Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum.

Von

Hans Maaß in Heidelberg.

Es sei Z ein n-reihige quadratische komplexe Matrix, $Z = X + iY$ die Zerlegung von Z in Real- und Imaginärteil. Für eine komplexe Matrix Ω soll $\Omega > 0$ bedeuten, daß Ω hermitisch und die zu Ω gehörige hermitische Form positiv definit ist. Der Siegelsche Halbraum $\mathfrak{H}$ wird dann durch

$$(1) \qquad Z' = Z, \quad Y > 0$$

beschrieben. Alle reellen Modulsubstitutionen:

$$(2) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma' \iota \sigma = \iota, \quad \iota = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}$$

führen $\mathfrak{H}$ vermöge

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

bekanntlich[1]) in sich über. In vorliegender Note wird eine Metrik für $\mathfrak{H}$ eingeführt, welche als direkte Verallgemeinerung der bekannten hyperbolischen Maßbestimmung der Halbebene $\mathfrak{Im}\, z > 0$ anzusprechen ist. M. Sugawara hat sich bereits um eine solche Verallgemeinerung bemüht[2]); er hat indessen den Ansatz, der hier zugrunde liegt, nicht weiter verfolgt. Wir gehen aus von der quadratischen Differentialform

$$(3) \qquad ds^2 = Sp\,(dZ\, Y^{-1} d\bar{Z}\, Y^{-1}) \quad (Sp = \text{Spur});$$

sie definiert ein gegenüber allen reellen Modulsubstitutionen invariantes Bogenelement ds für $\mathfrak{H}$. Für die durch ds induzierte Metrik werden im einzelnen die folgenden Sätze bewiesen. Unter allen (analytischen) Kurven, welche zwei gegebene Punkte von $\mathfrak{H}$ innerhalb $\mathfrak{H}$ verbinden, gibt es genau eine mit kürzester Länge. Diese ausgezeichnete Kurve (Geodätische) kann in folgendem Sinne explizit angegeben werden. Transformiert man, was stets möglich ist, zwei gegebene Punkte von $\mathfrak{H}$ mittels einer geeignet gewählten

[1]) C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Annalen **116** (1939), S. 617—657.

[2]) M. Sugawara, On the General Zetafuchsian Functions. Proc. Acad. Tokyo **16** (1940), S. 367—372; A Generalization of Poincare-space. Proc. Acad. Tokyo **16** (1940), S. 373—377. Zur zweiten Arbeit ist zu bemerken, daß die Geodätischen bezüglich der besprochenen Metrik im allgemeinen keineswegs eindeutig bestimmt sind. Die Auszeichnung von „geraden Linien" (straight lines) bedeutet daher eine gewisse Willkür.

reellen Modulsubstitution in die spezielle Lage iE, iD (D = reelle Diagonalmatrix), so wird die Geodätische $Z(t) = (x_{\mu\nu}(t)) + i(y_{\mu\nu}(t))$, welche die Punkte iE, $iD = i(\delta_{\mu\nu} d_\nu)$ verbindet $(0 \leqq t \leqq 1, Z(0) = iE, Z(1) = iD)$, durch das Gleichungssystem

$$(4) \qquad x_{\mu\nu}(t) = 0, \quad y_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} d_\nu^t \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n, \; 0 \leqq t \leqq 1$$
$$(\delta_{\mu\nu} = \text{Kroneckersymbol})$$

beschrieben. Der Abstand zweier beliebiger Punkte Z_1, Z_2 aus $\mathfrak{H}$, d. h. die Länge der Geodätischen, welche Z_1 mit Z_2 verbindet, hat den Wert

$$(5) \qquad s(Z_1, Z_2) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \left(\log \frac{1+\lambda_\nu}{1-\lambda_\nu}\right)^2};$$

dabei sind λ_ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die charakteristischen Wurzeln von

$$(5\text{a}) \qquad (Z_2 - Z_1)(Z_2 - \bar{Z}_1)^{-1}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1)(\bar{Z}_2 - Z_1)^{-1}.$$

