Maaß

ÜBERREICHT VOM VERFASSER

ABHANDLUNGEN

AUS DEM

MATHEMATISCHEN SEMINAR

DER

HANSISCHEN UNIVERSITÄT

HERAUSGEGEBEN VON

W. BLASCHKE — E. HECKE — E. WITT

SONDERABDRUCK AUS BAND 14

HANS MAASS:

ÜBER DIE DARSTELLUNG TOTAL POSITIVER ZAHLEN DES KÖRPERS $R(\sqrt{5})$ ALS SUMME VON DREI QUADRATEN

VERLAG B. G. TEUBNER

LEIPZIG

1941

Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers $R(\sqrt{5})$ als Summe von drei Quadraten.

Von HANS MAASS in Heidelberg.

Bekanntlich[1]) ist $k = R(\sqrt{5})$ der einzige reelle quadratische Zahlkörper, in welchem jede ganze total positive Zahl μ als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Es erscheint mir nun bemerkenswert, daß man bei einer solchen Darstellung in jedem Falle bereits mit drei Quadraten auskommt und daß die Anzahl $a(\mu)$ der Darstellungen von μ als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen bis auf einen elementaren rationalen Faktor mit der Idealklassenzahl h_0 des biquadratischen Zahlkörpers $K = k(\sqrt{-\mu})$ übereinstimmt. Die Klassenzahl h_0 spielt also bei diesem Darstellungsproblem die gleiche Rolle wie die Idealklassenzahl von $R(\sqrt{-n})$ bei der Frage nach der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von drei Quadraten im Rationalen. Herr HECKE hat einen derartigen Zusammenhang vor Jahren vermutet und sich mit aus diesem Grunde um einen elementaren arithmetischen Ausdruck für die Klassenzahl h_0 bemüht[2]).

Im einzelnen wird folgendes ausgeführt. Durch eine im wesentlichen funktionstheoretische Überlegung wird bewiesen, daß es in k nur eine Klasse von positiv definiten ganzzahligen ternären quadratischen Formen mit Determinante $\varepsilon^{2\nu}$ $\left(\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{ Grundeinheit von } k\right)$ gibt. Auf Grund des Hauptsatzes der Siegelschen Theorie der quadratischen Formen[3]) ist daher die Thetareihe

$$\vartheta(\tau) = 1 + \sum_{\mu \gg 0} a(\mu)\, e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{5}}} = \left(\sum_{\nu} e^{\pi i S \frac{\nu^2\tau}{\sqrt{5}}}\right)^3$$

---

[1]) F. GÖTZKY, Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher, Math. Annalen **100** (1928), S. 411—437.

[2]) E. HECKE, Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern, Göttinger Nachr. (1921), S. 1—23.

[3]) C. L. SIEGEL, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Annals of Mathematics **38** (1937), S. 212—291.

zur quadratischen Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ mit der analytischen Geschlechtsinvarianten $\varphi(\tau)$ zu dieser Form identisch[4]. Diese Identität liefert die besprochene Formel für die Darstellungsanzahl $a(\mu)$. Zu $\varphi(\tau)$ gibt es, wie ich an anderer Stelle[5]) gezeigt habe, eine Partialbruchentwicklung $\varphi(t, s)$, welche von einer konvergenzerzeugenden Hilfsveränderlichen s analytisch abhängt. $\varphi(\tau)$ ist der Wert der in s analytischen Funktion $\varphi(\tau, s)$ im Punkte $s = 0$. Die vollständige rechnerische Durchführung dieses Ansatzes zeigt insbesondere, daß für eine ganze total positive Zahl μ stets $a(\mu) > 0$ ist. Dabei auftretende Schwierigkeiten sind, wie bekannt, durch die Sonderstellung der Primzahl 2 bedingt.

Sei

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{3} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu$$

eine positiv definite ternäre quadratische Form mit Determinante $\varepsilon^{2\nu}$ und ganzzahligen symmetrischen Koeffizienten $a_{\nu\mu}$.

