Maaß

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN · DAVID HILBERT

GEGENWÄRTIG VERTRETUNGSWEISE
HERAUSGEGEBEN VON

ERICH HECKE
IN HAMBURG

UNTER MITWIRKUNG VON

HEINRICH BEHNKE — IN MÜNSTER I. W.

BARTEL L. VAN DER WAERDEN — IN LEIPZIG

Sonderabdruck aus Band 118, Heft 1

Hans Maaß

Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1941

Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$.

Von

Hans Maaß in Heidelberg.

Es hat sich gezeigt[1]), daß die Peterssonsche Methode zur Konstruktion automorpher Formen[2]), welche nur die Kenntnis von Multiplikatorsystemen voraussetzt, auch auf Gruppen simultaner linear gebrochener Substitutionen vom Typus der Hilbertschen Modulgruppe mit Erfolg angewendet werden kann. Der erste Schritt zur expliziten Aufstellung automorpher Formen der Dimension $-r$ zu einer vorgelegten Gruppe G wird demnach darin bestehen, daß man sich eine Übersicht über alle Multiplikatorsysteme zur Gruppe G und zur Dimension $-r$ verschafft. Bei einem derartigen Versuch stößt man aber im allgemeinen, wenn es sich um Gruppen zu mehreren Veränderlichen handelt, auf erhebliche Schwierigkeiten; denn in den seltensten Fällen sind Erzeugende geschweige denn definierende Relationen der vorgelegten Gruppe bekannt. Es erscheint fürs erste geboten, an speziellen einfachen Gruppen als Beispielen die Verhältnisse zu studieren. Ich habe zu diesem Zweck die Hilbertsche Modulgruppe M zum quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$ ausgewählt. Als Definitionsbereich für Modulformen zu M oder zu Untergruppen U von M legen wir den Bereich

$$(1) \qquad \mathfrak{Im}\,\tau > 0, \ \mathfrak{Im}\,\tau' < 0$$

zugrunde. Ein Zahlsystem $v(S)$ $(S \subset \mathsf{U})$ heißt ein Multiplikatorsystem zu U und zur Dimension $-r$, wenn

$$(2) \qquad v(S_1 S_2) = \sigma^{(r)}(S_1, S_2)\, v(S_1)\, v(S_2) \text{ für } S_1, S_2 \subset \mathsf{U}, \ v(-E) = 1, \text{ falls } -E \subset \mathsf{U}.$$

Dabei ist[3])

$$(3) \qquad \sigma^{(r)}(S_1, S_2) = e^{2\pi i r\, \mathsf{S}\{w(S_1, S_2)\operatorname{sgn}\sqrt{5}\}}$$

[1]) H. Maaß, Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Annalen **117** (1940), S. 538–578.

[2]) H. Petersson, Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen. Math. Annalen **103** (1930), S. 369–436.

[3]) H. Maaß, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen. Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 709–738.

das Faktorsystem zur Dimension $-r$ und E die Einheitstransformation. Außer M wird noch die Thetagruppe T aus M betrachtet, welche aus allen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}$$

besteht, für welche entweder

$$(4) \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0\,(2) \quad \text{oder} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0\,(2).$$

Im ersten Teil dieser Arbeit wird nun folgendes bewiesen. Für M gibt es nur zu ganzzahligen Dimensionen ein Multiplikatorsystem, und zwar genau eins, nämlich das triviale System $v\,(S) = 1$ für $S \subset \mathsf{M}$. Es liegen hier also ganz andere Verhältnisse vor als bei der rationalen Modulgruppe M_0, bei welcher jede reelle Zahl als Dimension vorkommt[2]). Allgemein kann leicht bewiesen werden, daß es zu jeder Hilbertschen Modulgruppe ($\neq \mathsf{M}_0$) nur Multiplikatorsysteme zu rationalzahligen Dimensionen gibt. Es kommt hierbei die Tatsache zum Ausdruck, daß es auch hyperbolische Substitutionen mit vorgegebener parabolischer Spitze als Fixpunkt in den betrachteten Gruppen gibt[4]). Bei der Thetagruppe T treten nur ganz- und halbzahlige Werte von $-r$ als Dimensionen auf. Zu jeder solchen Dimension gibt es genau vier Multiplikatorsysteme; diese können explizit angegeben werden.

An diese Betrachtung schließt sich die Berechnung von Identitäten zwischen Eisensteinreihen und Thetareihen zur Gruppe M. Für die Maximalzahl $a\,(r)$ linear unabhängiger Modulformen zu M von der Dimension $-r < 0$ ist die Abschätzung

$$(5) \qquad a\,(r) < c r^2$$

mit konstantem c bewiesen worden[1]). Der Beweis dieses Satzes soll hier in seinen wesentlichen Teilen reproduziert werden und liefert mit einer von Herrn Witt[5]) bemerkten Vereinfachung des ursprünglichen Siegelschen Beweisganges für die niederen Dimensionen die Abschätzungen

$$(6) \qquad a\,(1) = 0, \quad a\,(2) = 1, \quad a\,(3) \leqq 2, \quad a\,(4) \leqq 3.$$

Außerdem ist dann die Möglichkeit gegeben, numerisch zu entscheiden, wann zwei Modulformen der Dimension $-r$ ($r \leqq 4$) identisch sind. Auf diesem

---

[4]) H. Maaß, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen. Sitzungsber. der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse (1940), 2. Abhandlung.

[5]) E. Witt, Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Universität (im Druck).

Wege ergeben sich die nachfolgenden Identitäten. Die Eisensteinreihe $G_r(\tau)$ von M zur Dimension $-r$[6]) ($r \equiv 0\ (2)$, $r > 0$) sei so normiert, daß in ihrer Fourierentwicklung zur parabolischen Spitze ∞ das konstante Glied 1 lautet. Dann ist

$$(G_2(\tau))^2 = G_4(\tau). \tag{7}$$

Durch die Thetareihen wird zwischen der Theorie der Modulformen zu M und den positiv definiten ganzzahligen geraden quadratischen Formen $Q(x_1, \ldots, x_m)$ mit Determinante ε^{2r} der folgende Zusammenhang gestiftet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Q}_m$ die Klasse der mit $Q(x_1, \ldots, x_m)$ ganzzahlig äquivalenten quadratischen Formen mit der Determinante ε^{2r}; dann erweist sich

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m) = \sum_{x_1, \ldots, x_m} e^{\pi i S \frac{Q(x_1, \ldots, x_m)\tau}{\sqrt{5}}}, \tag{8}$$

wobei über alle ganzen Zahlsysteme $x_1, \ldots, x_m$ aus $R(\sqrt{5})$ summiert wird, als eine Modulform zu M von der Dimension $-\frac{m}{2}$. Die Zahl m der Veränderlichen muß notwendig durch 4 teilbar sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Existenz von quadratischen Formen der genannten Art; denn es wird eine nicht leere Klasse $\mathfrak{Q}_4$ nachgewiesen. Für diese muß dann

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_4) = G_2(\tau) \tag{9}$$

gelten. $\mathfrak{Q}_8$ sei die Klasse, in welcher die bekannte quadratische Form von 8 Veränderlichen mit ganz rationalen Koeffizienten liegt; dann wird

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_8) = G_4(\tau) \tag{10}$$

bewiesen, womit sich nach (7) und (9) ergibt, daß jede ganze gerade Zahl aus $R(\sqrt{5})$ durch $\mathfrak{Q}_8$ und $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$ (direkte Summe) gleich oft dargestellt wird, obgleich die beiden Klassen voneinander verschieden sind. In einer abschließenden Betrachtung wird gezeigt, daß andere Klassen als $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_8$ zur Veränderlichenzahl 4 und 8 nicht vorkommen. Der Beweis erfolgt durch Diskussion der den Klassen quadratischer Formen zugeordneten Gitter[5]).

[6]) E. Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, II. Teil. Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Universität **3** (1924), S. 213–236.