Für eine Reihe von Überlegungen ist es zweckmäßig, den Bereich $\mathfrak{H}$ mittels

$$(6) \qquad W = \tau(Z) = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} E & -iE \\ E & iE \end{pmatrix}$$

in den Bereich $\mathfrak{E}$:

$$(7) \qquad W' = W, \quad E - W'\bar{W} > 0$$

zu transformieren[3]). Entsprechend ist die Gruppe Γ der reellen Modulsubstitutionen durch die transformierte Gruppe $\Gamma_1 = \tau\Gamma\tau^{-1}$ zu ersetzen. Die Substitutionen $\sigma \subset \Gamma_1$ sind dadurch zu charakterisieren, daß

$$(8) \qquad \sigma' \iota \sigma = \iota, \quad \sigma' \varkappa \bar{\sigma} = \varkappa \quad \text{mit} \quad \varkappa = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}.$$

Aus der Darstellung[3]) entnimmt man zunächst leicht den folgenden Sachverhalt. W_1, W_2 seien zwei beliebige Punkte aus $\mathfrak{E}$, λ_ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, die charakteristischen Wurzeln von

$$(9) \qquad (W_2 - W_1)(E - \bar{W}_1 W_2)^{-1}(\bar{W}_2 - \bar{W}_1)(E - W_1 \bar{W}_2)^{-1},$$

dann ist jede symmetrische Funktion der Wurzeln λ_ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, insbesondere

$$s(W_1, W_2) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \left(\log \frac{1+\lambda_\nu}{1-\lambda_\nu}\right)^2}$$

[3]) Vgl. M. Sugawara, Über eine allgemeine Theorie der Fuchsschen Gruppen und Theta-Reihen. Annals of Math. 41 (1940), S. 488–494.

invariant gegenüber den Substitutionen von Γ_1. Zwischen den Punkten W_k und ihren Originalen $Z_k = \tau^{-1}(W_k)$, $k = 1, 2$, bestehen, wie man leicht einsieht, die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
W_2 - W_1 &= +2i\,(Z_1 + iE)^{-1}(Z_2 - Z_1)\,(Z_2 + iE)^{-1},\\
E - \overline{W}_1 W_2 &= -2i\,(\overline{Z}_1 - iE)^{-1}(Z_2 - \overline{Z}_1)\,(Z_2 + iE)^{-1},\\
\overline{W}_2 - \overline{W}_1 &= -2i\,(\overline{Z}_1 - iE)^{-1}(\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1)\,(\overline{Z}_2 - iE)^{-1},\\
E - W_1\overline{W}_2 &= +2i\,(Z_1 + iE)^{-1}(\overline{Z}_2 - Z_1)\,(\overline{Z}_2 - iE)^{-1}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Verknüpfen wir diese vier Gleichungen derart, daß linksseitig die Matrix (9) entsteht, so erhalten wir rechtsseitig die mit $(Z_1 + iE)$ transformierte Matrix (5a). Die beiden Matrizen (5a) und (9) haben daher dieselben charakteristischen Wurzeln, woraus die Invarianz von (5) bezüglich Γ erhellt. Für zwei infinitesimal benachbarte Punkte Z, $Z + dZ$ liefert (5) unser Bogenelement:

$$s(Z, Z + dZ) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (2\lambda_\nu)^2} = \sqrt{Sp\,(dZ\,Y^{-1}\,\overline{dZ}\,Y^{-1})} = ds.$$

Dieses ist also ebenfalls gegenüber den reellen Modulsubstitutionen invariant. Wir brauchen nur noch einzusehen, daß $s(Z_1, Z_2)$ für die durch (3) definierte Metrik die oben angegebene Bedeutung hat. Das ergibt sich automatisch am Schluß der Betrachtung. Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß zwei gegebene Punkte von $\mathfrak{H}$ durch eine geeignet gewählte Substitution aus Γ stets in die oben angegebene spezielle Lage gebracht werden können. Es genügt natürlich, die entsprechende Aufgabe im transformierten Bereich $\mathfrak{E}$ zu lösen: Zwei gegebene Punkte W_1, W_2 sind durch eine geeignet gewählte Substitution aus Γ_1 in die Lage O, D_1 (= reelle Diagonalmatrix) zu transformieren. Nach [3]) ist es möglich, den Punkt W_1 in den Nullpunkt O zu transformieren. Demnach können wir uns offenbar auf den Fall $W_1 = O$ beschränken. Gesucht wird dann eine Substitution $\sigma \subset \Gamma_1$, für welche

$$\sigma(O) = O, \quad \sigma(W_2) = D_1.$$

Die Substitution σ hat notwendig die Gestalt

$$\sigma = \begin{pmatrix} U & O \\ O & \overline{U} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U'\,\overline{U} = E.$$

