Math. Ann. 260, 119–131 (1982).

Mathematische Annalen

Über eine Kennzeichnung der Koecherschen „Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung“

Carl Ludwig Siegel
in memoriam

Hans Maaß
Am Pferchelhang 5, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung und Ergebnis

In der Siegelschen Theorie der indefiniten quadratischen Formen spielen die reell-analytischen Eisensteinreihen

$$E_n(Z, \bar{Z}, \alpha, \beta) = \sum_{\{C, D\}} |CZ+D|^{-\alpha} |C\bar{Z}+D|^{-\beta} \qquad (\alpha - \beta \in 2\mathbb{Z}) \tag{1}$$

bekanntlich eine wichtige Rolle. C, D durchläuft hier ein volles System teilerfremder symmetrischer nicht-assoziierter Paare von n-reihigen Matrizen. $Z = X + iY$ bezeichnet eine symmetrische n-reihige komplexe Matrix mit positivem Imaginärteil Y. Es ist zu vermuten, daß die Reihe (1) für große Werte von $s = \alpha + \beta$ durch das Differentialgleichungssystem

$$(Z-\bar{Z})\left\{\left((Z-\bar{Z})\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}\right)' \frac{\partial}{\partial Z} + \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - \beta \frac{\partial}{\partial Z}\right\} E_n = 0 \tag{2}$$

(vgl. [3]), ihr Transformationsverhalten und gewisse Wachstumseigenschaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, sofern $\alpha, \beta > 0$ ist. Im Falle $n=1$ und $\alpha + \beta > 2$ ist das jedenfalls richtig, wie ich in [4] gezeigt habe.

Ist $f(Z, \bar{Z})$ eine beliebige Lösung von (2) mit demselben Transformationsverhalten wie E_n, so gibt es eine Fourierentwicklung der Art

$$f(Z, \bar{Z}) = \sum_T a(Y, T) e^{2\pi i \sigma(XT)} \qquad (\sigma = \text{Spur}), \tag{3}$$

wobei die Fourierkoeffizienten der Bedingung

$$a(Y[U], T) = a(Y, T) \tag{4}$$

für unimodulare Matrizen U genügen, die T in sich transformieren: $T[U] = U'TU = T$. Die $a(Y, T)$ sind außerdem Lösungen eines gewissen Differentialgleichungssystems, welches sich aus (2) ableiten läßt. Erst dann, wenn dieses System mit der formulierten Transformationsinvarianz für die Funktionen vollständig gelöst werden kann, besteht Aussicht, einen Beweis für die angegebene Kennzeich-

0025-5831/82/0260/0119/$02.60

nung von E_n zu finden. Da das für $a(Y,T)$ (T beliebig) gestellte Problem zur Zeit nicht lösbar erscheint, habe ich mich hier auf die Betrachtung des Falles $T=0$ beschränkt. Der folgende Ansatz ist damit hinreichend motiviert.

Es bezeichne $\mathfrak{L}_n(s)$ den linearen Raum der in $Y>0$ reell-analytischen Funktionen $f(Y)$ (an Stelle von $a(Y,0)$), die den folgenden Bedingungen genügen:

1. $\left\{\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2+\left(s-\frac{n+1}{2}\right)Y\frac{\partial}{\partial Y}\right\}f(Y)=0$

2. $|f(Y)|<C|Y|^\kappa$ für $Y\geqq \varepsilon E$ mit $C=C(\varepsilon)$, $\kappa=\kappa(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ und (5)

der Einheitsmatrix E

3. $f(Y[U])=f(Y)$ für unimodulare Matrizen U

Da die für $s>\frac{1}{2}(n+j+1)$ konvergenten Koecherschen Reihen (s. [1])

$$f_0(Y)=1,\qquad f_j(Y)=\sum_{\{G\}}|Y[G]|^{\frac{1}{2}(j+1)-s}\qquad (1\leqq j\leqq n) \tag{6}$$

wobei $G=G^{(n,j)}$ ein volles System rechts nicht assoziierter primitiver Matrizen durchläuft, in der Fourierentwicklung von E_n mit $s=\alpha+\beta$ sämtlich auftreten (s. [5], S. 306), so folgt aus (2) sofort