$$\vartheta_1(\tau) = 1 + \sum_{\mu \gg 0} a_1(\mu)\, e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{5}}} = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} e^{\pi i S \frac{Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\tau}{\sqrt{5}}}$$

die zugeordnete Thetareihe. Da die Determinante von $Q(x_1, x_2, x_3)$ eine Einheit ist, zeigt $\vartheta_1(\tau)$ bezüglich der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

das gleiche Verhalten wie $\vartheta(\tau)$[6]). Diese drei Substitutionen erzeugen nach [6]) die in der Hilbertschen Modulgruppe zu $R(\sqrt{5})$ enthaltene Thetagruppe $\mathbf{T}$. Mit $\vartheta(\tau)$ ist also auch $\vartheta_1(\tau)$ eine Modulform der Dimension $-\frac{3}{2}$ für die Thetagruppe $\mathbf{T}$ und das Multiplikationssystem $v_{0\infty}^3$[5]). Koppelt man die unabhängigen Veränderlichen τ, τ' durch die Gleichung

$$\tau_1 = \varepsilon\tau = \varepsilon'\tau',$$

so erhält man, wie eine einfache Rechnung zeigt, in $\psi(\tau_1) = \vartheta_1(\tau)$ eine ganze Modulform der Dimension -3 für die rationale Thetagruppe $\mathbf{T}_0$.

[4]) Die im vorletzten Satz der Einleitung zu meiner Arbeit „Konstruktion ganzer Modulformen ...“ (Abhandlungen aus d. Math. Seminar Hamburg **12** (1937), S. 133—162) ausgesprochene Behauptung erfährt damit eine Berichtigung.

[5]) H. Maass, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen, Math. Zeitschrift **43** (1938), S. 709—738.

[6]) H. Maass, Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$, Math. Annalen (im Druck).

und man erkennt, daß Dimension und Multiplikatorsystem der Formen $\psi(\tau_1)$ und $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 n^2}\right)^6$ übereinstimmen, indem man das Verhalten dieser Formen bezüglich der erzeugenden Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathbf{T}_0$ untersucht. Da diese Modulformen nach Ergebnissen der unter [5] zitierten Arbeit durch Dimension, Multiplikatorsystem und Wert in der parabolischen Spitze ∞ eindeutig bestimmt sind, so ist also

$$\psi(\tau_1) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 n^2}\right)^6.$$

Andererseits ergibt sich für die Form $\psi(\tau_1)$ auf Grund ihrer Herkunft die Fourierentwicklung

$$\psi(\tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_1(n)\, e^{\pi i \tau_1 n}$$

mit

$$b_1(n) = \sum_{\substack{\mu = n + m\varepsilon \\ \mu \gg 0}} a_1(\mu) \qquad (a_1(0) = 1).$$

Da nun sicher $a_1(1+\varepsilon) = a_1(\varepsilon^2) = a_1(1)$, so folgt also

$$b_1(0) = a_1(0) = 1, \qquad b_1(1) = a_1(1) + a_1(1+\varepsilon) = 2\, a_1(1).$$

Unabhängig von der Auswahl der quadratischen Form $Q(x_1, x_2, x_3)$ ist daher stets

$$a_1(1) = 6.$$

In dem Gitter, welches der Klasse der zu $Q(x_1, x_2, x_3)$ äquivalenten quadratischen Formen entspricht, bestimme man das Diagramm der Vektoren von der Länge 1. Wie wir soeben festgestellt haben, gibt es deren sechs. Andere Werte als 0, ± 1 kommen für das Skalarprodukt von je zwei Vektoren des Diagramms nicht in Frage[6]. Daher ergibt sich zwangsläufig das Vektordiagramm

$$\pm \mathfrak{e}_1, \quad \pm \mathfrak{e}_2, \quad \pm \mathfrak{e}_3 \qquad (\mathfrak{e}_i \text{ Einheitsvektoren}),$$

woraus erhellt, daß die Formenklasse von $Q(x_1, x_2, x_3)$ durch die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ repräsentiert wird. Es gibt also nur eine solche Formenklasse, und die Identität

$$\vartheta(\tau) = \varphi(\tau)$$

ist bewiesen.

Die nachfolgende Rechnung nimmt von der Partialbruchreihe

$$\varphi(\tau, s) = 1 + \sum_{\substack{(\gamma) \neq 0 \\ (\gamma, \delta) = 1 \\ 2/\gamma\delta}} \frac{H^3\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{\frac{3\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{5}}}{|N\gamma|^{\frac{3}{2}} N(\gamma\tau + \delta)^{\frac{3}{2}} |N(\gamma\tau + \delta)|^{s}}$$

ihren Ausgang[5]). Dabei ist

$$H\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) = \sum_{\mu \bmod \gamma} e^{-\pi i S \frac{\delta\mu^2}{\gamma\sqrt{5}}} \quad \text{für } (\gamma, \delta) = 1,\ 2/\gamma\delta.$$