§ 1.

Multiplikatorsysteme zu M und T.

Wir setzen in fester Bezeichnung

$$\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Die Zahlen 1, ε bilden eine Basis für den Bereich $\mathfrak{o}$ aller ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{5})$. Bekanntlich[7]) wird M von den Substitutionen

$$(11) \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

erzeugt. Ein Erzeugendensystem für T kann dann in folgender Weise berechnet werden. Da T in M den Index 10 hat, gibt es eine Zerlegung

$$\mathsf{M} = \sum_{i=1}^{10} \mathsf{T}\, G_i \quad (G_1 = E).$$

Liegt eine Substitution $G \subset \mathsf{M}$ in der Restklasse $\mathsf{T}\, G_i$, so sei $\overline{G} = G_i$. Die 30 Substitutionen

$$U_{ik} = G_i S_k \overline{G_i S_k}^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, 10;\ k = 1, 2, 3)$$

erzeugen dann die Thetagruppe T. Wählen wir für G_i $(i = 1, \ldots, 10)$ der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon - 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix},$$

so bestätigt man leicht, daß zwischen den U_{ik} die nachfolgenden 27 Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
U_{11} &= U_{31} = E, \\
U_{41} &= U_{21}, \\
U_{52} &= U_{51} = U_{12} U_{21}^{-1}, \\
U_{61} &= U_{12} U_{51}^{-1} U_{13}^{-1} U_{51} U_{12}^{-1} U_{13}, \\
U_{71} &= U_{51} U_{12}^{-1}, \\
U_{81} &= U_{21}^{-1} U_{13}^{-2} U_{71} U_{61}^{-1} U_{12}, \\
U_{22} &= U_{21} U_{12}, \\
U_{32} &= U_{12} U_{61}^{-1}, \\
U_{10\,2} &= U_{10\,1} = U_{12} U_{32}^{-1} U_{13}^{3} U_{71} U_{61}^{2} U_{12}^{-1} U_{71}^{-1} U_{61} U_{12},
\end{aligned}$$

[7]) F. Götzky, Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Annalen **100** (1928), S. 411–437.

$$
\begin{aligned}
U_{91} &= U_{101}^{-1}\, U_{12}^{2}\, U_{61}^{\;1},\\
U_{42} &= U_{22}\, U_{12}^{-1}\, U_{32},\\
U_{62} &= U_{61}\, U_{12},\\
U_{72} &= U_{12}^{2}\, U_{42}^{-1},\\
U_{82} &= U_{21}^{-1}\, U_{42}^{-1}\, U_{71}^{2}\, U_{61}^{\;1},\\
U_{92} &= U_{12}\, U_{101}\, U_{12},\\
U_{23} &= U_{13}\, U_{51}^{-1}\, U_{62},\\
U_{33} &= U_{13}\, U_{21}^{-1},\\
U_{43} &= U_{53} = U_{13},\\
U_{63} &= U_{13}\, U_{61},\\
U_{73} &= U_{71}\, U_{13},\\
U_{83} &= U_{12}^{2}\, U_{13}^{3}\, U_{71}^{\;2}\, U_{61}^{-3}\, U_{12}^{-1}\, U_{71}^{-2}\, U_{61}\, U_{12}\, U_{61}^{-1},\\
U_{93} &= U_{12}^{-1},\\
U_{103} &= U_{61}^{-1}\, U_{12}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Demnach wird T von den drei Substitutionen U_{21}, U_{12}, U_{13} erzeugt. In gleicher Reihenfolge sind das die Substitutionen

$$
(12) \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.
$$

Wir beginnen mit der Untersuchung von M und denken uns ein beliebiges Multiplikatorsystem v von M zur Dimension $-r$ gegeben. Es soll zunächst

$$
(13) \qquad v\left(\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \subset \mathfrak{o}
$$

gezeigt werden. Dazu bestimme man (vgl. [1]) den Modul $\mathfrak{t}$ der Translationen in der affinen Gruppe von M, ferner den Modul $\mathfrak{m}$ als Gesamtheit der Lösungen μ von

$$
S\, \frac{\mu\, \mathfrak{t}}{\sqrt{5}} = 0\,[1]
$$

und schließlich, wenn

$$
v\left(\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i \varrho(\alpha)} \quad \text{für} \quad \alpha \subset \mathfrak{t},
$$

$\varkappa$ aus

$$
S\, \frac{\varkappa\, \alpha}{\sqrt{5}} = \varrho(\alpha)\,[1] \quad \text{für alle} \quad \alpha \subset \mathfrak{t}.
$$

Da ε^2 unter den Multiplikatoren der affinen Substitutionen aus M vorkommt, so gilt

$$
\varkappa\,(1 - \varepsilon^2) = -\varepsilon\,\varkappa \subset \mathfrak{m}.
$$

Offenbar ist nun $\mathfrak{t} = [1, \varepsilon]$, $\mathfrak{m} = [1, \varepsilon]$, woraus folgt, daß $\varkappa \subset \mathfrak{m}$ und $\varrho(\alpha) = 0[1]$, womit (13) bewiesen ist. Aus den Relationen

$$
\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}^3 = -E, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

wird auf Grund von (2) und (3)

$$v\left(\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}\right)=e^{2\pi i\left(\frac{r}{2}+\frac{a}{2}\right)},\qquad v\left(\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ 1-\varepsilon & 1\end{pmatrix}\right)=e^{2\pi i\left(\frac{r}{3}+\frac{b}{3}\right)}$$

$$v\left(\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ 1-\varepsilon & 1\end{pmatrix}\right)=v\left(\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix}\right)v\left(\begin{pmatrix}1 & -\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

erschlossen, wobei $a=0$ oder 1 und b aus der Reihe 0, 1, 2. Zusammen mit (13) folgt nun

$$r\equiv 3\,a+2\,b\ (6),$$

d. h. r ist ganzzahlig.

Die analoge Betrachtung ist für T anzustellen. Die Maximalzahl inäquivalenter parabolischer Spitzen von T beträgt 2; wir wählen als Repräsentanten ∞, $-\varepsilon$. Durch

$$A=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ 1 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

wird die zweite Spitze nach ∞ transformiert. Mit $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}_A$ bezeichnen wir die Moduln der Translationen in den affinen Gruppen von T bzw. $A\,\mathsf{T}\,A^{-1}$ und bestimmen $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{m}_A$ als Gesamtheit der Lösungen μ von

$$\mathsf{S}\,\frac{\mu\,\mathfrak{t}}{2\sqrt{5}}\equiv 0\,[1]\quad\text{bzw.}\quad \mathsf{S}\,\frac{\mu\,\mathfrak{t}_A}{2\sqrt{5}}\equiv 0\,[1].$$

Setzt man noch für ein vorgegebenes Multiplikatorsystem v von T zur Dimension $-r$

$$v\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=e^{2\pi i\varrho(\alpha)}\quad\text{für}\quad \alpha\subset\mathfrak{t}$$

und für das mit A^{-1} transformierte Multiplikatorsystem $v^{A^{-1}}$ analog

$$v^{A^{-1}}\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=e^{2\pi i\varrho_A(\alpha)}\quad\text{für}\quad \alpha\subset\mathfrak{t}_A,$$

so sind $\varkappa$ bzw. $\varkappa_A$ wieder durch

$$\mathsf{S}\,\frac{\varkappa\,\alpha}{2\sqrt{5}}\equiv\varrho(\alpha)\,[1]\quad\text{für alle}\quad \alpha\subset\mathfrak{t}$$

bzw.

$$\mathsf{S}\,\frac{\varkappa_A\,\alpha}{2\sqrt{5}}\equiv\varrho_A(\alpha)\,[1]\quad\text{für alle}\quad \alpha\subset\mathfrak{t}_A$$

zu bestimmen. ε^2 kommt unter den Multiplikatoren der affinen Substitutionen von T vor, dagegen erst ε^6 unter den Multiplikatoren der affinen Substitutionen von $A\,\mathsf{T}\,A^{-1}$. Folglich gilt

$$\varkappa\,(1-\varepsilon^2)=-\ \varepsilon\,\varkappa\subset\mathfrak{m},$$

$$\varkappa_A\,(1-\varepsilon^6)=-\,4\,\varepsilon^3\varkappa_A\subset\mathfrak{m}_A\,.$$

Man findet nun leicht:

$$\mathfrak{t} = [2,\ 2\,\varepsilon],\quad \mathfrak{m} = [1,\ \varepsilon],\quad \mathfrak{t}_A = [2,\ \varepsilon - 1],\quad \mathfrak{m}_A = [2,\ \varepsilon]$$

und damit

$$\varkappa \subset \mathfrak{m},\quad 4\,\varkappa_A \subset \mathfrak{m}_A,$$

insbesondere also

(14) $\varrho\,(\alpha) \equiv 0\,[1]$ für $\alpha \subset \mathfrak{t}$. $4\,\varrho_A\,(\alpha) \equiv 0\,[1]$ für $\alpha \subset \mathfrak{t}_A$.