$$f_j\in\mathfrak{L}_n(s)\quad\text{für}\quad j=0,1,\ldots,n\quad\text{und}\quad s>n+1. \tag{7}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)$ den Teilraum der homogenen Funktionen vom Grad $\frac{1}{2}j(j+1)-js$. Er ist in $\mathfrak{L}_n(s)$ durch

$$\sigma\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)f=\left(\tfrac{1}{2}j(j+1)-js\right)f \tag{8}$$

gekennzeichnet. Unter der Voraussetzung $s>n+1$, die im folgenden beibehalten wird, ergibt sich durch Induktion nach n, daß

$$\mathfrak{L}_n(s)=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)\qquad (s>n+1) \tag{9}$$

ist. Dieser Schluß wird durch eine gewisse Fourierentwicklung von $f\in\mathfrak{L}_n(s)$ ermöglicht, über deren Koeffizienten präzise Angaben gemacht werden. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$$Y=\begin{pmatrix}V_1 & 0\\ 0 & v\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E & \mathfrak{x}\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad V_1=\begin{pmatrix}V_2 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E & \mathfrak{x}_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Allgemein sei A^* die Matrix, die aus der Matrix A durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht, so daß insbesondere $V_1=Y^*$ und $V_2=V_1^*$ ist. Wir formulieren den angezeigten

Entwicklungssatz. *Jede Funktion $f(Y)\in\mathfrak{L}_n(s)$ ist in $\mathfrak{x}$ periodisch und gestattet demgemäß eine Darstellung der Art*

$$f(Y)=a_0(V_1)+b_0(V_1)|V_1|^{-\frac{1}{2}}v^{-q}$$
$$+\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}a_{\mathfrak{g}}(V_1)\,(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}q}K_q\left(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]}\right)e^{2\pi i\mathfrak{g}'\mathfrak{x}}, \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{g}'=(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ *alle von Null verschiedenen ganzen Zeilen durchläuft und* $q=s-\frac{1}{2}(n+1)$ *gesetzt ist. Ist* $\mathfrak{g}'$ *das g-fache der letzten Matrizenzeile der unimodularen Matrix* $U_1=U_1^{(n-1)}$, *so gilt mit einer gewissen Funktion* $\alpha_g=\alpha_{-g}$ *die Beziehung*

$$a_{\mathfrak{g}}(V_1)=|V_1|^{-q-\frac{1}{2}}|V_1[U_1^{-1}]^*|^q\alpha_g(V_1[U_1^{-1}]^*). \tag{12}$$

Zudem ist für $n\geqq 2$, *wenn noch* $\mathfrak{L}_0(s)=\mathbb{C}$ *gesetzt wird,*

$$a_0\in\mathfrak{L}_{n-1}(s), \quad b_0\in\mathfrak{L}_{n-1}(s-1), \quad \alpha_g\in\mathfrak{L}_{n-2}(s-1). \tag{13}$$

Schließlich sei noch

$$\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1\\ x\end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & v\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}=u\begin{pmatrix}y^{-1} & xy^{-1}\\ xy^{-1} & (x^2+y^2)y^{-1}\end{pmatrix}, \quad u>0,$$
$$z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy. \tag{14}$$

Es stellt sich dann heraus, daß

$$f_{V_2}(V):=\int_0^1\!\cdots\!\int f(Y)\,d\mathfrak{x}_1\,d\mathfrak{x}_2 \tag{15}$$

als Funktionen von V in $\mathfrak{L}_2(q+\frac{3}{2})$ liegt. Mit gewissen Funktionen c_0, c_1, a_0'', b_0' ergibt sich explizit

$$f_{V_2}(V)=c_0(V_2)+\varphi(z,\bar{z})|V|^{-\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{2}\right)}+c_1(V_2)|V|^{-q} \tag{16}$$

mit

$$\varphi(z,\underline{z})=b_0'(V_2)|V_2|^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}+q}+a_0''(V_2)|V_2|^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-q}$$
$$+\sum_{g\neq 0}|V_2|^{-\frac{1}{2}}\alpha_g(V_2)\,|g|^{-q}y^{\frac{1}{2}}K_q(2\pi|g|y)e^{2\pi igx}. \tag{17}$$

