, \sigma^{(r)}(A, S)$$

gesellt sich dann auf Grund von (36) die Relation

(38) $$\zeta^{(r)}(A, SL)\, \sigma^{(r)}(S, L) = \zeta^{(r)}(AS, L)\, \zeta^{(r)}(A, S).$$

Wir transformieren nun $\Xi_{-r}(\tau)$ mit einer beliebigen reellen unimodularen Substitution L. $\underline{L} = (\gamma, \delta)$ sei die zweite Zeile von L. Mit $B = AS$ wird dann

(39) $$\Xi_{-r}^L(\tau) = \sum_{B \subset \mathfrak{S}(A, \mathsf{G})} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{l} (B^{(\nu)} L^{(\nu)} \tau^{(\nu)})^{2\pi i p^{(\nu)}} \prod\limits_{\nu=l+1}^{n} (B^{(\nu)} L^{(\nu)} \tau^{(\nu)})^{q_\nu}}{\zeta(A, S)\, v(S)\, \mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^r h_B(L\tau)}.$$

Durch eine einfache Umformung geht der Nenner des allgemeinen Summanden in (39) zunächst in

$$\zeta(A, S)\,\zeta(B, L)\,v(S)\,h_{BL}(\tau) \tag{40}$$

über. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. Es sei $L \subset \mathsf{G}$. Mit Hilfe von (38) verwandelt man den Nenner (40) in

$$\zeta(A, SL)\,v(SL)\,h_{BL}(\tau)\,\overline{v(L)}.$$

Da die Matrizensysteme $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$ und $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})L$ im Hinblick auf die Ξ-Reihen gleichwertig sind, so erhält man aus (39) die Transformationsformel

$$\Xi^{L}_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q)) = v(L)\,\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q)) \quad \text{für} \quad L \subset \mathsf{G}. \tag{41}$$

2. Es sei L beliebig. Mit dem Nenner (40) wird dann folgende Umformung vorgenommen:

$$S^* = L^{-1}SL, \quad BL = ALS^*, \quad \sigma = \sigma^{(r)}, \quad \zeta = \zeta^{(r)},$$

$$\begin{aligned}
\zeta(A, S)\,\zeta(B, L)\,v(S)\,h_{BL}(\tau)&\\
&= \frac{\zeta(A, S)}{\zeta(AL, L^{-1}S)}\,\zeta(AL, S^*)\,\sigma(L^{-1}S, L)\,v(S)\,h_{BL}(\tau)\\
&= \zeta(A, L)\,\zeta(AL, S^*)\,\frac{\sigma(L^{-1}S, L)}{\sigma(L, L^{-1}S)}\,v(S)\,h_{BL}(\tau)\\
&= \zeta(A, L)\,\zeta(AL, S^*)\,v(S)\,\frac{\sigma(S, L)}{\sigma(L, S^*)}\,h_{BL}(\tau)\\
&= \zeta(AL, S^*)\,v^{L}(S^*)\,h_{ALS^*}(\tau)\cdot\zeta(A, L).
\end{aligned}$$

Durchläuft B alle Transformationen von $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$, so durchläuft $B^* = BL$ ein System vom Typus $\mathfrak{S}(AL, L^{-1}\mathsf{G}L)$. (39) liefert dann

$$\Xi^{L}_{-r}(\tau) = \frac{1}{\zeta(A, L)} \sum_{B^* \subset \mathfrak{S}(AL, L^{-1}\mathsf{G}L)} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{t}\left(B^{*(\nu)}\tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i p^{(\nu)}} \prod\limits_{\nu=t+1}^{n}\left(B^{*(\nu)}\tau^{(\nu)}\right)^{q_\nu}}{\zeta(AL, S^*)\,v^{L}(S^*)\,h_{B^*}(\tau)}.$$

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist offenbar eine Poincarésche Reihe vom Ξ-Typus mit den Argumenten v^L, AL, $L^{-1}\mathsf{G}L$, (q). Für eine beliebige reelle unimodulare Substitution L besteht also die Transformationsgleichung

$$\Xi^{L}_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q)) = \frac{1}{\zeta^{(r)}(A, L)}\,\Xi_{-r}(\tau, v^{L}, AL, L^{-1}\mathsf{G}L, (q)). \tag{42}$$

Speziell für $L = \lambda A^{-1}A_t$ mit $\lambda^2 = |A_t^{-1}A|$, $\lambda > 0$ und der festen Transformation A_t, definiert durch

$$A_t^{(\nu)} = E^{(\nu)} \quad \text{für } \nu \leq t, \quad A_t^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu > t, \tag{43}$$

erhalten wir rechtsseitig von (42) eine Poincarésche Reihe $\Xi_{-r}(\tau, v^L, \lambda A_t, L^{-1}\mathsf{G}L, (q))$ zu dem speziellen Punktsystem

$$(44)\qquad \tau_0^{(\nu)} = 0,\ \tau_0^{(\nu)\prime} = \infty \quad \text{für} \quad \nu \leq t, \qquad \tau_0^{(\nu)} = i,\ \tau_0^{(\nu)\prime} = -i \quad \text{für} \quad \nu > t.$$

In dieser Reihe kann λA_t durch A_t ersetzt werden, wenn man $\mathsf{N}\,\lambda^{-r}$ als Faktor anbringt, wie sich aus

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\zeta(\lambda A_t, S)\, h_{\lambda A_t S}(\tau) = \mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^r h_{\lambda A_t}(S\tau), \quad \underline{S} = (\gamma, \delta), \\ &h_{\lambda A_t}(S\tau) = \prod_{\nu=1}^{t} \lambda^{(\nu)\frac{r}{2}} \left(\lambda^{(\nu)} S^{(\nu)} \tau^{(\nu)}\right)^{\frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(\lambda^{(\nu)} S^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} i\right)^r = \mathsf{N}\,\lambda^r h_{A_t}(S\tau) \end{aligned}$$

ergibt. Als spezielle Folge von (42) notieren wir

$$(46)\qquad \Xi^L_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q)) = \frac{1}{\zeta^{(t)}(A, L)\,\mathsf{N}\,\lambda^r}\, \Xi_{-r}(\tau, v^L, A_t, L^{-1}\mathsf{G}L, (q))$$

$$\text{mit} \quad L = \lambda A^{-1} A_t, \quad \lambda^2 |A^{-1} A_t| = 1, \quad \lambda > 0.$$

Die Gruppe $L^{-1}\mathsf{G}L$ kann natürlich nicht in der Hilbertschen Modulgruppe liegen, wenn sie das hyperbolische Fixpunktsystem (44) besitzt. Wenn in den folgenden Konvergenzbeweisen für die Poincaréschen Reihen dennoch von solchen Gruppen gesprochen wird, so kann das nicht stören; denn sie entstehen immer durch Transformation aus Untergruppen G der Hilbertschen Modulgruppe und alle Eigenschaften von G, auf welchen unsere Überlegungen basieren, sind gegenüber Transformationen von $\mathfrak{H}$ in sich invariant. Hat das Fixpunktsystem $\mathfrak{s}$ für eine Gruppe G die spezielle Lage (44) und wählen wir $A = A_t$, so nehmen die Poincaréschen Reihen, wie aus (45) für $\lambda = 1$ hervorgeht, die einfache Gestalt

$$(47)\quad \Xi_{-r}(\tau, v, A_t, \mathsf{G}, (q)) = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{s}}(\mathsf{G})} \frac{\prod_{\nu=1}^{t} \left(S^{(\nu)}\tau^{(\nu)}\right)^{2\pi i \mu^{(\nu)} - \frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(\frac{S^{(\nu)}\tau^{(\nu)} - i}{S^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + i}\right)^{q_\nu}}{v(S)\,\mathsf{N}(\gamma\tau + \delta)^r \prod_{\nu=t+1}^{n} \left(S^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + i\right)^r}$$

an, wobei $\mathfrak{S}_{\mathfrak{s}}(\mathsf{G})$ ein volles System von Repräsentanten der Linksrestklassen von G nach $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ darstellt.