Aus (2), angewendet auf

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\,\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A,$$

folgt

$$v\left(\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\right) = v\left(\begin{pmatrix} 1 & -2\,\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v\left(\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wie eine kleine Rechnung zeigt, ist

$$v\left(\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\right) = v^{A^{-1}}\left(\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

und wie oben

$$v\left(\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i\left(\frac{r}{2} + \frac{a}{2}\right)} \qquad (a = 0 \text{ oder } 1).$$

Damit ergibt sich

$$\varrho_A\,(\varepsilon - 1) \equiv \frac{r}{2} + \frac{a}{2} + \varrho\,(-2\,\varepsilon)\,[1],$$

wegen (14) also

$$2\,r \equiv 0\,[1],$$

d. h. r ist entweder ganz- oder halbzahlig.

Wir kommen nun zur Aufstellung der Multiplikatorsysteme und betrachten zunächst wieder M. Jedes Multiplikatorsystem zu M und zu ganzzahliger Dimension liefert offenbar eine Darstellung der Faktorgruppe von M nach der Kommutatorgruppe K. Es kommt also darauf an, diese zu bestimmen. Aus den Relationen

$$(15)\qquad \begin{gathered} S_2 S_1^{-1} S_2\,(S_2 S_1^{-1} S_3 S_2 S_1^{-1})^2 = S_3 S_2 S_1^{-1} S_3, \\ S_2^2 = (S_2 S_1^{-1})^3 = E,\ (S_3 S_2 S_1^{-1})^5 = E,\ S_3 S_2 S_3 = S_2, \end{gathered}$$

die man leicht verifiziert, ergibt sich, wenn man mit den Erzeugenden S_i abelsch rechnet, daß alle drei Erzeugende in K enthalten sind. Damit ist

$$(16)\qquad \mathsf{M} = \mathsf{K}$$

gezeigt und bewiesen, daß es nur das eine Multiplikatorsystem $v\,(S) = 1$ für $S \subset \mathsf{M}$ gibt.

Ähnliche Überlegungen sind für T anzustellen. v sei ein Multiplikatorsystem zu T und zu ganzzahliger Dimension. Da notwendig $v(-E) = 1$, so reicht es, in T die Gruppe K_0 zu bestimmen, die aus den Kommutatoren von T und $-E$ erzeugt wird. Offenbar liegen die Substitutionen

$$-E = U_2^2, \quad U_2 U_3^{-1} U_2^{-1} U_3 = U_3^2,$$
$$U_3 U_1 U_3^{-1} U_1^{-1} = V, \quad V U_3 V^{-1} U_3^{-1} = U_1$$

in K_0. Unter den Substitutionen

$$E, \; U_2, \; U_3, \; U_2 U_3$$

gibt es also ein vollständiges Restsystem mod K_0. Bezeichnen wir mit $\mathsf{M}(2)$ die Hauptkongruenzuntergruppe von M zur Stufe 2, so hat man in

$$\mathsf{N} = \sum_{\nu=0}^{2} \mathsf{M}(2)\, U_3^{\nu}$$

einen Normalteiler von T vom Index 2, und es gilt die Zerlegung

$$\mathsf{T} = \mathsf{N} + \mathsf{N} U_2.$$

Durch

(17) $$v_1(S) = 1, \quad v_1(S U_2) = -1 \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{N}$$

ist dann ein Multiplikatorsystem zu ganzzahliger Dimension definiert. Ein zweites davon unabhängiges hat man in $v_{0\infty}^2$; dabei bedeutet $v_{0\infty}$ das ϑ-Multiplikatorsystem zu T[3]). Für dieses ist

(18) $$v_{0\infty}(U_1) = v_{0\infty}(U_2) = 1, \quad v_{0\infty}(U_3) = i.$$

Damit hat man die vier Multiplikatorsysteme

(19) $$v_{0\infty}^{2a} \cdot v_1^b \qquad (a = 0, 1;\; b = 0, 1)$$

zu ganzzahliger Dimension gewonnen. Andere kann es nicht geben, da ja K_0 in T den Index 4 hat. Sei v ein Multiplikatorsystem zu T und zu halbzahliger Dimension, dann ist $v\, v_{0\infty}^{-1}$ ein solches zu ganzzahliger Dimension. Es gibt also auch genau vier Multiplikatorsysteme zu T und zu halbzahliger Dimension, nämlich

(20) $$v_{0\infty}^{2a+1} \cdot v_1^b \qquad (a = 0, 1;\; b = 0, 1).$$

Die Werte von $v_{0\infty}$ sind in [3]) explizit berechnet. Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 1. 1. *Für M gibt es nur zu ganzzahligen Dimensionen ein Multiplikatorsystem, und zwar genau eins, nämlich das triviale.*

2. *Für T gibt es nur zu ganz- und halbzahligen Dimensionen ein Multiplikatorsystem, und zwar in jedem Fall genau vier. Sie sind durch* (19) *und* (20) *gegeben.*

§ 2.

Modulformen zu M.

Eine im Bereich (1) reguläre Funktion $\varphi_r(\tau) = \varphi_r(\tau, \tau')$ mit der Transformationseigenschaft

$$\varphi_r(S\tau) = \mathsf{N}\,(\gamma\tau + \delta)^r\,\varphi_r(\tau) \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{M}, \tag{21}$$

wobei $\underline{S} = (\gamma,\ \delta)$ die zweite Zeile von S, heißt eine Modulform zu M und zur (ganzzahligen) Dimension $-r$, wenn $\varphi\,(\tau)$ auch im Unendlichen regulär ist, d. h. wenn eine Entwicklung der Art

$$\varphi_r(\tau) = \sum_{\substack{\nu \subseteq \mathfrak{o} \\ \nu \geqq 0}} b_r(\nu)\, e^{2\pi i \,\mathrm{S}\frac{\nu\tau}{\sqrt{5}}} \tag{22}$$

gilt. Werden die unabhängigen Veränderlichen τ und τ' durch die Gleichung

$$\tau_1 = \varepsilon\tau = \varepsilon'\tau'$$

gekoppelt, so geht $\varphi_r(\tau)$ in eine Modulform

$$f_{2r}(\tau_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2r}(m)\, e^{2\pi i \tau_1 m} \tag{23}$$

zur rationalen Modulgruppe M_0 und zur Dimension $-2r$ mit den Koeffizienten

$$a_{2r}(m) = \sum_{\substack{\nu = m + n\varepsilon \\ \nu \geqq 0}} b_r(\nu) \tag{24}$$