Es muß also eine unitäre Matrix U bestimmt werden, für welche $\sigma(W_2) = UW_2\overline{U}^{-1} = UW_2U' = D_1$ eine reelle Diagonalmatrix wird. Eine solche Matrix U gibt es in der Tat für jede symmetrische komplexe Matrix W_2[4]). Wir kommen nun zum Eindeutigkeitsbeweis für die Geodätische durch zwei

[4]) U. Wegner u. J. Wellstein, Bemerkungen zur Transformation von komplexen symmetrischen Matrizen. Monatshefte f. Math. u. Phys. 40 (1933), S. 319—322.

beliebige Punkte Z_1, Z_2 aus $\mathfrak{H}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können und wollen wir im folgenden $Z_1 = iE$, $Z_2 = iD$, $D =$ reelle Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen d_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, voraussetzen. $Z = Z(t) = (x_{\mu\nu}(t)) + i\,(y_{\mu\nu}(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$, sei die Gleichung für die vorerst noch hypothetische Geodätische zwischen Z_1 und Z_2 und

$$s\,(Z_1, Z_2) = \int_0^1 \sqrt{Sp\left(\dot{Z}\,Y^{-1}\dot{Z}\,Y^{-1}\right)}\,dt \quad \left(\dot{(\;)} = \frac{d}{d\,t}(\;)\right) \tag{11}$$

ihre Länge. Da man bei der Spurbildung eines Matrizenproduktes die Faktoren zyklisch vertauschen kann, so zerfällt die Form (3) in

$$Sp\,(\dot{Z}\,Y^{-1}\dot{Z}\,Y^{-1}) = Sp\,(\dot{X}\,Y^{-1})^2 + Sp\,(\dot{Y}\,Y^{-1})^2. \tag{12}$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung sind positiv definite quadratische Formen in den Elementen von $\dot{X}$ bzw. $\dot{Y}$. Es muß nun notwendig $Sp\,(\dot{X}\,Y^{-1})^2 = 0$ und daher $\dot{X} = O$ sowie $X = O$ identisch in t sein, da man anderenfalls in $iY(t)$ eine kürzere Verbindung von Z_1 und Z_2 an Stelle von $Z(t)$ hätte, was der Voraussetzung über $Z(t)$ widerspricht. Der nächste Schritt soll zeigen, daß $Y(t)$ für jeden Wert von t Diagonalgestalt haben muß. Wir bestimmen zu diesem Zweck eine reelle orthogonale Matrix $U = U(t)$ derart, daß $H = H(t) = U^{-1}\,Y\,U'^{-1}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ wird. Dieses Verfahren kann so durchgeführt werden, daß $U(0) = E$, $H(1) = D$ und die Elemente von U und H analytische Funktionen von t werden, sofern nur vorausgesetzt wird, daß $Z(t)$ von t analytisch abhängt, was hiermit geschehen soll. Mit Hilfe von $U\,U' = E$ findet man:

$$\begin{gathered}
\dot{Y}\,Y^{-1} = \dot{U}\,U^{-1} + U\dot{H}\,H^{-1}U^{-1} + U\,H\,\dot{U}'\,U\,H^{-1}\,U^{-1},\\
Sp\,(\dot{Y}\,Y^{-1})^2 = Sp\,(\dot{U}\,U^{-1})^2 + Sp\,(\dot{H}\,H^{-1})^2 + Sp\,(\dot{U}'\,U)^2 +\\
+ 2\,Sp\,(\dot{U}\dot{H}\,H^{-1}U^{-1}) + 2\,Sp\,(\dot{H}\,\dot{U}'\,U\,H^{-1}) + 2\,Sp\,(\dot{U}\,H\,\dot{U}'\,U\,H^{-1}U^{-1}).
\end{gathered}$$

Zur Abkürzung wird $\Omega = (\omega_{\mu\nu}) = U^{-1}\dot{U}$ eingeführt. $\dot{U}\,U' + U\,\dot{U}' = O$ besagt, daß $\Omega' = -\Omega$. Die Schiefsymmetrie von Ω hat insbesondere

$$\begin{aligned}
Sp\,(\dot{U}\dot{H}\,H^{-1}U^{-1}) &= Sp\,(\Omega\dot{H}\,H^{-1}) = 0,\\
Sp\,(\dot{H}\,\dot{U}'\,U\,H^{-1}) &= -Sp\,(\dot{H}\,\Omega\,H^{-1}) = 0
\end{aligned}$$