Wir beweisen nun die absolute Konvergenz der Poincaréschen Reihen $\Xi_{-r}(\tau)$ für $r > 2$, $|v| = 1$, ein beliebiges ganzzahliges Exponentensystem (q) mit $q_\mu \geq 0$ für $\mu > t$ und alle Punkte von $\mathfrak{H}$. Da der Zähler des allgemeinen Gliedes der Reihe (35) bei festem Exponentensystem (q) nach (22), (30) beschränkt ist, also dem Betrage nach etwa kleiner als C_0 ist, so besitzt $\frac{1}{C_0}\,\Xi_{-r}(\tau)$ die Majorante

$$(48)\qquad \Omega(\tau, r, A, \mathsf{G}) = \sum_{B \subset \mathfrak{S}(A, \mathsf{G})} \frac{1}{|h_B(\tau)|}.$$

Der Beweis für die Konvergenz von Ω wird entsprechend den drei Fällen $t = n$, $t = 0$, $0 < t < n$ verschieden geführt, im ersten und wichtigsten Fall mit Hilfe der nichteuklidischen Maßbestimmung in § 3). Durch einen eleganten Ansatz, der auf Herrn Petersson zurückgeht, wird dabei in der Beweisführung eine erhebliche Vereinfachung erreicht im Vergleich etwa zu den analogen Bemühungen[1]) für Poincarésche Reihen zu den parabolischen Spitzen.

1. $t = n$. Es ist $|h_B(\tau)| = |h_{BA^{-1}}(A\tau)|\, \mathsf{N}|a_1'\tau + a_2'|^r$, also

$$\Omega(\tau, r, A, \mathsf{G}) = \mathsf{N}|a_1'\tau + a_2'|^{-r}\Omega(A\tau, r, E, A\mathsf{G}A^{-1}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher in (48) $A = A_0 = E$, d. h. $\mathfrak{s}$ in der speziellen Lage (44) voraussetzen. Die Erzeugenden S_μ von $A(\mathfrak{s})$ haben dann die Gestalt

$$S_\mu = \begin{pmatrix}\lambda_\mu & 0\\ 0 & \lambda_\mu^{-1}\end{pmatrix} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Man bestimme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus dem Gleichungssystem

$$(49)\quad \log|\tau^{(\nu)}| = x_1 \log \lambda_1^{(\nu)2} + x_2 \log \lambda_2^{(\nu)2} + \cdots + x_n \log \lambda_n^{(\nu)2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Im Raum der Punkte mit den affinen Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ eine Translationsgruppe mit dem Fundamentalbereich

$$(50)\qquad -\tfrac{1}{2} < x_j \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

τ heißt reduziert, wenn der Bildpunkt $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ im Fundamentalbereich (50) liegt. Zu einem festen Punkt τ^* ist dann ein System $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(E, \mathsf{G})$ durch die Vorschrift eindeutig bestimmt, daß $L\tau^*$ für alle $L \subset \mathfrak{S}_0$ reduziert sein soll. Nach (50) kann eine positive Konstante c_1 bestimmt werden, so daß

$$(51)\qquad \frac{1}{c_1} < |L\tau^*| < c_1 \quad \text{für } L \subset \mathfrak{S}_0.$$

$\mathfrak{K}_0$ sei eine nichteuklidische Kugel um einen vorgegebenen Punkt τ^* mit dem Radius $\varrho_0 > 0$, dieser so klein, daß für $L \subset \mathsf{G}$, $L\tau^* \neq \tau^*$ die Punktmengen $\mathfrak{K}_0$, $L\mathfrak{K}_0$ einen leeren Durchschnitt haben. Die folgenden Abschätzungen entnimmt man leicht aus [5]) S. 144–145:

$$\tau^* = x^* + iy^*,\ \tau = x + iy \subset \mathfrak{K}_0,\ L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \subset \mathfrak{S}_0,\ L\tau^* = x_L^* + iy_L^*,$$
$$L\tau = x_L + iy_L,$$

$$(52)\quad |L\tau^*|e^{-\varrho_0} \leqq |L\tau| \leqq |L\tau^*|e^{\varrho_0},$$

$$e^{-2\varrho_0 n} \leqq \mathsf{N}\left(\frac{y_L}{y_L^*}\,\frac{y^*}{y}\right) = \mathsf{N}\left(\frac{y_L}{y}\,\frac{y^*}{y_L^*}\right) = \frac{\mathsf{N}|\gamma\tau^* + \delta|^2}{\mathsf{N}|\gamma\tau + \delta|^2} \leqq e^{2\varrho_0 n}.$$

Für einen beliebigen Punkt $\tau \subset \mathfrak{K}_0$, $c_2 = c_1 e^{\varrho_0}$ und $L \subset \mathfrak{S}_0$ ist daher nach (51)

$$\frac{1}{c_2} < |L\tau| < c_2$$

und folglich

$$\Omega(\tau, r, E, \mathsf{G}) \le c_2^{\frac{n r}{2}} \sum_{L \subset \mathfrak{S}_0} \frac{1}{\mathsf{N}\,|\gamma\,\tau + \delta|^r}.$$

Die Konvergenz der rechts stehenden Summe ergibt sich nun leicht aus einer Integralabschätzung:

$$V(L\,\mathfrak{R}_0) = \int_{\substack{\tau_1 = L\,\tau \\ \tau \subset \mathfrak{R}_0}} \cdots \int \mathsf{N}\,(y_1^{\frac{r}{2}-2}\,d\,x_1\,d\,y_1) = \int_{\tau \subset \mathfrak{R}_0} \cdots \int \mathsf{N}\,|\gamma\tau + \delta|^{-r}\,\mathsf{N}\,(y^{\frac{r}{2}-2}\,d\,x\,d\,y)$$

$$\ge e^{-r\varrho_0 n}\,\mathsf{N}\,|\gamma\,\tau^* + \delta|^{-r}\,V(\mathfrak{R}_0) \qquad (\tau_1 = x_1 + i\,y_1),$$

$$\sum_{L \subset \mathfrak{S}_0} \mathsf{N}\,|\gamma\,\tau^* + \delta|^{-r} \le \frac{e^{r\varrho_0 n}}{V(\mathfrak{R}_0)} \sum_{L \subset \mathfrak{S}_0} V(L\,\mathfrak{R}_0)$$

$$\le \frac{l^*\,e^{r\varrho_0 n}}{V(\mathfrak{R}_0)} \int_{\substack{|x| \le c_2 \\ 0 \le y \le c_2}} \cdots \int \mathsf{N}\,(y^{\frac{r}{2}-2}\,d\,x\,dy) = \frac{l^*\,e^{r\varrho_0 n}\,(2\,c_2)^n\,c_2^{\left(\frac{r}{2}-1\right)^n}}{V(\mathfrak{R}_0)\left(\frac{r}{2}-1\right)^n}.$$

l^* ist die Anzahl der Substitutionen aus G, welche τ^* festlassen. Im ersten Fall ist also die Konvergenz bewiesen.