Wie ich in [5]) gezeigt habe, ist die zunächst nur für $\Re e\, s > \frac{1}{2}$ definierte in s analytische Funktion $\varphi(\tau, s)$ in eine volle Umgebung von $s = 0$ analytisch fortsetzbar. Die Gestalt, in welcher der Funktionswert $\varphi(\tau, 0)$ auftritt, läßt erkennen, daß es sich um die Geschlechtsinvariante $\varphi(\tau)$ handelt. Ich beschränke mich an dieser Stelle auf die Wiedergabe von Resultaten einer Rechnung, welcher allgemeine in [5]) angegebene Überlegungen zugrunde liegen. Danach findet man:

$$\varphi(\tau, s) = 1 + \frac{1}{2^{3+2s}\sqrt{5}} \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} T_\mu(s) B_\mu\left(\frac{\tau}{2}, s\right)$$

mit

$$B_\mu(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{e^{-2\pi i S \frac{\mu x}{\sqrt{5}}}\, dx\, dx'}{N(\tau + x)^{\frac{3}{2}} |N(\tau + x)|^{s}},$$

$$T_\mu(s) = \prod_{(\varrho)} \psi_\varrho(s, \mu), \qquad \psi_\varrho(s, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\varrho^\nu}(\mu)}{|N\varrho^\nu|^{\frac{3}{2}+s}},$$

$$a_\gamma(\mu) = \sum_{\substack{\varkappa \bmod 2\gamma \\ 2/\gamma\varkappa}} \frac{H^3\left(\frac{\varkappa}{\gamma}\right) e^{\pi i S \frac{\varkappa\mu}{\gamma\sqrt{5}}}}{|N\gamma|^{\frac{3}{2}}}.$$

$\mathfrak{o}$ ist der Bereich aller ganzen Zahlen in $k = R(\sqrt{5})$ und (ϱ) durchläuft alle Primideale in k. Für ein beliebiges Primideal (ϱ) von k

erklären wir den Restcharakter $Q(\mu, \varrho)$ für $\mu \subset k$ durch folgende Festsetzung. Es sei $Q(\mu, \varrho) = 1$ stets, falls $\sqrt{\mu} \subset k$. Wenn dagegen $\sqrt{\mu} \not\subset k$, so sei

$$Q(\mu, \varrho) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (\varrho) \text{ in } k(\sqrt{\mu}) \text{ vollständig zerfällt,} \\ -1, & \text{wenn } (\varrho) \text{ in } k(\sqrt{\mu}) \text{ unzerlegt bleibt,} \\ 0, & \text{wenn } (\varrho) \text{ in } k(\sqrt{\mu}) \text{ verzweigt zerfällt.} \end{cases}$$

Für eine ganze von 0 verschiedene Zahl μ bestimme man die genaue Potenz des vorgegebenen Primideals (ϱ), die in μ aufgeht:

$$\varrho^h / \mu, \qquad \varrho^{h+1} \nmid \mu.$$

h sei symbolisch gleich ∞, wenn $\mu = 0$ ist. Die Koeffizienten $a_{\varrho^\nu}(\mu)$ für $\nu > 0$ entnimmt man folgender Aufstellung:

1. $(\varrho) = (2)$

$$a_{2^\nu}(\mu) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{2\nu-1} & \text{für } \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu \leqq h-1, \\ -2^{2\nu-1} & \text{„} \quad \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu = h, \\ (4\,Q^2(-\mu, 2) - 1)\, 2^{2\nu-1} & \text{„} \quad \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu = h+1, \\ 0 & \text{„} \quad \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu \geqq h+2, \\ 0 & \text{„} \quad \nu \equiv 0\,(2), \quad \nu \neq h+2, \\ Q(-\mu, 2)\, 2^{2\nu} & \text{„} \quad \nu \equiv 0\,(2), \quad \nu = h+2. \end{cases}$$

2. $(\varrho) \neq (2)$

$$a_{\varrho^\nu}(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu \leqq h, \\ Q(-\mu, \varrho)\, |N\varrho|^{\nu - \frac{1}{2}} & \text{„} \quad \nu \equiv 1\,(2), \quad \nu = h+1, \\ \varphi(\varrho^\nu) & \text{„} \quad \nu \equiv 0\,(2), \quad \nu \leqq h, \\ -|N\varrho|^{\nu-1} & \text{„} \quad \nu \equiv 0\,(2), \quad \nu = h+1, \\ 0 & \text{„} \quad \nu \geqq h+2. \end{cases}$$