zur Folge und damit schließlich die einfache Gleichung

$$\begin{aligned}
Sp\,(\dot{Y}\,Y^{-1})^2 &= -2\,Sp\,(\Omega\Omega') + 2\,Sp\,(\Omega H\,\Omega' H^{-1}) + Sp\,(\dot{H}\,H^{-1})^2\\
&= 2\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\mu\nu}^2 (h_\nu h_\mu^{-1} - 1) + Sp\,(\dot{H}\,H^{-1})^2\\
&= 2\sum_{\mu<\nu} \omega_{\mu\nu}^2 (h_\nu h_\mu^{-1} + h_\mu h_\nu^{-1} - 2) + Sp\,(\dot{H}\,H^{-1})^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Das Minimum von $ab^{-1}+ba^{-1}$ für $a, b > 0$ liegt bei 2 und wird nur für $a = b$ angenommen. Wir stellen damit fest: Es ist stets

$$Sp(\dot{Y}Y^{-1})^2 \geqq Sp(\dot{H}H^{-1})^2, \tag{14}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn aus $h_\nu \neq h_\mu$ stets $\omega_{\mu\nu} = 0$ folgt. Das Gleichheitszeichen muß aber gelten, da andernfalls die Verbindungskurve $iH(t)$ von Z_1 nach Z_2 wieder kleinere Länge als die hypothetische Geodätische $Z(t)$ hätte. Unter den charakteristischen Wurzeln $\lambda_1, h_2, \ldots, h_n$ von $Y(t)$ mögen im allgemeinen p untereinander verschiedene vorkommen. Wir bezeichnen sie mit $\lambda_\mu = \lambda_\mu(t)$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$; n_μ sei die Vielfachheit der allgemeinen Wurzel λ_μ. Wegen der Analytizität kann $h_\mu(t) = \lambda_\nu(t)$ für $\mu \neq \nu$ nur in endlich vielen Punkten t stattfinden. Wir dürfen uns die Wurzeln $h_1, h_2, \ldots, h_n$ so angeordnet denken, daß die n_1 ersten Wurzeln dieser Reihe gleich λ_1, die n_2 folgenden Wurzeln gleich λ_2 usf., die n_p letzten Wurzeln gleich λ_p sind. Im allgemeinen hat dann Ω die Gestalt

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & & & 0 \\ & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Omega_p \end{pmatrix}, \tag{15}$$

wobei Ω_μ eine quadratische Matrix von n_μ Zeilen ($\mu = 1, 2, \ldots, p$). Da Ω analytisch von t abhängt, gilt Gleichung (15) für alle t. Für die orthogonale Matrix U gilt entsprechend zu (15)

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_p \end{pmatrix}; \tag{16}$$

denn bei gegebener Matrix Ω ist die Matrizendifferentialgleichung

$$\dot{U} = U\Omega$$

mit der Anfangsbedingung $U(0) = E$ eindeutig auflösbar, und es gibt eine Lösung der Gestalt (16). Selbstverständlich sind alle Matrizen U_μ ebenfalls orthogonal, so daß also

$$Y(t) = H(t). \tag{17}$$

Die Gleichung (11) vereinfacht sich damit zu

$$s(Z_1, Z_2) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \dot{y}_{\nu\nu}^2 \, y_{\nu\nu}^{-2}}\, dt. \tag{18}$$

Deutet man $(\log y_{11}, \log y_{22}, \ldots, \log y_{nn})$ als cartesische Koordinaten eines Punktes im n-dimensionalen Raum R_n, so wird $s(Z_1, Z_2)$ gleich der euklidischen

Länge der Integrationskurve. Das absolute Minimum von $s(Z_1, Z_2)$ erhält man also nur dann, wenn man über die Gerade im R_n integriert, welche die Punkte mit den Koordinaten $(0, 0, \ldots, 0)$ und $(\log d_1, \log d_2, \ldots, \log d_n)$ miteinander verbindet. Der Eindeutigkeitsbeweis für die Geodätische ist damit erbracht, die Existenz natürlich auch gesichert. Überdies erhalten wir die noch fehlenden Geodätengleichungen

$$\log y_{\nu\nu} = t \log d_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

und die Länge der Geodätischen

$$s\,(Z_1, Z_2) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (\log d_\nu)^2}. \tag{19}$$

Die charakteristischen Wurzeln λ_ν^2 von (5a) sind im vorliegenden Fall gleich $\left(\frac{d_\nu - 1}{d_\nu + 1}\right)^2$; damit ergibt sich die Übereinstimmung von (5) und (19). Wegen der bereits erkannten Invarianz von (5) gegenüber den reellen Modulsubstitutionen liefert Formel (5) den Abstand der Punkte Z_1, Z_2 auch bei allgemeiner Lage der Punkte.