Auf Grund dieser Entwicklung ist evident (s. [2], S. 162–163), daß φ der Differentialgleichung

$$\left\{y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(q+\tfrac{1}{2})(q-\tfrac{1}{2})\right\}\varphi=0 \tag{18}$$

genügt. Überdies ist φ gegenüber den Substitutionen der elliptischen Modulgruppe Γ voll-invariant:

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d},\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)=\varphi(z,\bar{z}) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma. \tag{19}$$

Es handelt sich also um eine „Wellenfunktion“ im Sinne von [2]. Wegen $q>\frac{1}{2}$ ist φ daher bereits durch b_0' eindeutig bestimmt. Nunmehr kann geschlossen werden, daß durch $f(Y)\to a_0(V_1)$ eine injektive Abbildung $\mathfrak{L}_n(s)/\mathfrak{L}_n^{(n)}(s)\to\mathfrak{L}_{n-1}(s)$ definiert wird; denn $a_0=0$ zieht, wie später ausgeführt wird, $b_0'=0$, damit $\varphi=0$ und schließlich $f \in \mathfrak{L}_n^{(n)}(s)$ nach sich. Mit Hilfe von $\dim \mathfrak{L}_n^{(n)}(s) = 1$, einer einfachen Folge des Entwicklungssatzes, ergibt sich nun $\dim \mathfrak{L}_n(s) \leqq n+1$. Damit ist

$$\dim \mathfrak{L}_n^{(j)}(s) = 1 \qquad (0 \leqq j \leqq n) \tag{20}$$

bewiesen und *die Koechersche Reihe f_j in gewünschter Weise gekennzeichnet als die bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Funktion f mit den Eigenschaften*

$$f \in \mathfrak{L}_n(s), \qquad \sigma\left(Y \frac{\partial}{\partial Y}\right) f(Y) = (\tfrac{1}{2} j(j+1) - js) f. \tag{21}$$

Sinn der Forderung 2 in (5) ist zu verhindern, daß neben der Besselfunktion K_q in (11) auch noch I_q auftritt.

1. Das Differentialgleichungssystem

Wir führen neue Koordinaten durch

$$Y = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & V_3 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \qquad V_1 = V_1^{(r)}, \qquad V_2 = V_2^{(n-r)}, \qquad V_3 = V_3^{(r,n-r)} \tag{22}$$

ein. Dabei ist r im Intervall $0 < r < n$ fest gewählt. In das gleiche Blockschema unterteilen wir

$$Y \frac{\partial}{\partial Y} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{23}$$

und kommen überein, durch Unterstreichung einer Matrix anzudeuten, daß diese bei den notierten nachfolgenden Operationen als konstant anzusehen ist. Dann ist, wie man etwa [5], S. 72 entnimmt,

$$A = V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3} \underline{V_3'}, \qquad B = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3}, \qquad D = V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} + \tfrac{1}{2} V_3' \frac{\partial}{\partial V_3}, \tag{24}$$

$$C = V_3' \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3} \underline{V_3'} \right) - V_2 \left(\frac{\partial}{\partial V_2} V_3' - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1} \right). \tag{25}$$

Nach gehöriger Einübung des Kalküls erhält man für

$$\left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A_1 = A^2 + BC, & B_1 = AB + BD, \\ C_1 = CA + DC, & D_1 = CB + D^2 \end{matrix} \tag{26}$$

die Ausdrücke

$$A_1 = \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} + \frac{n-r}{2} E \right) \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3} \underline{V_3'} \right) - \tfrac{1}{2} \sigma \left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} \right) E \tag{27}$$
$$- \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \left(\frac{\partial}{\partial V_2} \underline{V_3'} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1} \right)$$

$$B_1 = \tfrac{1}{2} \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} + \frac{n-r}{2} E \right) \frac{\partial}{\partial V_3} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} \tag{28}$$