2. $t = 0$. Wir bestimmen ein hyperbolisches Fixpunktsystem $\mathfrak{s}^*$ für G mit 2^n reellen Punkten, die man durch Mischung der Konjugierten von τ_0^*, $\tau_0^{*\prime}$ erhalten möge, sowie eine reelle unimodulare Transformation A^* mit der Eigenschaft

$$A^*\tau_0^* = 0, \quad A^*\tau_0^{*\prime} = \infty.$$

Dann ist wieder

$$|h_B(\tau)| = |h_{BA^{*-1}}(A^*\tau)|\,\mathsf{N}\,|a_1^{*\prime}\,\tau + a_2^{*\prime}|^r$$

und

$$\Omega(\tau, r, A, \mathsf{G}) = \mathsf{N}\,|a_1^{*\prime}\,\tau + a_2^{*\prime}|^{-r}\,\Omega(A^*\tau, r, A\,A^{*-1}, A^*\mathsf{G}A^{*-1}).$$

Die Gruppe $A^*\mathsf{G}A^{*-1}$ hat das spezielle hyperbolische Fixpunktsystem $\mathfrak{s}_0$: $\tau^{(\nu)} = 0$ oder ∞ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Wir können uns also beim Konvergenzbeweis auf diesen Fall beschränken und wollen annehmen, daß bereits G die genannte Eigenschaft hat. Offenbar ist $\mathsf{A}\,(\mathfrak{s}) \subset \mathsf{A}\,(\mathfrak{s}_0)$; denn $\mathsf{A}\,(\mathfrak{s})$ enthält im vorliegenden Fall nur die Substitutionen $\pm E$. Man bestimme die Zerlegungen in Linksrestklassen

$$\mathsf{G} = \sum_{L^*} \mathsf{A}\,(\mathfrak{s}_0)L^*, \quad \mathsf{A}\,(\mathfrak{s}_0) = \sum_{S^*} \mathsf{A}\,(\mathfrak{s})S^*$$

und hat dann in der Gesamtheit aller Substitutionen L^* ein System $\mathfrak{S}\,(E, \mathsf{G})$, in der Gesamtheit aller möglichen Produkte $B = S^*L^*$ ein System $\mathfrak{S}\,(A, \mathsf{G})$. Die Gesamtheit der Substitution S^* möge mit der Menge der Potenzprodukte

$$S_1^{g_1}\,S_2^{g_2}\ldots S_n^{g_n}, \quad S_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_\mu & 0 \\ 0 & \lambda_\mu^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

übereinstimmen. Die Transformationen S_u sollen mit $-E$ die Gruppe $\mathsf{A}(\mathfrak{s}_0)$ erzeugen. Nach diesen Vorbereitungen wird

$$(53)\quad \Omega(\tau, r, A, \mathsf{G}) = \sum_{B \subset \mathfrak{S}(A, \mathsf{G})} \frac{1}{|h_B(\tau)|}$$
$$= \mathsf{N}\,|a_1'|^{-r} \sum_{S \subset \mathfrak{S}(E, \mathsf{G})} \frac{1}{\mathsf{N}\,|\gamma\tau + \delta|^r} \sum_\lambda \frac{1}{\mathsf{N}\,|\lambda S\tau - \lambda^{-1}\bar{\tau}_0|^r},$$
$$S = (\gamma,\ \delta),$$

wobei λ alle möglichen Potenzprodukte $\lambda_1^{a_1}\lambda_2^{a_2}\ldots\lambda_n^{a_n}$ durchläuft. Um $\sum\limits_\lambda$ gleichmäßig in S abschätzen zu können, denken wir uns zu einem vorgegebenen Punkt τ^* das System $\mathfrak{S}(E, \mathsf{G})$ derart bestimmt, daß $S\tau^*$ für alle $S \subset \mathfrak{S}(E, \mathsf{G})$ bezüglich $\mathsf{A}(\mathfrak{s}_0)$ reduziert ist. Nach (51) gilt dann $\frac{1}{c_1} < |S\tau^*| < c_1$ mit einer geeigneten positiven Konstanten c_1, woraus sich ergibt, daß

$$(54)\qquad |\lambda S\tau^* - \lambda^{-1}\bar{\tau}_0| \geqq c_2\,|\lambda + \lambda^{-1}|$$

für alle $S \subset \mathfrak{S}(E, \mathsf{G})$, beliebiges $\lambda \neq 0$, $\Im\mathrm{m}\,\tau_0 > 0$ und eine geeignete positive Konstante c_2, die nur von c_1 und τ_0 abhängt. Setzt man nämlich $\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^{-1}}$, so wird behauptet, daß $|\lambda^* S\tau^* - (1 - \lambda^*)\,\bar{\tau}_0| \geqq c_2 > 0$. Das ist in der Tat richtig; denn auf der abgeschlossenen Mannigfaltigkeit $\frac{1}{c_1} \leqq |S\tau^*| \leqq c_1$, $\Im\mathrm{m}\,S\tau^* \geqq 0$, $0 \leqq \lambda^* \leqq 1$ hat $|\lambda^* S\tau^* - (1-\lambda^*)\,\bar{\tau}_0|$ ein positives Minimum, weil $\lambda^* S\tau^* = (1 - \lambda^*)\,\bar{\tau}_0$ mit $\Im\mathrm{m}\,\tau_0 > 0$ nicht verträglich ist. Eine brauchbare Abschätzung für $\sum\limits_\lambda$ hat man nun nach (54) in

$$\sum_\lambda \mathsf{N}\,|\lambda S\tau^* - \lambda^{-1}\bar{\tau}_0|^{-r} \leqq c_2^{-rn} \sum_\lambda \frac{1}{\mathsf{N}\,|\lambda + \lambda^{-1}|^r}.$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung konvergiert bestimmt dann, wenn das n-fache Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int \frac{d x_1\, d x_2 \ldots d x_n}{\mathsf{N}\,(|\lambda_1|^{x_1}|\lambda_2|^{x_2}\ldots|\lambda_n|^{x_n} + |\lambda_1|^{-x_1}|\lambda_2|^{-x_2}\ldots|\lambda_n|^{-x_n})^r}$$

existiert. Das ist aber sofort zu erkennen, wenn man es auf die Veränderlichen

$$z^{(\nu)} = \sum_{u=1}^{n} x_u \log|\lambda_u^{(\nu)}|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

umschreibt. Bezeichnet R den Betrag der Determinante $\log|\lambda_u^{(\nu)}|$, so erhält man nämlich

$$\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int \mathsf{N}\left(\frac{d z}{(e^z + e^{-z})^r}\right) = \frac{1}{R}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d z}{(e^z + e^{-z})^r}\right)^n.$$

Zum Konvergenzbeweis für $\Omega(\tau^*, r, A, \mathsf{G})$ benötigen wir jetzt nach (53) nur noch die Konvergenz von $\sum_{S \subset \mathfrak{S}(E, \mathsf{G})} \mathsf{N}\,|\gamma\tau^* + \delta|^{-r}$. Der Beweis hierfür ist aber im ersten Fall ($t = n$) geführt. Damit ist auch der zweite Fall erledigt.