über. Die ersten Koeffizienten lauten demnach

$$\begin{aligned}
&a_{2r}(0) = b_r(0),\\
&a_{2r}(1) = b_r(1) + b_r(1+\varepsilon),\\
&a_{2r}(2) = b_r(2-\varepsilon) + b_r(2) + b_r(2+\varepsilon) + b_r(2+2\varepsilon) + b_r(2+3\varepsilon).
\end{aligned} \tag{25}$$

Wendet man (21) für $S = S_3$ an, so erhält man

$$\varphi_r(\varepsilon^2\tau) = (-1)^r\,\varphi_r(\tau),$$

und nach (22)

$$b_r(\varepsilon^2\nu) = (-1)^r\, b_r(\nu). \tag{26}$$

Je nachdem r gerade oder ungerade, so gilt also

$$\begin{aligned}
&a_{2r}(0) = b_r(0),\\
&a_{2r}(1) = 2\,b_r(1), && (r \equiv 0\ (2))\\
&a_{2r}(2) = 2\,(b_r(1) + b_r(2)) + b_r(2+\varepsilon)
\end{aligned} \tag{27}$$

oder

$$\begin{aligned}
&a_{2r}(0) = b_r(0) = 0,\\
&a_{2r}(1) = 0, && (r \equiv 1\ (2))\\
&a_{2r}(2) = b_r(2+\varepsilon).
\end{aligned} \tag{28}$$

Durch Quadrieren von $\varphi_r(\tau)$ gelangen wir schließlich zu einer Form

$$\varphi_{2r}(\tau) = \sum_{\substack{\nu \subset \mathfrak{o} \\ \nu \geqq 0}} b_{2r}(\nu)\, e^{2\pi i S \frac{\nu\tau}{\sqrt{5}}} \tag{29}$$

von der Dimension $-2r$ mit den Koeffizienten

$$b_{2r}(\nu) = \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 = \nu \\ \nu_i \geqq 0}} b_r(\nu_1)\, b_r(\nu_2). \tag{30}$$

Speziell von

$$\begin{aligned} b_{2r}(0) &= (b_r(0))^2, \\ b_{2r}(2) &= (b_r(1))^2 + 2\, b_r(0)\, b_r(2), \\ b_{2r}(3) &= 2\left(b_r(0)\, b_r(3) + b_r(1)\, b_r(2) + (b_r(1))^2\right) \end{aligned} \tag{31}$$

soll später Gebrauch gemacht werden.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß in der Entwicklung (22) alle Koeffizienten zu Exponenten mit einer Norm unterhalb einer positiven Schranke T verschwinden:

$$b_r(\nu) = 0 \text{ sobald } \mathrm{N}\,\nu \leqq T \qquad (T > 0). \tag{32}$$

Die Schranke T soll möglichst klein so bestimmt werden, daß aus (32) das identische Verschwinden von $\varphi_r(\tau)$ erschlossen werden kann. Für die Durchführung dieses Schlusses ist es entscheidend, daß es für M einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ im Bereich (1) mit folgenden Eigenschaften gibt[7]. Wir setzen

$$\tau = s + it, \quad \tau' = s' - it'. \tag{33}$$

Der Bereich (1) wird dann beschrieben durch die Ungleichungen

$$t > 0, \quad t' > 0. \tag{34}$$

Für jeden Punkt des Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}$ gilt

$$t \geqq 0{,}45, \quad t' \geqq 0{,}45, \tag{35}$$

und nähert man sich im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ an den Rand des Bereiches (34), so gehen t und t' gleichzeitig gegen ∞. Auf Grund der Voraussetzung (32) liegt das Maximum M von $(tt')^{\frac{r}{2}} |\varphi_r(\tau)|$ für $\{\tau, \tau'\} \subset \mathfrak{F}$ in einem endlichen Punkt

$$\tau_0 = s_0 + it_0, \quad \tau_0' = s_0 - it_0$$

von $\mathfrak{F}$. Da nun $(tt')^{\frac{r}{2}} |\varphi_r(\tau)|$ gegenüber den Substitutionen aus M invariant ist, so gilt überhaupt

$$(tt')^{\frac{r}{2}} |\varphi_r(\tau)| \leqq M. \tag{36}$$

In der Integraldarstellung

$$(37) \qquad b_r(\nu) = \frac{1}{\Delta} \iint\limits_{\mathfrak{P}} \varphi_r(\tau)\, e^{-2\pi i \, \mathsf{S} \frac{\nu \tau}{\sqrt{5}}} ds\, ds', \quad \Delta = \iint\limits_{\mathfrak{P}} ds\, ds'$$

($\mathfrak{P}$ = Grundmasche des Gitters der Translationen aus M) setze man

$$t = (1-\vartheta)\, t_0, \quad t' = (1-\vartheta)\, t_0', \quad 0 < \vartheta < 1$$

und erhält damit unter Berücksichtigung von (36) aus (37) die Abschätzung

$$|b_r(\nu)| \leqq M\,(1-\vartheta)^{-r}\,(t_0 t_0')^{-\frac{r}{2}}\, e^{2\pi(1-\vartheta)\frac{\nu t_0 - \nu' t_0'}{\sqrt{5}}}.$$

$\varphi(\tau_0)$ wird jetzt erneut nach (22) und (32) abgeschätzt mit dem Resultat

$$M = (t_0 t_0')^{\frac{r}{2}}\, |\varphi_r(\tau_0)| \leqq M\,(1-\vartheta)^{-r} \sum_{\substack{\mathsf{N}\nu > T \\ \nu \gg 0}} e^{-2\pi\vartheta \frac{\nu t_0 + \nu' t_0'}{\sqrt{5}}}.$$

Um daraus zu schließen, daß M verschwindet, genügt es wegen $t_0, t_0' \geqq 0{,}45$, die Bedingung

$$(38) \qquad F(T) = \sum_{\substack{\mathsf{N}\nu > T \\ \nu \gg 0}} e^{-\frac{9\pi\vartheta}{10\sqrt{5}} \mathsf{S}\nu} < (1-\vartheta)^r$$

durch geeignete Wahl von T zu erreichen. Setzen wir

$$(39) \qquad h = e^{-\frac{9\pi\vartheta}{10\sqrt{5}}}$$

und bezeichnen wir mit $B_T(k)$ die Anzahl der Zahlen $\nu \subset \mathfrak{o}$, für welche

$$\nu \gg 0, \quad \mathsf{N}\nu > T, \quad \mathsf{S}\nu = k,$$

so ist

$$(40) \qquad F(T) = \sum_{k=1}^{\infty} B_T(k)\, h^k.$$

Macht man einen Ansatz $\nu = m + n\varepsilon$, dann ist $k = \mathsf{S}\nu = 2m + n$, $4\,\mathsf{N}\nu = k^2 - 5n^2$ und daher $B_T(k)$ gleich der Anzahl der ganz rationalen Zahlen n, welche den Bedingungen

$$k^2 - 4\,T > 5\,n^2, \quad k \equiv n\ (2)$$

genügen, woraus insbesondere

$$(41) \qquad B_T(k) < \frac{k}{\sqrt{5}} + 1$$

folgt. Benutzt man diese Abschätzung für alle $k > 12$, so erhalten wir nach (40)

$$F(T) < \sum_{k=1}^{12} B_T(k)\, h^k + \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{13\, h^{13}}{1-h} + \frac{h^{14}}{(1-h)^2} \right\} + \frac{h^{13}}{1-h}.$$

Wir wählen jetzt $h = \frac{1}{2}$, bestimmen durch direkte Abzählung die folgenden Werte:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$B_5(k)$	0	0	0	0	0	1	2	3	4	3	4	5
$B_9(k)$	0	0	0	0	0	0	2	3	2	3	4	5

und stellen alsdann fest, daß

$$F(5) < 0{,}06, \quad F(9) < 0{,}040.$$

ϑ ist nach Wahl von h durch (39) bestimmt:

$$\vartheta = \frac{10 \cdot \sqrt{5} \cdot \log 2}{9 \cdot \pi}.$$

Für diesen Wert ist

$$0{,}09 < (1 - \vartheta)^3, \quad 0{,}041 < (1 - \vartheta)^4,$$

so daß also

$$F(5) < (1 - \vartheta)^3, \quad F(9) < (1 - \vartheta)^4.$$

Für die Dimension -4 besagt diese Rechnung, daß $\varphi_4(\tau)$ identisch verschwindet, sobald $b_4(\nu) = 0$ für $\nu \geqslant 0$, $\mathsf{N}\,\nu \leqq 9$. Nach (26) genügt es, wenn ν die Werte $0, 1, 2, 2+\varepsilon, 3$ durchläuft. Wenn $b_4(0) = 0$, so ist in (27) $a_8(n) = 0$ für alle n, da es keine Spitzenform zur rationalen Modulgruppe M_0 von der Dimension -8 gibt, also ist auch $b_4(1) = 0$. Aus $b_4(2) = 0$ folgt dann nach (27) auch $b_4(2+\varepsilon) = 0$. Man braucht also nur das Verschwinden von drei Koeffizienten zu fordern.