$$C_1 = V_3'\left\{\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 - \tfrac{1}{2} V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\frac{\partial}{\partial V_3}\underline{V_3'} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\underline{V_3'} - \tfrac{1}{2}\sigma\left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right)E \right. \tag{29}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1} + \frac{n-r}{2} V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \left.\frac{n-r}{2}\frac{\partial}{\partial V_3} V_3'\right\} + V_2\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V_3'}\frac{\partial}{\partial V_1}\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1}\frac{\partial}{\partial V_3}\underline{V_3'} - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1} - \frac{\partial}{\partial V_2} V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} V_3' + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V_2} V_2 \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1}\right\}$$

$$D_1 = \tfrac{1}{2}\left\{V_3'\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} + \frac{n-r}{2}E\right) + \tfrac{1}{2} V_2 \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1}\right\}\frac{\partial}{\partial V_3} \tag{30}$$
$$+\left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} + \tfrac{1}{2} V_3' \frac{\partial}{\partial V_3}\right) V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}$$

Schließlich wird die Bildung von

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -V_3' & E \end{pmatrix}\left\{\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2 + qY\frac{\partial}{\partial Y}\right\}\begin{pmatrix} E & 0 \\ \underline{V_3'} & E \end{pmatrix} \tag{31}$$

nahegelegt. Die Operatoren

$$P_0 = A_1 + B_1 \underline{V_3'} + q(A + B\underline{V_3'}),$$
$$P_1 = B_1 + qB,$$
$$P_2 = D_1 - V_3'B_1 + q(D - V_3'B),$$
$$P_3 = C_1 - V_3'A_1 + D_1\underline{V_3'} - V_3'B_1\underline{V_3'} + q(C - V_3'A + D\underline{V_3'} - V_3'B\underline{V_3'})$$

sind von vergleichsweise einfacher Gestalt ($q = s - \frac{1}{2}(n+1)$):

$$P_0 = \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 + \left(s - \frac{r+1}{2}\right) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \tfrac{1}{2}\sigma\left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right)E + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1}, \tag{32}$$

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\left\{V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\frac{\partial}{\partial V_3} + \frac{\partial}{\partial V_3} V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} + \left(s - \frac{r+1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial V_3}\right\}, \tag{33}$$

$$P_2 = \left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right)^2 + \left(s - \frac{n+1}{2}\right) V_2 \frac{\partial}{\partial V_2} + \tfrac{1}{4} V_2 \frac{\partial}{\partial V_3'} V_1^{-1}\frac{\partial}{\partial V_3}. \tag{34}$$

Der Relation $P_3 = V_2(V_1^{-1}P_1)'$ zufolge ist dann

$$\left\{\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2 + qY\frac{\partial}{\partial Y}\right\} f = 0 \Leftrightarrow P_0 f = 0, \quad P_1 f = 0, \quad P_2 f = 0. \tag{35}$$

2. Der Entwicklungssatz

Wir wählen nun die zu $r = n-1$ gehörige Parameterdarstellung und lassen gemäß Vereinbarung (10) die Zeichen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{x}$ an Stelle von V_2, V_3 treten, so daß fortan $V_1^* = V_2$ gelten kann. Die Möglichkeit der Fourierentwicklung von $f \in \mathfrak{L}_n(s)$ ergibt sich aus der Invarianz von f gegenüber den unimodularen Transformationen

$Y \to Y[U]$, hier speziell $U = \begin{pmatrix} U_1 & \mathfrak{g} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die in den neuen Parametern die Wirkung

$$V_1 \to V_1[U_1], \quad v \to v, \quad \mathfrak{x} \to U_1^{-1}(\mathfrak{g}+\mathfrak{x})$$

zeigen. Sei demgemäß

$$f(Y) = \sum_{\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{g}}(V_1, v) e^{2\pi i \mathfrak{g}'\mathfrak{x}}. \tag{36}$$