3. $0 < t < n$. Es sei $L = \mu A^{-1} A_t$, $\mu^2 |A^{-1} A_t| = 1$, $\mu > 0$. Analog wie im ersten Fall zeigen die Gleichungen

$$|h_B(\tau)| = |h_{BL}(L^{-1}\tau)|\,\mathsf{N}\,|-c\,\tau + a|^r, \quad L^{-1} = (-c, a),$$

$$\Omega(\tau, r, A, \mathsf{G}) = \mathsf{N}\,|-c\,\tau + a|^{-r}\,\mathsf{N}\,\mu^{-r}\,\Omega(L^{-1}\tau, r, A_t, L^{-1}\mathsf{G}\,L),$$

daß wir uns darauf beschränken dürfen, das hyperbolische Fixpunktsystem $\mathfrak{s}$ von G in der speziellen Lage (44) anzunehmen. Die ersten t Konjugierten der Erzeugenden S_μ von $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ sind dann von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_\mu^{(\nu)} & 0 \\ 0 & \lambda_\mu^{(\nu)\,-1} \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu \leq t,\ \mu \leq t.$$

Ein Punkt τ von $\mathfrak{H}$ wird reduziert bezüglich $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ genannt, wenn die aus dem Gleichungssystem

$$\log|\tau^{(\nu)}| = x_1 \log \lambda_1^{(\nu)\,2} + x_2 \log \lambda_2^{(\nu)\,2} + \cdots + x_t \log \lambda_t^{(\nu)\,2}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, t)$$

bestimmten Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_t$ im Intervall

$$-\tfrac{1}{2} < x_\mu \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, t$$

liegen. Es ist leicht zu sehen, daß jedes volle System nach $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ äquivalenter Punkte genau einen reduzierten enthält. Das System $\mathfrak{S}(A_t, \mathsf{G}) = A_t \mathfrak{S}_{\mathfrak{s}}(\mathsf{G})$ wird jetzt nach Wahl eines Punktes τ^* wieder festgelegt durch die Forderung, daß $L\tau^*$ für alle $L \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{s}}(\mathsf{G})$ reduziert sein soll. Diesmal ergibt sich nur

$$\frac{1}{c_1} < |L^{(\nu)} \tau^{*(\nu)}| < c_1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, t$$

und eine geeignete positive Konstante c_1. Für eine Substitution $L \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{s}}(\mathsf{G})$ mit der zweiten Zeile (γ, δ) gelten daher die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |h_{A_t L}(\tau^*)| &= \mathsf{N}\,|\gamma\tau^* + \delta|^r\,|h_{A_t}(L\tau^*)| \\ &= \mathsf{N}\,|\gamma\tau^* + \delta|^r \prod_{\nu=1}^{t} |L^{(\nu)}\tau^{*(\nu)}|^{\frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} |L^{(\nu)}\tau^{*(\nu)} + i|^r \\ &> \mathsf{N}\,|\gamma\tau^* + \delta|^r\, c_1^{-\frac{rt}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} |L^{(\nu)}\tau^{*(\nu)} + i|^r \\ &> c_1^{-\frac{rt}{2}} (c_1 + 1)^{-r(n-t)}\,\mathsf{N}\,|\gamma\,\tau^* + \delta|^r\,|L\,\tau^* + i|^r. \end{aligned}$$

Man erhält damit

$$\Omega(\tau^*, r, A_t, \mathsf{G}) < c_1^{\frac{rt}{2}} (c_1+1)^{r(n-t)} \sum_{L \subset \mathfrak{S}_g(\mathsf{G})} \frac{1}{\mathsf{N}\,|\gamma\tau^* + \delta|^r \, |L\tau^* + i|^r}.$$

Der Nenner des allgemeinen Gliedes ist offenbar gleich

$$|h_{A_0 L}(\tau^*)|.$$

Da ferner $A_0 \mathfrak{S}_g(\mathsf{G})$ zu einem System $\mathfrak{S}(A_0, \mathsf{G})$ ergänzt werden kann, so erhält man schließlich

$$\Omega(\tau^*, r, A_t, \mathsf{G}) < c_1^{\frac{rt}{2}} \; (c_1+1)^{r(n-t)}\, \Omega(\tau^*, r, A_0, \mathsf{G}).$$

Die Reihe $\Omega(\tau^*, r, A_0, \mathsf{G})$ konvergiert, wie die vorangehende Betrachtung (zu $t = 0$) ergab. Damit ist alles bewiesen.

Die absolute Konvergenz der Poincaréschen Reihen ist erkannt. Es ist jedoch für alles Folgende von Bedeutung, daß die Ξ-Reihen unter den oben angegebenen Voraussetzungen in jedem Bereich der Art

(55) $$|x^{(\nu)}| \leqq c, \quad y^{(\nu)} \geqq \varepsilon > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

nicht nur absolut, sondern auch gleichmäßig konvergieren. Diese Tatsache beruht im wesentlichen auf Überlegungen, die zu den folgenden beiden Hilfssätzen führen.

Hilfssatz 1. Für ein Paar reeller Zahlen γ, δ und $\tau = x + iy$ mit $|x| \leqq c$, $y \geqq \varepsilon > 0$ sowie eine geeignete positive Konstante $C_1 = C_1(c, \varepsilon)$ ist

$$|\gamma\tau + \delta| \geqq C_1\,|\gamma i + \delta|.$$

[Beweis siehe [5]) S. 147, Hilfssatz 3].

Hilfssatz 2. Es sei $S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit positiver Determinante, τ_0 eine Zahl mit positivem Imaginärteil. Für $\tau = x + iy$ mit $|x| \leqq c$, $y \geqq \varepsilon > 0$ und eine geeignete positive Konstante $C_2 = C_2(c, \varepsilon, \tau_0)$ ist dann

$$|\gamma\tau + \delta|\,|S\tau + \tau_0| \geqq C_2\,|\gamma i + \delta|\,|Si + \tau_0|.$$