$\varphi(\varrho^\nu)$ bedeutet dabei die Anzahl der primen Restklassen mod ϱ^ν. Bezeichnen wir mit $\zeta_k(s)$ und $\zeta_K(s)$ die Zetafunktionen der Zahlkörper k und $K = k(\sqrt{-\mu})$, ist bekanntlich $\dfrac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$ mit der Zetareihe

$$Z(s, \mu) = \prod_{(\varrho)} \frac{1}{1 - Q(-\mu, \varrho)\, |N\varrho|^{-s}}$$

identisch, sofern $\sqrt{-\mu} \not\subset k$. Eine einfache Betrachtung lehrt dann, daß

$$T_0(s) = \frac{\zeta_k(1+2s)}{\zeta_k(2+2s)} \cdot \frac{1+4^{-s}}{1+4^{-(1-s)}}.$$

$$T_\mu(s) = \frac{Z(1+s,\mu)}{\zeta_k(2+2s)} \cdot U(s,\mu) \quad \text{für } \mu \neq 0.$$

$$U(s,\mu) = \prod_{(\varrho)/2\mu} U_\varrho(s,\mu).$$

$$U_\varrho(s,\mu) = \frac{1 - Q(-\mu,\varrho)\,\mathrm{N}\varrho^{-(1+s)}}{1 - \mathrm{N}\varrho^{-2(1+s)}}\,\psi_\varrho(s,\mu),$$

wobei

1. $(\varrho) = (2)$

$$U_2(s,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+4^{-(1+s)}} \left\{ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} 4^{-\nu(1+2s)} + 4^{-s} \sum_{\nu=0}^{\frac{h-3}{2}} 4^{-\nu(1+2s)} \right\} \\ \qquad\qquad \text{für } h \equiv 1\,(2), \\ \dfrac{1 - Q(-\mu,2)\,4^{-(1+s)}}{1+4^{-(1+s)}} \left\{ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}} 4^{-\nu(1+2s)} + 4^{-s} \sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} 4^{-\nu(1+2s)} \right\} \\ \qquad + Q^2(-\mu,2)\,4^{-\frac{h}{2}(1+2s)-s} \quad \text{für } h \equiv 0\,(2). \end{cases}$$

2. $(\varrho) \nmid (2)$

$$U_\varrho(s,\mu) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} \mathrm{N}\varrho^{-\nu(1+2s)} \qquad \text{für } h \equiv 1\,(2), \\ \left(1 - Q(-\mu,\varrho)\,\mathrm{N}\varrho^{-(1+s)}\right) \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} \mathrm{N}\varrho^{-\nu(1+2s)} + \mathrm{N}\varrho^{-\frac{h}{2}(1+2s)} \\ \qquad \text{für } h \equiv 0\,(2). \end{cases}$$

Nach DEDEKIND ist für $\mu \gg 0$

$$Z(1,\mu) = \lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)} = \frac{4\pi^2 h_0}{\sqrt{5}\, w\, |\mathrm{N}\Delta|^{\frac{1}{2}}},$$

wobei

h_0 die Idealklassenzahl von K,
w die Anzahl der Einheitswurzeln in K und
Δ die Relativdiskriminante von K/k.

Ferner gilt für $\mu \gg 0$

$$B_\mu\left(\frac{i}{2}, 0\right) = \frac{2^5 \pi^2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{N}\mu^{\frac{1}{2}}\, e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{5}}},$$

so daß sich schließlich mit $\zeta_k(2) = \frac{\pi^4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3 \cdot 5^2}$ das Resultat

$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau, 0) = 1 + \sum_{\substack{\mu \subset \mathfrak{o} \\ \mu \gg 0}} \frac{120}{w}\, U(0, \mu) \left| \mathrm{N}\, \frac{\mu}{\mathfrak{f}} \right|^{\frac{1}{2}} h_0\, e^{\pi i S \frac{\mu \tau}{\sqrt{5}}}$$

ergibt. Die abgeleiteten Formeln lassen erkennen, daß $U(0, \mu) > 0$ für $\mu \gg 0$.

Wir formulieren das Ergebnis dieser Untersuchung in nachfolgendem

Satz: *Jede total positive ganze Zahl μ des quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{5})$ ist als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen aus $R(\sqrt{5})$ darstellbar. Es gibt genau*

$$\frac{120}{w}\, U(0, \mu)\, \mathrm{N}\, \frac{\mu}{\mathfrak{f}}^{\frac{1}{2}} h_0$$

solche Darstellungen.

(Eingegangen am 30. Oktober 1940.)