Im Falle der Dimension -3 muß $b_3(\nu) = 0$ für $\nu = 0, 1, 2, 2+\varepsilon$ gefordert werden. Analog wie oben schließt man, daß in (28) $a_6(n) = 0$ für alle n gilt. $b_3(0) = b_3(2+\varepsilon) = 0$ ist also automatisch erfüllt, und es bleibt nur noch, $b_3(1) = b_3(2) = 0$ zu fordern. $\varphi_2(\tau)$ verschwindet bereits dann, wenn $b_2(0) = 0$. Nach (27) ist nämlich wie oben zu schließen, daß $b_2(1) = 0$. Dann verschwinden nach (31) auch die Koeffizienten $b_4(\nu)$ für $\nu = 0, 2, 3$, und das reicht ja aus, um $(\varphi_2(\tau))^2 \equiv 0$ zu beweisen. Eine Form $\varphi_1(\tau)$ gibt es nicht; denn nach (28) ist $b_1(0) = 0$, nach (31) somit $b_2(0) = 0$ und daher, wie soeben bewiesen wurde, $(\varphi_1(\tau))^2 \equiv 0$. Wir formulieren dieses Ergebnis in

Satz 2. *Eine Modulform*

$$\varphi_r(\tau) = \sum_{\substack{\nu \subset \mathfrak{o} \\ \nu \geqslant 0}}' b_r(\nu)\, e^{2\pi i \, \mathsf{S} \frac{\nu \tau}{\sqrt{5}}}$$

zu M *und zur Dimension* $-r$ *verschwindet identisch, wenn*

1. $b_4(0) = b_4(2) = b_4(3) = 0$ *für* $r = 4$,
2. $b_3(1) = b_3(2) = 0$ *für* $r = 3$,
3. $b_2(0) = 0$ *für* $r = 2$,
4. *stets* *für* $r = 1$.

Beispiele von Modulformen zu M sind gegeben in den Eisensteinreihen

$$(42)\qquad G_r(\tau) = 1 + \sum_{\substack{\nu \subset \mathfrak{o} \\ \nu \gg 0}} C_r(\nu)\, e^{2\pi i S \frac{\nu\tau}{\sqrt{5}}}$$

zu gerader Dimension $-r$ [6]) mit den Koeffizienten

$$(43)\qquad C_r(\nu) = \frac{(2\pi)^{2r}\cdot\sqrt{5}}{(\Gamma(r))^2\cdot 5^r\cdot\zeta_Z(r)}\cdot\sum_{(\mu)/\nu} |\mathsf{N}\,\mu|^{r-1},$$

wobei ζ_Z die Zetafunktion zum Zahlkörper $Z = R(\sqrt{5})$. Der Zahlfaktor vor dem Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (43) hat für $r = 2$ bzw. 4 die Werte 120 bzw. 240. Speziell findet man

$$(44)\qquad \begin{aligned} &C_2(1) = 120, \quad C_2(2) = 600, \quad C_2(3) = 1200, \\ &C_4(2) = 15600, \quad C_4(3) = 175200. \end{aligned}$$

Berechnet man nach (31) die Koeffizienten von $(G_2(\tau))^2$ zu den Exponenten 2 und 3, so ergibt sich auf Grund von Satz 2 die Identität $(G_2(\tau))^2 = G_4(\tau)$.

Wir betrachten jetzt die eingangs genannten Thetareihen $\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m)$ zu Klassen $\mathfrak{Q}_m$ positiv definiter ganzzahliger gerader quadratischer Formen $Q(x_1, \ldots, x_m)$ von m Veränderlichen und mit Determinante ε^{2}. Für diese Reihen gelten die drei Transformationsgleichungen

$$\vartheta(S_1\tau, \mathfrak{Q}_m) = \vartheta(S_3\tau, \mathfrak{Q}_m) = \vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m),$$

$$\vartheta(S_2\tau, \mathfrak{Q}_m) = \mathsf{N}(-\tau)^{\frac{m}{2}}\,\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m).\text{ [8])}$$

$\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m)$ ist also eine Modulform zu M von der Dimension $-\frac{m}{2}$. Da es zu M nur das triviale Multiplikatorsystem gibt, so ist notwendig

$$\vartheta(S_3\tau, \mathfrak{Q}_m) = \mathsf{N}\,\varepsilon^{-\frac{m}{2}}\,\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m) = \vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m),$$

also $m \equiv 0\ (4)$. Zu $m = 4$ gibt es die Form

$$(45)\qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1-\varepsilon \\ -1 & 2 & -1 & \varepsilon-1 \\ 0 & -1 & 2 & -\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon-1 & -\varepsilon & 2 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{Q}_4$ sei die Klasse, welche diese Form enthält. Durch Bildung direkter Summen erhält man dann quadratische Formen der genannten Art zu jeder durch 4 teilbaren Veränderlichenzahl. Nach Satz 2 ist $\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_4) = G_2(\tau)$. Unter $\mathfrak{Q}_8$ soll die Formenklasse verstanden werden, welche die rationale Klasse $\mathfrak{Q}_8^*$

[8]) H. D. Kloosterman, Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern. Math. Annalen **103** (1930), S. 279—299.

der geraden Formen mit ganz rationalen Koeffizienten enthält. Eine Form der rationalen Klasse $\mathfrak{Q}_8^*$ gestattet folgende Darstellung[5]): Man betrachte das Gitter Ξ_8 aller Vektoren $\mathfrak{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_8)$ mit rationalzahligen Komponenten, für welche

$$\xi_i \equiv 0\,(\tfrac{1}{2}), \quad \xi_i \equiv \xi_k\,(1), \quad \sum_{i=1}^{8} \xi_i \equiv 0\,(2),$$

und bezeichne mit $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_8$ eine Gitterbasis. Dann ist

$$\Big(\sum_{i=1}^{8} x_i \mathfrak{u}_i\Big)^2 = \sum_{i,k=1}^{8} (\mathfrak{u}_i \mathfrak{u}_k)\, x_i x_k$$

eine ganzzahlige gerade Form mit Determinante 1. Sie ist daher in $\mathfrak{Q}_8^*$ enthalten. Mit $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_8$ bezeichnen wir die Einheitsvektoren des 8-dimensionalen euklidischen Raumes. Wie man sich leicht überlegt, sind dann die Vektoren $\mathfrak{a} \subset \Xi_8$ mit $\mathfrak{a}^2 = 2$ bzw. 4 von der Gestalt

(46) $$\pm\, \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k \quad (i \neq k), \qquad \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \mathfrak{e}_i \quad \Big(\varepsilon_i = \pm 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1\Big),$$

bzw.