Zum Beweis bestimmen wir bei vorgegebenem τ eine Zahl $\lambda > 0$ so, daß $S = D_\lambda S_0$, $|S_0\tau| = 1$. Es ist also $\lambda^2 = |S\tau|$. (γ_0, δ_0) sei die zweite Zeile von S_0. Wir setzen $\tau_0 = |\tau_0| e^{i\varphi}$, $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^{-1}|\tau_0|}$ und erhalten auf Grund von Hilfssatz 1

$$\begin{aligned}
|\gamma\tau + \delta|\,|S\tau + \tau_0| &= |\gamma_0\tau + \delta_0|\,|\lambda S_0\tau + \lambda^{-1}\tau_0|\\
&= |\gamma_0\tau + \delta_0|\,(\lambda + \lambda^{-1}|\tau_0|)\,|\lambda_1 S_0\tau + (1-\lambda_1)\,e^{i\varphi}|\\
&= |\gamma\tau + \delta|\,(|S\tau| + |\tau_0|)\,|\lambda_1 S_0\tau + (1-\lambda_1)\,e^{i\varphi}|\\
&= (|\alpha\tau + \beta| + |\tau_0|\,|\gamma\tau + \delta|)\,|\lambda_1 S_0\tau + (1-\lambda_1)\,e^{i\varphi}|\\
&\geqq C_1 C'\,(|\alpha i + \beta| + |\tau_0|\,|\gamma i + \delta|) \geqq C_1 C'\,|\gamma i + \delta|\,|Si + \tau_0|,
\end{aligned}$$

wobei C'' das Minimum von $|\lambda_1 \tau_1 + (1 - \lambda_1) e^{i\varphi}|$ auf der abgeschlossenen Mannigfaltigkeit

$$|\tau_1| = 1, \quad \Im\mathfrak{m}\, \tau_1 \geqq 0, \quad 0 \leqq \lambda_1 \leqq 1.$$

$C'' = C''(\tau_0)$ ist offenbar positiv, da $\lambda_1 \tau_1 + (1 - \lambda_1) e^{i\varphi} = 0$ mit $\Im\mathfrak{m}\, \tau_0 > 0$ nicht verträglich ist. Hilfssatz 2 ist also mit $C_2 = C_1 C''$ bewiesen.

Die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\Omega(\tau, r, A, \mathsf{G})$ und damit von $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))$ im Bereich (55) ergibt sich nach (48) auf Grund der bewiesenen Hilfssätze leicht aus folgender Abschätzung:

$$B = A\,S = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = (a_1', a_2'), \quad \underline{S} = (\gamma, \delta), \quad \frac{a_2^{(\nu)'}}{a_1^{(\nu)'}} = -\overline{\tau_0^{(\nu)}} \text{ für } \nu > t,$$

$$|h_B(\tau)| = \prod_{\nu=1}^{t} |b_1^{(\nu)'} \tau^{(\nu)} + b_2^{(\nu)'}|^{\frac{r}{2}} \, |b_1^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + b_2^{(\nu)}|^{\frac{r}{2}} \prod_{\nu=t+1}^{n} |a_1^{(\nu)'}|^r \, |\gamma^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}|^r \cdot$$
$$\cdot |S^{(\nu)} \tau^{(\nu)} - \overline{\tau_0^{(\nu)}}|^r$$
$$\geqq C_1^{rt} C_2^{r(n-t)} |h_B(i)|.$$

Die Poincaréschen Reihen $\Xi_{-r}(\tau)$ sind daher in $\mathfrak{H}$ regulär. Die Transformationsformel (41) besagt, daß es sich um automorphe Formen vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ handelt. Es bleibt nur noch das Verhalten von $\Xi_{-r}(\tau)$ in den parabolischen Spitzen von G zu untersuchen. Für Untergruppen G der Hilbertschen Modulgruppe ist $\infty = \{\infty, \infty, \ldots, \infty\}$ parabolische Spitze, und es gibt einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ zu G [s. [1])] mit folgender Eigenschaft. Alle Punkte $\tau = x + iy$ von $\mathfrak{F}$, für welche $\mathsf{N}\, y \geqq \xi$ mit hinreichend großem ξ, sind enthalten in einer Punktmenge der Art

$$(56) \quad C' \sqrt[n]{\mathsf{N}\, y} \leqq y^{(\nu)} \leqq C'' \sqrt[n]{\mathsf{N}\, y}, \; \mathsf{N}\, y \geqq \xi, \; |x^{(\nu)}| \leqq C''' \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese wiederum kann in einen Bereich (55) eingebettet werden. $\Xi_{-r}(\tau)$ ist also in (56) absolut und gleichmäßig konvergent. Nähert man sich innerhalb $\mathfrak{F}$ der parabolischen Spitze ∞, so geht, wie man leicht sieht, jedes Glied der Reihe (35) gegen 0, infolgedessen konvergiert $\Xi_{-r}(\tau)$ selbst gegen 0. $\Xi_{-r}(\tau)$ ist also in der Spitze ∞ regulär und verschwindet. Derselbe Sachverhalt trifft für alle parabolischen Spitzen von G zu. Der Beweis wird wie üblich so geführt, daß man eine vorgegebene parabolische Spitze nach ∞ transformiert und die entsprechend transformierte Poincarésche Reihe betrachtet. Das Ergebnis dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

Satz 1. *Die Poincaréschen Reihen $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))$ sind für $r > 2$, $|v| = 1$ und jedes ganzzahlige Exponentensystem (q) mit $q_\mu \geqq 0$ für $\mu > t$ in ganz $\mathfrak{H}$ absolut konvergent und stellen Spitzenformen vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ dar.*

§ 3.

Anwendung der Metrisierungstheorie auf die Poincaréschen Reihen.

Es seien r, s reelle Zahlen, S eine reelle unimodulare Substitution, $f(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ Funktionen über $\mathfrak{H}$. Wir erklären im Einklang mit der Peterssonschen Art der Bezeichnung

$$f \underset{(r,s)}{\Big|} S = f(\tau) \underset{(r,s)}{\Big|} S = f(S\tau)\,\mathrm{N}\,(\gamma\tau+\delta)^{-r}\,\mathrm{N}\,|\gamma\tau+\delta|^{-s},$$

(57) $$f(\tau) \Big| S = f(\tau) \underset{(r,0)}{\Big|} S, \quad f(\tau) \underset{(s)}{\Big|} S = f(\tau) \underset{(0,s)}{\Big|} S,$$

$$W_r(f(\tau), \varphi(\tau); \mathfrak{B}) = \int \underset{\mathfrak{B}}{\cdots} \int f(\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,\mathrm{N}\,(y^{r-2}\,dx\,dy) \quad (\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}, \tau = x+iy).$$

Dann gilt für reelle unimodulare Substitutionen S_1, S_2

(57a) $$f(\tau) \underset{(r,s)}{\Big|} S_1 S_2 = \sigma^{(r)}(S_1, S_2)\,\Big(f(\tau) \underset{(r,s)}{\Big|} S_1\Big) \underset{(r,s)}{\Big|} S_2.$$

Der Übergang von den Integrationsvariablen τ zu $S\tau$ liefert die allgemeine Transformationsformel

(58) $$W_{r+s}(f \underset{(r,s)}{\Big|} S,\ \varphi \underset{(r,s)}{\Big|} S;\ S^{-1}\mathfrak{B}) = W_{r+s}(f, \varphi; \mathfrak{B}),$$

insbesondere also

(59) $$W_r(f \Big| S, \varphi \Big| S; S^{-1}\mathfrak{B}) = W_r(f \underset{(r)}{\Big|} S,\ \varphi \underset{(r)}{\Big|} S;\ S^{-1}\mathfrak{B}).$$

Für automorphe Formen $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ ist ferner

(60) $$f^S(\tau) = f(\tau) \Big| S, \quad |f^S(\tau)| = |f(\tau)| \underset{(r)}{\Big|} S,$$

mithin

(61) $$W_r(f^S, \varphi^S;\ S^{-1}\mathfrak{B}) = W_r(f, \varphi; \mathfrak{B})$$

sowie

(62) $$W_r(f, \varphi; L^{-1}\mathfrak{B}) = W_r(f, \varphi; \mathfrak{B}) \quad \text{für } L \subset \mathsf{G},\ v\bar{v} = 1;$$

denn in diesem Fall gilt $f^L = v(L) f$, $\varphi^L = v(L)\,\varphi$. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ einen Fundamentalbereich für G in $\mathfrak{H}$, so ist das skalare Produkt von f und φ erklärt durch

(63) $$(f, \varphi) = (f, \varphi)_{\mathsf{G}} = W_r(f, \varphi; \mathfrak{F}).$$

Es existiert nach [1]), wenn $f \cdot \varphi$ eine Spitzenform für G ist, und hat die Eigenschaft

(64) $$(f, \varphi)_{\mathsf{G}} = (f^S, \varphi^S)_{S^{-1}\mathsf{G}S}$$

für beliebige reelle unimodulare Transformationen S.