Bettet man die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ in den $n(n+1)$-dimensionalen reellen Raum der Punkte mit den cartesischen Koordinaten $x_{\mu\nu}$, $y_{\mu\nu}$, $\mu \leqq \nu$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$ ein, so erhält man eine euklidische Metrik für $\mathfrak{H}$ gemäß der Abstandsformel

$$e\,(Z^*, Z) = \sqrt{\sum_{\mu \leqq \nu} (z^*_{\mu\nu} - z_{\mu\nu})\,(\overline{z^*_{\mu\nu} - z_{\mu\nu}})}. \tag{20}$$

Für gewisse Überlegungen ist es von Interesse zu wissen, in welcher Beziehung die Umgebungssysteme der beiden Maßbestimmungen zueinander stehen. Im Falle $n = 1$ sind die Verhältnisse vollständig zu übersehen. Es ist z. B. leicht einzusehen, daß für einen Punkt $z = x + iy$ der oberen z-Halbebene die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &s\,(z, z + \varDelta z) \leqq \frac{1}{1-\delta}\left|\frac{\varDelta z}{y}\right| \quad \text{für} \quad \left|\frac{\varDelta z}{y}\right| \leqq \delta < 1, \\ &\left|\frac{\varDelta z}{y}\right| \leqq \frac{2}{2 - 3\delta}\, s\,(z, z + \varDelta z) \quad \text{für} \quad s\,(z, z + \varDelta z) \leqq \delta < \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{21}$$

bestehen. Diese Ungleichungen haben ihre Analoga für allgemeines n. Für $Z = X + iY$, $Y = C'C$, $Z = C'Z^*C$, $\varDelta Z = C'\varDelta Z^* C$, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0(n)$ und gewisse nur von n abhängige Konstanten c_1, c_2 gilt nämlich

$$\begin{aligned} &s\,(Z, Z + \varDelta Z) \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad e\,(Z^*, Z^* + \varDelta Z^*) \leqq c_1 \varepsilon, \\ &e\,(Z^*, Z^* + \varDelta Z^*) \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad s\,(Z, Z + \varDelta Z) \leqq c_2 \varepsilon. \end{aligned} \tag{22}$$

Diese Abschätzungen sind aus (5) abzuleiten:

$$s(Z, Z + \Delta Z) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\log \frac{1+\lambda_\nu}{1-\lambda_\nu}\right)^2},$$

(23) $$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^2 = Sp\, \Delta Z^* (\Delta Z^* + 2iE)^{-1}\, \overline{\Delta Z^*}\, (\overline{\Delta Z^*} - 2iE)^{-1}$$

$$= Sp\, \Xi \bar{\Xi}' = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \xi_{\mu\nu} \bar{\xi}_{\mu\nu}$$

mit

(24) $$\Xi = \Xi' = \Delta Z^* (\Delta Z^* + 2iE)^{-1} = (\xi_{\mu\nu}).$$

Die letzte Gleichung ergibt nach ΔZ^* aufgelöst:

(25) $$\Delta Z^* = 2i\, \Xi\, (E - \Xi)^{-1} = (\Delta z^*_{\mu\nu}).$$

Mit $O(\varepsilon)$ bezeichnen wir allgemein einen Ausdruck, welcher nach Division durch ε dem Betrage nach unter einer nur von n abhängigen Schranke liegt, sofern man sich auf ein hinreichend kleines ε-Intervall $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0(n)$ beschränkt. Nun zum Beweis von (22):

1. Sei $e(Z^*, Z^* + \Delta Z^*) \leqq \varepsilon$, dann folgt der Reihe nach
$\Delta z^*_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$, $\xi_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$, $\lambda_\nu = O(\varepsilon)$, $s(Z, Z + \Delta Z) = O(\varepsilon)$.
2. Sei $s(Z, Z + \Delta Z) \leqq \varepsilon$, dann ergibt sich nacheinander
$\frac{1+|\lambda_\nu|}{1-|\lambda_\nu|} \leqq e^\varepsilon$, $|\lambda_\nu| \leqq \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = O(\varepsilon)$, $\xi_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$, $\Delta z^*_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$,
$e(Z^*, Z^* + \Delta Z^*) = O(\varepsilon)$.

(Eingegangen am 23. 9. 1941.)