(47) $$\begin{gathered} \pm 2\, \mathfrak{e}_i, \ \pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k \pm \mathfrak{e}_l \pm \mathfrak{e}_m \quad (i < k < l < m) \\ \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \mathfrak{e}_i\Big) + \varepsilon_k \mathfrak{e}_k \quad \Big(\varepsilon_i = \pm 1,\ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = -1\Big). \end{gathered}$$

Es soll jetzt $\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_8) = G_4(\tau)$ bewiesen werden. Bedeutet allgemein $a(2\nu, \mathfrak{Q}_m)$ die Anzahl der ganzzahligen Darstellungen der geraden Zahl 2ν durch eine Form der Klasse $\mathfrak{Q}_m$, so daß also

(48) $$\vartheta(\tau, \mathfrak{Q}_m) = 1 + \sum_{\substack{\nu \subset \mathfrak{o} \\ \nu \gg 0}} a(2\nu, \mathfrak{Q}_m)\, e^{2\pi i S \frac{\nu\tau}{\sqrt{5}}},$$

so brauchen wir nach (44) und Satz 2 nur

(49) $$a(4, \mathfrak{Q}_8) = 15600, \quad a(6, \mathfrak{Q}_8) = 175200$$

zu bestätigen. Diese beiden Darstellungsanzahlen werden jetzt durch direkte Abzählung in folgender Weise bestimmt. $a_0(2n, \mathfrak{Q}_8^*)$ sei die Anzahl der ganzrationalzahligen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ durch eine Form der Klasse $\mathfrak{Q}_8^*$. Die Thetareihe

$$\vartheta_0(\tau_1, \mathfrak{Q}_8^*) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0(2n, \mathfrak{Q}_8^*)\, e^{2\pi i \tau_1 n}$$

ist dann bekanntlich mit der normierten Eisensteinreihe zur rationalen Modulgruppe M_0 und zur Dimension -4 identisch. Aus dieser Identität werden die Anzahlen

(50) $$a_0(4, \mathfrak{Q}_8^*) = 2160, \quad a_0(6, \mathfrak{Q}_8^*) = 6720$$

abgeleitet[6]). Wir betrachten nun die Vektoren $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{8} x_i \mathfrak{u}_i$ mit $x_i \subset \mathfrak{o}$. Da $1, \varepsilon$ eine Basis von $\mathfrak{o}$, so erhält man offenbar jeden solchen Vektor, wenn in $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\varepsilon$ die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ unabhängig alle Gittervektoren aus Ξ_8 durchlaufen. Es ist dann

$$\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + (2\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2)\,\varepsilon.$$

Für $\mathfrak{x}^2 = 4$ bzw. 6 muß daher

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = 4, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{b}^2$$

bzw.

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = 6, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{b}^2$$

zutreffen. Die Abzählung der Lösungspaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ wird so vorgenommen, daß man alle Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit gleichem Wert $\mathfrak{a}^2$ zu einem Komplex zusammenfaßt. Diesem Prozeß entspricht die Zerlegung

$$(51) \qquad \begin{aligned} a\,(4, \mathfrak{Q}_8) &= a_0\,(4, \mathfrak{Q}_8^*) + a^*, \\ a\,(6, \mathfrak{Q}_8) &= a_0\,(6, \mathfrak{Q}_8^*) + a_1^* + a_2^*, \end{aligned}$$

wobei a^* gleich der Anzahl der Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \Xi_8$ mit

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = 2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = -1,$$

a_1^* gleich der Anzahl der Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \Xi_8$ mit

$$\mathfrak{a}^2 = 4, \quad \mathfrak{b}^2 = 2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = -1$$

und a_2^* gleich der Anzahl der Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \Xi_8$ mit

$$\mathfrak{a}^2 = 4, \quad \mathfrak{b}^2 = 2, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = -2.$$

Beachtet man, daß die vorkommenden Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sämtlich durch (46) und (47) gegeben sind, und diskutiert alle möglichen Kombinationen, so erhält man

$$a^* = 13440, \quad a_1^* = 138240, \quad a_2^* = 30240,$$

woraus sich mit (51) und (50) wirklich (49) ergibt. Wir erhalten folgendes Resultat:

Satz 3. *Es bestehen die Identitäten*

$$\vartheta\,(\tau, \mathfrak{Q}_4) = G_2\,(\tau), \quad \vartheta\,(\tau, \mathfrak{Q}_8) = G_4\,(\tau), \quad (G_2\,(\tau))^2 = G_4\,(\tau),$$

d. h. es ist

$$a\,(2\,\nu, \mathfrak{Q}_4) = 120 \cdot \sum_{(\mu)/\nu} |\mathrm{N}\,\mu|,$$

$$a\,(2\,\nu, \mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4) = a\,(2\,\nu, \mathfrak{Q}_8) = 240 \cdot \sum_{(\mu)/\nu} |\mathrm{N}\,\mu|^3.$$

§ 3.

Bestimmung von Klassen quadratischer Formen.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist der Nachweis, daß es außer den Klassen $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_8$ keine anderen Klassen gerader Formen mit Determinante $\varepsilon^{2\nu}$ in 4 oder 8 Veränderlichen mehr gibt. Zu diesem Zweck sollen die Gitter, welche den Klassen solcher Formen zugeordnet werden, einer näheren Betrachtung unterzogen werden. Wir betrachten eine beliebige ganzzahlige gerade Form $Q(x_1 \ldots x_m)$ über $R(\sqrt{5})$ mit Determinante $\varepsilon^{2\nu}$ und denken uns Vektoren $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_m$ derart bestimmt, daß

$$(52) \qquad \mathfrak{x}^2 = Q(x_1, \ldots, x_m) \text{ mit } \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i$$

gilt. In dem Gitter U_m aller Vektoren $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i$ mit Koeffizienten $x_i \subset \mathfrak{o}$ ist die Teilmenge V_m der Vektoren $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}^2 = 2$ von besonderem Interesse. Für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \subset U_m$ ist stets $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \subset \mathfrak{o}$; denn es ist

$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 = 2\,\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \subset 2\,\mathfrak{o}.$$

Für Zahlen α aus $R(\sqrt{5})$ sei durch $\alpha \to \alpha'$ der Automorphismus des Körpers bezeichnet. Man bestimme nun Vektoren $\mathfrak{u}_1', \ldots, \mathfrak{u}_m'$ derart, daß

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i'\Big)^2 = Q'(x_1, \ldots, x_m)$$

mit der zu $Q(x_1, \ldots, x_m)$ konjugierten Form übereinstimmt; setzt man noch $\mathfrak{x}' = \sum_{i=1}^{m} x_i' \mathfrak{u}_i'$ für $\mathfrak{x} \subset U_m$, so ist $\mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2'$ für $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \subset U_m$ in gewöhnlichem Sinne zu $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2$ konjugiert, d. h. es ist

$$(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)' = \mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_2'.$$

Angewendet auf Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset V_m$ folgt daraus, weil

$$\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i'^2 = 2 \;\; (i = 1, 2) \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2| \leqq 2, \; |\mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2'| \leqq 2,$$

daß die ganze Zahl $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ sowie ihre Konjugierte dem Betrage nach höchstens gleich 2 sind. Daher kommen nur folgende Skalarprodukte in Betracht:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = 2, \; \varepsilon, \; 1, \; \varepsilon^{-1}, \; 0, \; -\varepsilon^{-1}, \; -1, \; -\varepsilon, \; -2.$$

Diese entsprechen den Winkeln

$$(53) \qquad \measuredangle(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 0^0, 36^0, 60^0, 72^0, 90^0, 108^0, 120^0, 144^0, 180^0.$$