Wir berechnen jetzt das Skalarprodukt einer gegebenen Spitzenform $f(\tau)$ vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ mit der Poincaréschen Reihe $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))$,

$r > 2$ und $|v| = 1$ vorausgesetzt. Bei der Durchführung sind mehrmals Vertauschungen von Grenzprozessen vorzunehmen. Um einzusehen, daß solche Vertauschungen statthaft sind, wählen wir nach [3]) einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ für G mit der folgenden Eigenschaft. Es sei $s_1, s_2, \ldots, s_h$ ein vollständiges System von parabolischen Spitzen von G, die paarweise nach G nicht äquivalent sind. Die reelle unimodulare Transformation Q_μ möge s_μ nach ∞ transformieren: $Q_\mu s_\mu = \infty$. Zu jeder parabolischen Spitze s_μ gibt es nun eine Punktmenge $\mathfrak{B}_\mu$, so daß $Q_\mu \mathfrak{B}_\mu$ in dem Bereich

$$(65)\quad C' \sqrt[n]{\mathsf{N} y} \leqq y^{(\nu)} \leqq C'' \sqrt[n]{\mathsf{N} y},\ \mathsf{N} y \geqq \xi_0,\ |x^{(\nu)}| \leqq C''' \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n$$

mit gewissen positiven Konstanten C', C'', C''', ξ_0 enthalten ist und

$$(66)\qquad \mathfrak{F} = \sum_{\mu=1}^{h} \mathfrak{B}_\mu$$

einen Fundamentalbereich für G darstellt. Wir nehmen die Bereiche $\mathfrak{B}_\mu$ paarweise punktfremd an. Entsprechend der Zerlegung (66) gilt dann

$$(67)\qquad (f, \Xi_{-r}) = \sum_{\mu=1}^{h} W_r(f, \Xi_{-r}; \mathfrak{B}_\mu).$$

Nach (46), (64) genügt es, dieses Skalarprodukt für den Fall zu berechnen, daß $\mathfrak{s}$ die spezielle Lage (44) hat und $A = A_l$ ist. Es handelt sich dann um die Poincarésche Reihe (47), die wir auch in der Form

$$(68)\qquad \Xi_{-r}(\tau, v, A_l, \mathsf{G}, (q)) = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})} \bar{v}(S)\, \vartheta_{(q)}(\tau) \underset{(r)}{|} S$$

mit

$$(69)\qquad \vartheta_{(q)}(\tau) = (h_{A_l}(\tau))^{-1} \prod_{\nu=1}^{l} (\tau^{(\nu)})^{2\pi i \mu^{(\nu)}} \prod_{\nu=l+1}^{n} \left(\frac{\tau^{(\nu)} - i}{\tau^{(\nu)} + i}\right)^{q_\nu}$$

schreiben können. Sei C_0 eine Schranke für den Betrag von $\vartheta_{(q)}(\tau) h_{A_l}(\tau)$ [bei festem (q)], dann hat $\frac{1}{C_0} \Xi_{-r}(\tau)$ die Majorante

$$\Omega(\tau, r, A_l, \mathsf{G}) = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})} |h_{A_l}(\tau)|^{-1} \underset{(r)}{|} S.$$

Sie konvergiert, wie wir sahen, für alle $\tau \subset \mathfrak{H}$. Für eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})$ bilden wir die Teilreihe

$$R(\tau, \mathfrak{T}) = \sum_{S \subset \mathfrak{T}} |h_{A_l}(\tau)|^{-1} \underset{(r)}{|} S$$

und

$$V_\mu(\mathfrak{T}) = W_r(|f(\tau)|, R(\tau, \mathfrak{T}); \mathfrak{B}_\mu).$$

Auf Grund der Formeln (59), (60) und der Beziehung

$$R(\tau, \mathfrak{T}) \underset{(r)}{|} L = R(\tau, \mathfrak{T} L) = \mathsf{N}|c\tau + d|^{-r} R(L\tau, \mathfrak{T}),\ L = (c, d),$$

für eine reelle unimodulare Substitution L gilt dann

$$V_\mu(\mathfrak{T}) = W_r(|f^{Q_\mu^{-1}}(\tau)|, R(\tau, \mathfrak{T} Q_\mu^{-1}); Q_\mu \mathfrak{B}_\mu).$$

Wie wir oben sahen, konvergiert $R(\tau, \mathfrak{T} Q_\mu^{-1})$ in $Q_\mu \mathfrak{B}_\mu$ gleichmäßig und es gibt eine positive Konstante C'_μ, so daß

$$R(\tau, \mathfrak{T} Q_\mu^{-1}) \leqq C'_\mu R(i, \mathfrak{T} Q_\mu^{-1}) = C'_\mu \mathsf{N} |-c_\mu i + a_\mu|^{-r} R(Q_\mu^{-1} i, \mathfrak{T})$$
$$\text{mit } \underline{Q_\mu^{-1}} = (-c_\mu, a_\mu)$$

und damit

$$V_\mu(\mathfrak{T}) \leqq C''_\mu R(Q_\mu^{-1} i, \mathfrak{T}) \int_{Q_\mu \mathfrak{B}_\mu} \!\!\! \ldots \int |f^{Q_\mu^{-1}}(\tau)| \, \mathsf{N}(y^r{}^{-2} \, dx \, dy).$$

Gleichmäßig für alle Systeme $\mathfrak{T}$ ist also

$$0 \leqq V_\mu(\mathfrak{T}) \leqq C_\mu R(Q_\mu^{-1} i, \mathfrak{T}) \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, h$$

mit konstantem C_μ. Aus diesen Abschätzungen ergeben sich die Existenz von $W_r(f(\tau), \overline{v(S)} \, \vartheta_{(q)}(\tau) | S; \mathfrak{F})$ für $S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})$, die Konvergenz von

(70) $$\sum_{S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})} W_r(|f(\tau)|, |\vartheta_{(q)}(\tau)|_{(r)} S; \mathfrak{F})$$

und schließlich die Erlaubnis, Integration und Summation zu vertauschen, wenn man die Reihe (68) in (f, Ξ_{-r}) einträgt. Beachtet man noch $f^S(\tau) = v(S) f(\tau)$ für $S \subset \mathsf{G}$ und Regel (58), so folgt also