Dann folgt sofort

$$u_{\mathfrak{g}}(V_1, v) = u_{U_1'\mathfrak{g}}(V_1[U_1], v). \tag{37}$$

Die Anwendung der Operatoren $P_\nu (\nu = 0, 1, 2)$ auf die Fourierreihe (36) ergibt wieder Fourierreihen, deren Koeffizienten gemäß (35) sämtlich verschwinden. Demnach genügt $u_{\mathfrak{g}}$ den folgenden Differentialgleichungen

$$\left\{\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 + (q+\tfrac{1}{2}) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} - \tfrac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial v} E - \pi^2 v \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1}\right\} u_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{38}$$

$$\left\{V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} + v \frac{\partial}{\partial v} E + (q+\tfrac{1}{2}) E\right\} \mathfrak{g} u_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{39}$$

$$\left\{\left(v \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 + q v \frac{\partial}{\partial v} - \pi^2 v V_1^{-1}[\mathfrak{g}]\right\} u_{\mathfrak{g}} = 0. \tag{40}$$

Eine Abschätzung der Art $|f(Y)| < C|Y|^\kappa$ für $Y \geqq \varepsilon E > 0$ gilt, wie man sofort sieht, nach (5) unabhängig von $\mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{x}$ in einem Kompaktum, z.B. einem Einheitswürfel, liegt. Die Darstellung

$$u_{\mathfrak{g}}(V_1, v) = \int_0^1 \cdots \int f(Y) d\mathfrak{x}$$

ergibt demnach

$$|u_{\mathfrak{g}}(V_1, v)| < C(|V_1| v)^\kappa \quad \text{für} \quad V_1 \geqq \varepsilon E, \quad v \geqq \varepsilon > 0. \tag{41}$$

Die Integration von (40) liefert nun

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0(V_1) + b_0(V_1) |V_1|^{-\frac{1}{2}} v^{-q}, \\ u_{\mathfrak{g}} &= a_{\mathfrak{g}}(V_1) (v V_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}q} K_q(2\pi \sqrt{v V_1^{-1}[\mathfrak{g}]}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{g} \neq 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Besselfunktion I_q kann neben K_q nicht auftreten, da sich ihr exponentielles Wachstum für $v \to \infty$ mit (41) nicht verträgt.

Bei der Diskussion der Differentialgleichungen (39), die nur für $\mathfrak{g} \neq 0$ von Interesse sind, ist von folgenden Identitäten Gebrauch zu machen:

$$v \frac{d}{dv} v^{-\frac{1}{2}q} K_q(\sqrt{v}) = -\tfrac{1}{2} v^{\frac{1}{2}(1-q)} K_{q+1}(\sqrt{v}),$$

$$V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} = -\frac{\partial}{\partial \hat{V}_1} \underline{\hat{V}_1} \quad \text{für} \quad \hat{V}_1 = V_1^{-1}.$$

Man bestätigt mit ihrer Hilfe die folgenden Rechnungen.

$$v\frac{\partial}{\partial v}(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}q}K_q(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]})$$
$$=-\pi(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{\frac{1}{2}(1-q)}K_{q+1}(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]}) \tag{43}$$

und

$$V_1\frac{\partial}{\partial V_1}a_{\mathfrak{g}}(V_1)(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}q}K_q(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]})$$
$$=(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}q}K_q(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]})\,V_1\frac{\partial}{\partial V_1}a_{\mathfrak{g}}(V_1)$$
$$+\pi(vV_1^{-1}[\mathfrak{g}])^{-\frac{1}{2}(q+1)}K_{q+1}(2\pi\sqrt{vV_1^{-1}[\mathfrak{g}]})a_{\mathfrak{g}}(V_1)\mathfrak{g}\mathfrak{g}'V_1^{-1}v. \tag{44}$$

(39) geht damit über in

$$\left\{V_1\frac{\partial}{\partial V_1}+(q+\tfrac{1}{2})E\right\}\mathfrak{g}a_{\mathfrak{g}}(V_1)=0. \tag{45}$$