Es kommen also nur Vielfache von 36^0, 60^0 und 90^0 in Frage. Eine beliebige Vektormenge heißt reduzibel, wenn sie in zwei nicht leere orthogonale Teilmengen zerlegt werden kann, ist das nicht der Fall, dann irreduzibel. Um eine Einsicht in die Struktur von V_m zu gewinnen, genügt es offenbar, die irreduziblen Bestandteile von V_m zu bestimmen. Wir wollen zunächst feststellen, welche ebenen Vektorkonfigurationen in V_m möglich sind. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset V_m$ seien linear unabhängig; sie erzeugen eine gewisse Ebene $\mathfrak{E}$. Welche Vektoren von V_m außer $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ liegen noch in $\mathfrak{E}$? Ich betrachte alle diese Vektoren und die Winkel zwischen je zwei benachbarten. Da mit $\mathfrak{a}$ auch $-\mathfrak{a}$ in V_m liegt, so treten die Winkel paarweise auf und der Vollwinkel 360^0 zerfällt nach (53) in gerade Vielfache von 36^0, 60^0 und 90^0:

$$2\,i \cdot 36^0 + 2\,j \cdot 60^0 + 2\,k \cdot 90^0 = 360^0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$i = 5\,i_1,\ j = 3\,j_1,\ k = 2\,k_1$$

und damit

$$i_1 + j_1 + k_1 = 1.$$

Es kann also immer nur eine Sorte von Winkeln vorkommen. Indem wir nötigenfalls $\mathfrak{a}_2$ durch $-\mathfrak{a}_2$ ersetzen, kann bereits $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \geqq 0$ vorausgesetzt werden. Der Fall $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \varepsilon^{-1}$ kann durch Ersetzen von $\mathfrak{a}_2$ durch $\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \subset V_m$ auf den Fall $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \varepsilon$ zurückgeführt werden. Entsprechend den Werten

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0,\ 1,\ \varepsilon$$

sind nun genau die drei folgenden Konfigurationen möglich:

1. Ein Viereck für $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$:

$$\pm\,\mathfrak{a}_1,\ \pm\,\mathfrak{a}_2\ \text{(reduzibel)}. \tag{54}$$

2. Ein Sechseck für $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 1$:

$$\pm\,\mathfrak{a}_1,\ \pm\,\mathfrak{a}_2,\ \pm\,(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2). \tag{55}$$

3. Ein Zehneck für $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \varepsilon$:

$$\pm\,\mathfrak{a}_1,\ \pm\,\mathfrak{a}_2,\ \pm\,(\varepsilon\,\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2),\ \pm\,(\mathfrak{a}_1 - \varepsilon\,\mathfrak{a}_2),\ \pm\,\varepsilon\,(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2). \tag{56}$$

Diese Überlegungen veranlassen uns, allgemein Vektordiagramme W_k zu betrachten, für welche wir fordern:

1. W_k ist irreduzibel und enthält k linear unabhängige Vektoren.

2. Für zwei Vektoren aus W_k kommen andere Werte des Skalarproduktes als 0, $\pm\,\varepsilon^\nu$ $(\nu = -1, 0, 1)$, $\pm\,2$ nicht in Betracht. Insbesondere ist $\mathfrak{a}^2 = 2$ für alle $\mathfrak{a} \subset W_k$.

3. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ linear unabhängige Vektoren aus W_k, so erzeugen sie in W_k, entsprechend ihrem Skalarprodukt, eine Vier-, Sechs- oder Zehneckkonfiguration.

Diejenigen Diagramme, in welchen nur die Skalarprodukte 0, $\pm\,1$, $\pm\,2$ vorkommen, sind aus der Theorie der Lieschen Ringe bekannt und sollen hier nicht mehr betrachtet werden. Wir wollen daher noch verlangen:

4. W_k enthält eine Zehneckkonfiguration.

Es wird sich herausstellen, daß es nur zu den Dimensionen $k = 2, 3, 4$ ein Diagramm W_k gibt, und zwar jeweils genau eins. Für $k = 2$ ist diese Behauptung bewiesen. Wir diskutieren den Fall $k = 3$.

Nach 4. liegt in W_3 ein Diagramm $W_2 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \varepsilon$. Wir bestimmen, was nach 1. möglich ist, einen von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ unabhängigen Vektor $\mathfrak{b}$, der auf W_2 nicht senkrecht steht. Sei dann etwa $\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1 \neq 0$. Wir können dann $\mathfrak{b}$ durch einen Vektor $\mathfrak{b}_1$ in der Ebene von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ ersetzen, so daß $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1 = \varepsilon^\nu$ mit $\nu = 0$ oder 1 gilt. Dabei hat man noch die Freiheit, $\mathfrak{b}_1$ durch $\varepsilon^\nu\,\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1$ zu ersetzen. Wir benutzen sie, um auf alle Fälle $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2 \neq 0$ zu erreichen; das soll vorausgesetzt werden; es ist dann $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2 = \pm\,\varepsilon$. Da nun $\sphericalangle(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 36^0$, $\sphericalangle(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1) \leq 60^0$, so ist $\sphericalangle(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2) \leqq 96^0$. Es gilt daher $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2 = \varepsilon^\mu$. Für $\nu = 1$ scheidet $\mu = -1$ aus, da $\mathfrak{b}_1$ nicht in der Ebene von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ liegt. In den fünf übrigen Fällen kann eine Linearkombination $\mathfrak{a}_3$ derart bestimmt werden, daß $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = \varepsilon$ gilt. Entsprechend den Exponentenpaaren $(\nu, \mu) = (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0), (0, -1)$ wähle man $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}_1$, $-\mathfrak{b}_1 + \varepsilon\,\mathfrak{a}_1$, $-\mathfrak{b}_1 + \varepsilon\,\mathfrak{a}_2$, $\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{b}_1)$, $\varepsilon^{-1}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2)$. Wir erhalten damit in W_3 Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ mit $\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k = \varepsilon$ für $i \neq k$. Jedes Diagramm W_3, welches diese drei Vektoren enthält, muß nach 3. das System $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$ der Vektoren

$$\pm\,\mathfrak{a}_1, \quad \pm(\mathfrak{a}_1 - \varepsilon\,\mathfrak{a}_2), \quad \pm\,\varepsilon(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2), \quad \pm(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon\,\mathfrak{a}_3) \tag{57}$$

und aller derjenigen enthalten, die aus (57) durch beliebige Permutation der Ziffern 1, 2, 3 hervorgehen (Gesamtzahl: 30 Vektoren). Die Art und Weise, wie $\mathfrak{a}_3$ bestimmt ist, läßt erkennen, daß auch der ursprünglich ausgewählte Vektor $\mathfrak{b}$ vom Typus eines der Vektoren von (57) ist, also in $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$ enthalten ist. Wir beweisen nun

$$W_3 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3], \tag{58}$$

d. h. jeder Vektor aus W_3 kommt unter den Typen (57) vor. Sei $\mathfrak{b}^*$ ein beliebiger Vektor aus W_3. $\mathfrak{b}^*$ steht nicht auf allen $\mathfrak{a}_i$ senkrecht; sei also etwa $\mathfrak{b}^*\mathfrak{a}_1 \neq 0$. Liegt $\mathfrak{b}^*$ in der Ebene von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, dann ist $\mathfrak{b}^* \subset W_2 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \subset [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$. Ist $\mathfrak{b}^*$ dagegen von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ linear unabhängig, dann bestimmt man wie oben $\mathfrak{a}_3^*$ in W_3 derart, daß $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3^* = \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3^* = \varepsilon$ und $\mathfrak{b}^* \subset [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3^*]$. Löst man mit dem Ansatz $\mathfrak{a}_3^* = a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + a_3\mathfrak{a}_3$ die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3^* = \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3^* = \varepsilon, \quad \mathfrak{a}_3^{*2} = 2,$$

so erhält man die Vektoren $\mathfrak{a}_3^* = \mathfrak{a}_3$ und $\frac{2\,\varepsilon}{2+\varepsilon}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) - \mathfrak{a}_3$. Der zweite Vektor hat mit $\mathfrak{a}_3$ ein unzulässiges Skalarprodukt, so daß also $\mathfrak{a}_3^* = \mathfrak{a}_3$, womit (58) bewiesen ist. Wir kommen jetzt zur Dimension $k = 4$. Auf Grund von 1. und 4. muß in W_4 ein Diagramm $W_3 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$ mit $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k = \varepsilon$ für $i \neq k$ enthalten sein. Wir bestimmen einen Vektor $\mathfrak{b}$ in W_4, der nicht in W_3