(71) $$(f, \Xi_{-r}) = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})} W_r(f^S(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau) | S; \mathfrak{F})$$
$$= W_r(f(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau); \mathfrak{F}_0),$$

wobei $\mathfrak{F}_0 = \sum_{S \subset \mathfrak{S}_\mathfrak{s}(\mathsf{G})} S \mathfrak{F}$ einen einfach überdeckten Fundamentalbereich für die Gruppe $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ darstellt. Da die Poincaréschen Reihen von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A, \mathsf{G})$ nicht abhängen, so schließt man für $S_0 \subset \mathsf{A}(\mathfrak{s})$, $S \subset \mathsf{G}$, daß

$$\bar{v}(S) \, \vartheta_{(q)}(\tau) | S = v(S_0 S) \, \vartheta_{(q)}(\tau) | S_0 S$$
$$= \sigma^{(r)}(S_0, S) \, \bar{v}(S_0 S) \, (\vartheta_{(q)}(\tau) | S_0) | S,$$

(72) $$\vartheta_{(q)}(\tau) | S = \bar{v}(S_0) \, (\vartheta_{(q)}(\tau) | S_0) | S,$$
$$\vartheta_{(q)}(\tau) | S_0 = v(S_0) \, \vartheta_{(q)}(\tau).$$

D. h. $\vartheta_{(q)}(\tau)$ ist eine automorphe Form vom Typus $\{\mathsf{A}(\mathfrak{s}), -r, v\}$, und daher darf $\mathfrak{F}_0$ in (71) durch einen beliebigen anderen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*$ von $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ ersetzt werden. Diese Umformungen sind wegen der Konvergenz von (70) zulässig. Bezeichnen wir wieder mit λ_μ^2 die Multiplikatoren der Erzeugenden S_μ von $\mathsf{A}(\mathfrak{s})$ und berechnen $z_1, z_2, \ldots, z_t$ aus dem Gleichungssystem (18) [darin ist $\tau_1^{(\nu)} = \tau^{(\nu)}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, t$], so hat man in

(73) $$-\tfrac{1}{2} \leqq \Re z_\mu \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, t$$

einen geeigneten Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*$. Es sei α, β, λ ein System positiver Zahlen und $\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}$ definiert als der Durchschnitt von $\mathfrak{F}^*$ mit der Punktmenge

$$(74)\qquad \begin{aligned} &\alpha^{(\nu)} \leqq \arg \tau^{(\nu)} \leqq 1 - \beta^{(\nu)} && \text{für } \nu \leqq t, \\ &\left|\frac{\tau^{(\nu)} - i}{\tau^{(\nu)} + i}\right| \leqq 1 - \lambda^{(\nu)} && \text{für } \nu > t. \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}$ ist eine abgeschlossene Punktmenge im Innern von $\mathfrak{H}$. Die bisherigen Betrachtungen haben dann ergeben, daß

$$(75)\qquad (f, \Xi_{-r})_{\mathsf{G}} = (f, \vartheta_{(q)})_{\mathsf{A}(\mathfrak{s})} = \lim_{\alpha, \beta, \lambda \to 0} W_r\left(f(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau);\ \mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}\right).$$

Hierin muß jetzt die Entwicklung von $f(\tau)$ zum Punktsystem $\mathfrak{s}$ eingetragen werden; sie lautet [nach (34) für $A = A_t$, $S = E$]:

$$(76)\qquad f(\tau) = \sum_{k_1, k_2, \ldots k_n} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \vartheta_{(k)}(\tau)$$

und ist als Laurent-Reihe in jedem abgeschlossenen Bereich von $\mathfrak{H}$, insbesondere $\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}$, absolut und gleichmäßig konvergent. Daher darf die Integration über $\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}$ mit der Summation über (k) vertauscht werden. Wir erhalten dann

$$(77)\qquad (f, \Xi_{-r}) = \lim_{\alpha, \beta, \lambda \to 0} \sum_{(k)} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} W_r\left(\vartheta_{(k)}(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau);\ \mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}\right).$$

Zur Berechnung von

$$W_r\left(\vartheta_{(k)}(\tau),\ \vartheta_{(q)}(\tau);\ \mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}\right)$$

führen wir neue Integrationsvariable ein:

1. $\nu \leqq t$. $\log \tau = \log (x + iy) = u + iv$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$,

$$|\tau|^{-r} y^{r-2} \left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| = \sin^{r-2} v,$$

2. $\nu > t$. $w = \dfrac{\tau - i}{\tau + i} = u + iv = \varrho e^{i\varphi}$,

$$|\tau + i|^{-2r} y^{r-2} \left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| = 4^{1-r} (1 - \varrho^2)^{r-2}, \qquad \left|\frac{\partial (u, v)}{\partial (\varrho, \varphi)}\right| = \varrho.$$

Schließlich wird die Variablenreihe $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(t)}$ noch ersetzt durch die ersten t der n Variablen

$$(78)\qquad \sigma_\mu = \Re z_\mu = \sum_{\nu=1}^{t} m_\mu^{(\nu)} u^{(\nu)} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, n$$

mit

$$\left|\frac{\partial (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(t)})}{\partial (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)}\right| = R,$$

wobei R der Betrag der Determinante $|\log \lambda_\mu^{(\nu)2}|$; $(\mu, \nu \leq t)$. In den neuen Veränderlichen wird die Punktmenge $\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}$ beschrieben durch die Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} \leq \sigma_\nu \ &\leq \tfrac{1}{2} \\ \alpha^{(\nu)} \leq v^{(\nu)} &\leq \pi - \beta^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, t, \\
&\left.\begin{aligned} 0 \leq \varrho^{(\nu)} &\leq 1 - \lambda^{(\nu)} \\ 0 \leq \psi^{(\nu)} &\leq 2\pi \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu = t+1, t+2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{79}
$$

Erinnert man sich noch der Beziehungen

$$
\left.\begin{aligned}
j^{(\nu)} &= \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu^{(\nu)} (k_\mu + \varkappa_\mu) \\
p^{(\nu)} &= \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu^{(\nu)} (q_\mu + \varkappa_\mu)
\end{aligned}\right\} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, t, \tag{80}
$$

so erhält man nach elementarer Umrechnung

$$
W_r(\vartheta_{(k)}(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau); \mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}) = \int_{\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}} \!\!\cdots\! \int \vartheta_{(k)}(\tau)\, \overline{\vartheta_{(q)}(\tau)}\, \mathrm{N}\,(y^{r-2}\, dx\, dy)
$$

$$
= 4^{(1-r)(n-t)} R \cdot \int_{\mathfrak{B}_{\alpha\beta\lambda}} \!\!\cdots\! \int \prod_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i (k_\nu - q_\nu) \sigma_\nu} \prod_{\nu=1}^{t} e^{-2\pi (j^{(\nu)} + p^{(\nu)}) v^{(\nu)}} \sin^{r-2} v^{(\nu)} \times
$$

$$
\times \prod_{\nu=t+1}^{n} \varrho^{(\nu) k_\nu + q_\nu + 1} (1 - \varrho^{(\nu)2})^{r-2} e^{i(k_\nu - q_\nu)\psi^{(\nu)}} \prod_{\nu=1}^{t} d\sigma_\nu\, dv^{(\nu)} \prod_{\nu=t+1}^{n} d\varrho^{(\nu)}\, d\psi^{(\nu)}.
$$

Dieses Integral ist offenbar nur dann von 0 verschieden, wenn $(k) = (q)$ ist. In diesem Fall wird

$$
W_r(\vartheta_{(q)}(\tau), \vartheta_{(q)}(\tau); \mathfrak{F}^*) = 4^{(1-r)(n-t)} \pi^{n-t} R \times
$$

$$
\times \prod_{\nu=1}^{t} \int_0^{\pi} e^{-4\pi p^{(\nu)} v} \sin^{r-2} v\, dv \prod_{\nu=t+1}^{n} \int_0^1 \varrho^{q_\nu} (1-\varrho)^{r-2}\, d\varrho. \tag{81}
$$

Die hier auftretenden bestimmten Integrale ergeben sich aus den Formeln

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} e^{-4\pi p v} \sin^{r-2} v\, dv = \frac{\pi e^{-2p\pi^2} \Gamma(r-1)}{2^{r-2} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 2\pi i p\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - 2\pi i p\right)} \text{ [7]}, \\
&\int_0^1 \varrho^q (1-\varrho)^{r-2}\, d\varrho = \frac{\Gamma(q+1)\, \Gamma(r-1)}{\Gamma(q+r)}.
\end{aligned} \tag{82}
$$

[7] E. E. Kummer, De integralibus definitis et seriebus infinitis. Crelle's Journal f. d. r. u. a. Math. 17 (1837), Nr. 11, S. 210—227. Die Formeln (31) und (32) auf S. 217 liefern das gewünschte Integral.

Damit ist die Berechnung des Skalarproduktes durchgeführt mit dem Ergebnis

$$\left(f(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, A_t, \mathsf{G}, (q))\right) = \varepsilon_r(A_t, (q))\, b_{q_1 q_2 \ldots q_n},$$

(83)
$$\varepsilon_r(A_t, (q)) = \frac{(4^{(1-r)} \pi \, \Gamma(r-1))^n \, 2^{rt} R \prod_{\nu=1}^{t} e^{-2 p^{(\nu)} \pi^2} \prod_{\nu=t+1}^{n} q_\nu !}{\prod_{\nu=1}^{t} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 2\pi i p^{(\nu)}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - 2\pi i p^{(\nu)}\right) \prod_{\nu=t+1}^{n} \Gamma(r+q_\nu)}.$$

Die Übertragung dieses Resultats auf den Fall eines beliebig gelegenen Fixpunktsystems $\mathfrak{s}$ wird durch die Transformationstheorie geleistet und bietet keinerlei Schwierigkeiten mehr. Nach (64) und (46) ist nämlich

$$\left(f(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))\right)_{\mathsf{G}}$$
$$= \zeta^{(r)}(A, L)^{-1} \, \mathsf{N}\, \lambda^{-r} \left(f^L(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v^L, A_t, L^{-1}\mathsf{G} L, (q))\right)_{L^{-1}\mathsf{G} L}$$

mit $L = \lambda A^{-1} A_t$, $\lambda^2 |A^{-1} A_t| = 1$, $\lambda > 0$. Ferner ergibt sich nach (28), (32), (45) aus der Entwicklung

(84)
$$h_A(\tau) f(\tau) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} b_{k_1 k_2 \ldots k_n}(A) \prod_{\nu=1}^{t} (A^{(\nu)} \tau^{(\nu)})^{2\pi i j^{(\nu)}} \prod_{\nu=t+1}^{n} (A^{(\nu)} \tau^{(\nu)})^{k_\nu}$$

durch Transformation mit L:

$$f^L(\tau) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} b_{k_1 k_2 \ldots k_n}(A) \left(\zeta^{(r)}(A, L)\right)^{-1} \mathsf{N}\, \lambda^{-r} \vartheta_{(k)}(\tau).$$

Aus (83) folgt daher auch die allgemeine Grundformel

(85)
$$\left(f(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))\right) = \varepsilon_r(A, (q))\, b_{q_1 q_2 \ldots q_n}(A)$$

mit

(86)
$$\varepsilon_r(A, (q)) = \mathsf{N}\, \lambda^{-2r} \varepsilon_r(A_t, (q))$$
$$= \frac{(2^{2-r} \pi \, \Gamma(r-1))^n R \prod_{\nu=1}^{t} e^{-2 p^{(\nu)} \pi^2} \prod_{\nu=t+1}^{n} q_\nu !}{\mathsf{N} |A|^r \prod_{\nu=1}^{t} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 2\pi i p^{(\nu)}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - 2\pi i p^{(\nu)}\right) \prod_{\nu=t+1}^{n} \Gamma(r+q_\nu)}.$$

Das Skalarprodukt einer beliebigen (ganzen) Form $f(\tau)$ vom Typus $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ mit einer Poincaréschen Reihe $\Xi_{-r}(\tau)$ wird in der Weise bestimmt, daß man $f(\tau)$ mit Hilfe der Eisensteinreihen auf eine Spitzenform reduziert. Die Eisensteinreihen geben zum Skalarprodukt keinen Beitrag, weil sie auf allen Spitzenformen im Sinne der Metrisierungstheorie senkrecht stehen [vgl. [1]] und die hier betrachteten Poincaréschen Reihen sämtlich Spitzenformen darstellen.

Die Folgerungen, die wir nun aus der Grundformel (85) ziehen, bilden den Inhalt der nachstehenden beiden Sätze.

Satz 2. *Es sei* $r > 2$, $|v| = 1$, (q) *ein Exponentensystem mit* $q_\mu \geqq 0$ *für* $\mu > t$. *Die Poincarésche Reihe* $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))$ *zu einem Punktsystem* $\mathfrak{s}$ *ist eine Spitzenform vom Typus* $\{\mathsf{G}, -r, v\}$. *Sie steht auf allen Spitzenformen* $\mathfrak{f}(\tau)$ *vom Typus* $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ *senkrecht, in deren Entwicklung* (84) *zum Punktsystem* $\mathfrak{s}$ *der Koeffizient* $b_{(q)}(A)$ *zum Exponentensystem* (q) *verschwindet. Durch diese Eigenschaft ist die Poincarésche Reihe bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.* $\Xi_{-r}(\tau)$ *verschwindet dann und nur dann identisch in* τ, *wenn in der Entwicklung* (84) *der Koeffizient* $b_{(q)}(A)$ *für sämtliche Spitzenformen* $\mathfrak{f}(\tau)$ *vom Typus* $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ *gleich Null ist.*

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 kann aus der Menge der Poincaréschen Reihen* $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \mathsf{G}, (q))$ *zu festem* A *eine Basis für die Schar der Spitzenformen vom Typus* $\{\mathsf{G}, -r, v\}$ *ausgewählt werden (Vollständigkeitssatz).*

Eine ausführlichere Begründung dieser Sätze erübrigt sich; denn die Beweise für die analogen Aussagen über Poincarésche Reihen zu parabolischen Spitzen [vgl. [1])] lassen sich auf die vorliegenden Verhältnisse wörtlich übertragen.

(Eingegangen am 2. 10. 1941.)