liegt und auf W_3 nicht senkrecht steht. Wir nehmen wieder an, daß $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 \neq 0$. Wie wir gesehen haben, kann dann ein Vektor $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ aufgefunden werden, so daß $\mathfrak{b} \subset [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1]$. Es ist daher auch $\mathfrak{b}_1$ nicht in W_3 enthalten, da sonst auch $\mathfrak{b}$ in W_3 liegen würde. Geometrisch ist nun sofort zu sehen, daß nur noch $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ oder 1 möglich ist. Im zweiten Fall setze man $\mathfrak{a}_2^* = -\mathfrak{b}_1 + \varepsilon\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_4^* = \mathfrak{b}_1 - \varepsilon\mathfrak{a}_2 + \varepsilon\mathfrak{a}_3$ und findet für diese Vektoren aus W_3 die Skalarprodukte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4^* = \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^* = \mathfrak{a}_2^*\mathfrak{a}_4^* = \varepsilon$. In allen Fällen ist damit in W_4 ein System von vier Vektoren zu ermitteln, in welchem das Skalarprodukt von je zweien gleich ε ist. Für die Vektoren dieses Systems wählen wir nunmehr die Bezeichnung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$. Es gilt somit $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k = \varepsilon$ für $i \neq k$. W_4 muß nach 3. notwendig das System $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4]$ der Vektoren

$$
\begin{aligned}
&\pm\mathfrak{a}_1,\ \pm(\mathfrak{a}_1 - \varepsilon\mathfrak{a}_2),\ \pm\varepsilon(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2),\ \pm(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon\mathfrak{a}_3),\\
&\pm(\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) - \mathfrak{a}_4),\ \pm(\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) - 2\mathfrak{a}_4),\\
&\pm(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)),\ \pm(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon\mathfrak{a}_3 - \varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_4)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

und aller derjenigen enthalten, die aus den Vektoren (59) durch beliebige Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 entstehen (Gesamtzahl: 120 Vektoren). Auch jetzt gilt wieder

$$W_4 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4]. \tag{60}$$

Hängt ein beliebiger Vektor $\mathfrak{b} \subset W_4$ linear von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ ab, so liegt wegen der Eindeutigkeit von W_3 der Vektor $\mathfrak{b}$ in $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]$. Wenn dagegen $\mathfrak{b}$ von den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ linear unabhängig und etwa $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 \neq 0$ ist, dann bestimme man einen Vektor $\mathfrak{b}_1 \subset W_4$ derart, daß $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ und $\mathfrak{b} \subset [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1]$. Es ist dann notwendig $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ oder 1. Mit dem Ansatz $\mathfrak{b}_1 = \alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\mathfrak{a}_3 + \alpha_4\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_1^2 = 2$ erhält man im ersten Fall als Lösungen von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ die Vektoren $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_4$ und $\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) - \mathfrak{a}_4$, im zweiten Fall als Lösungen von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = 1$ die Vektoren $\mathfrak{b}_1 = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_4) - \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)$. Damit ist erkannt, daß $\mathfrak{b}_1$ und folglich auch $\mathfrak{b}$ in $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4]$ liegen, womit (60) bewiesen ist. Die Einsicht, daß das System (60) auch wirklich die Forderungen 1. bis 4. erfüllt, gewinnen wir am einfachsten, wenn wir beachten, daß das Diagramm V_4 zu $\mathfrak{Q}_4$ die Forderungen 1. bis 4. erfüllt und 120 Vektoren besitzt, wie sich später herausstellt. Damit haben wir alle W_k bestimmt; denn W_5 existiert nicht mehr, wie sich aus der folgenden Überlegung ergibt. In jedem (hypothetischen) Diagramm W_5 finden wir zunächst ein Diagramm $W_4 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4]$ mit $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k = \varepsilon$ für $i \neq k$. Sei $\mathfrak{b}$ ein Vektor aus W_5, der nicht in W_4 liegt und auf W_4 nicht senkrecht steht. Nehmen wir etwa wieder $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 \neq 0$ an, so kann wie oben ein Vektor $\mathfrak{b}_1$ in W_5 gefunden werden, so daß $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ und $\mathfrak{b} \subset [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1]$ gilt. Es bestehen dann nur die Möglichkeiten

$$\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \varepsilon \text{ oder } 1, \quad \mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 = \varepsilon \text{ oder } 1.$$

Der Fall $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$ scheidet aus, weil sonst die Vektoren $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)$ und $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_1)$ mit einem unzulässigen Skalarprodukt in W_5 enthalten wären. Wenn aber $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 = 1$, dann ist $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4))\,\mathfrak{b}_1 = 2$, also $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 - \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)$ und daher $\mathfrak{b} \subset W_4$, was nicht sein sollte. Aus Gründen der Symmetrie brauchen wir nur noch den Fall $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 = \varepsilon$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 = 1$ zu betrachten. Hierfür ist $(\varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3) - \mathfrak{a}_4)\,\mathfrak{b}_1 = 2$, also $\mathfrak{b}_1 = \varepsilon^{-1}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) - \mathfrak{a}_4$, woraus wieder der Widerspruch $\mathfrak{b} \subset W_4$ folgt.

Wir diskutieren jetzt die Vektordiagramme V_m zu den quadratischen Formen $Q(x_1, \ldots, x_m)$ für die Veränderlichenzahlen $m = 4$ und 8. In den Fourierreihen zur Thetareihe von $Q(x_1, \ldots, x_m)$ und zur Eisensteinreihe $G_{\frac{m}{2}}(\tau)$ stimmen die konstanten Koeffizienten überein, daher folgt aus (27) nach einem wiederholt angewendeten Schluß, daß auch die Koeffizienten zum Exponenten 1 übereinstimmen. Daher ist die Anzahl der Vektoren in V_m gleich 120 bzw. 240. Das einzige Vektordiagramm mit der Vektorenanzahl 120 bzw. 240, in welchem keine Zehneckkonfiguration liegt, ist das in der Theorie der Lieschen Ringe mit A_8 bezeichnete Diagramm[5]). Kommt dagegen eine Zehneckkonfiguration vor, so sind $V_4 = W_4$ und $V_8 = W_4 + W_4$ die einzig möglichen Diagramme. Wenn U_m, $m = 4$ bzw. 8, das Diagramm W_4 bzw. $W_4 + W_4$ oder A_8 enthält, dann bilden bereits m Vektoren aus W_4 bzw. $W_4 + W_4$ oder A_8 eine Fundamentalmasche von U_m vom Volumen 1. Daher ist jede gerade Form $Q(x_1, \ldots, x_m)$ mit Determinante ε^{2r} für $m = 4$ und 8 in einer der Formenklassen $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_8$ enthalten. Die Klassen $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$ und $\mathfrak{Q}_8$ sind verschieden, weil $W_4 + W_4$ reduzibel und A_8 irreduzibel ist. Wir fassen die Resultate dieses Paragraphen zusammen in

Satz 4. *Eine beliebige positiv definite ganzzahlige gerade quadratische Form $Q(x_1, \ldots, x_m)$ über $R(\sqrt{5})$ mit Determinante ε^{2r} von $m = 4$ bzw. 8 Veränderlichen ist in der Formenklasse $\mathfrak{Q}_4$ bzw. einer der Klassen $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_8$ enthalten. Die Klassen $\mathfrak{Q}_4 + \mathfrak{Q}_4$ und $\mathfrak{Q}_8$ sind voneinander verschieden; $\mathfrak{Q}_8$ enthält Formen mit ganzrationalen Koeffizienten.*

(Eingegangen am 2. 10. 1940.)