Der Ansatz

$$a_{\mathfrak{g}}(V_1)=|V_1|^{-q-\frac{1}{2}}\tilde{a}_{\mathfrak{g}}(V_1) \tag{46}$$

führt schließlich auf die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial V_1}\mathfrak{g}\tilde{a}_{\mathfrak{g}}(V_1)=0. \tag{47}$$

Sie besagt im Falle $\mathfrak{g}'=(0,0,\ldots,0,g)$, $g\neq 0$, daß $\tilde{a}_{\mathfrak{g}}(V_1)$ von der letzten Spalte, damit auch von der letzten Zeile von V_1 unabhängig ist. Daher ist

$$\tilde{a}_{\mathfrak{g}}(V_1)=|V_1^*|^q\alpha_g(V_1^*)\quad\text{im Falle}\quad \mathfrak{g}'=(0,0,\ldots,0,g),\qquad g\neq 0 \tag{48}$$

mit einer gewissen Funktion α_g. Zu beliebigem $\mathfrak{g}\neq 0$ bestimme man eine unimodulare Matrix U_1 derart, daß $\mathfrak{g}'$ bis auf einen Zahlfaktor g mit der letzten Zeile von U_1 übereinstimmt. g erweist sich als der g.g.T. der Elemente von $\mathfrak{g}$. Dann wird $\mathfrak{g}'U_1^{-1}=(0,0,\ldots,0,g)$. Zufolge (37), (46) und (48) ergibt sich daher

$$a_{\mathfrak{g}}(V_1)=|V_1|^{-q-\frac{1}{2}}|V_1[U_1^{-1}]^*|^q\alpha_g(V_1[U_1^{-1}]^*)\quad\text{für}\quad \mathfrak{g}\neq 0. \tag{49}$$

Es verbleibt die Diskussion von (38). Wir beginnen mit $\mathfrak{g}=0$. Gemäß der in (42) angegebenen Zerlegung von u_0 zerfällt (38) im Falle $\mathfrak{g}=0$ in

$$\left\{\left(V_1\frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2+(q+\tfrac{1}{2})V_1\frac{\partial}{\partial V_1}\right\}a_0(V_1)=0, \tag{50}$$

$$\left\{\left(V_1\frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2+(q+\tfrac{1}{2})V_1\frac{\partial}{\partial V_1}+\tfrac{1}{2}qE\right\}|V_1|^{-\frac{1}{2}}b_0(V_1)=0.$$

Die letzte Gleichung ist mit Hilfe von $V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} |V_1|^p = |V_1|^p \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} + pE\right)$ in

$$\left\{\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 + (q-\tfrac{1}{2}) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right\} b_0(V_1) = 0 \tag{51}$$

überzuführen.

Der Fall $\mathfrak{g} \neq 0$ erfordert längere Rechnungen. Bei den Umformungen und Zusammenfassungen ist von folgenden Identitäten Gebrauch zu machen:

$$\frac{\partial}{\partial V_1} \underline{V_1 A} V_1 = \tfrac{1}{2}(A' V_1 + \sigma(A V_1) E)$$

$$V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} a_{\mathfrak{g}}(V_1)\mathfrak{g} = -(q+\tfrac{1}{2}) a_{\mathfrak{g}}(V_1)\mathfrak{g}$$
$$K_{q+2}(v) - K_q(v) = 2(q+1) v^{-1} K_{q+1}(v)$$

Zur Abkürzung werde $t = \sqrt{v V_1^{-1}[\mathfrak{g}]}$ gesetzt. Ausgehend von (43) und (44) gelangen wir zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 u_{\mathfrak{g}} = {} & \pi t^{-q-1} K_{q+1}(2\pi t) \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} v V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} a_{\mathfrak{g}}(V_1) \\ & + t^{-q} K_q(2\pi t) \left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 a_{\mathfrak{g}}(V_1) \\ & + \pi^2 v t^{-q} K_{q+2}(2\pi t) \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} a_{\mathfrak{g}}(V_1) \\ & + \pi v t^{-q-1} K_{q+1}(2\pi t) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} a_{\mathfrak{g}}(V_1) \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} \\ & - \tfrac{1}{2}\pi v t^{-q-1} K_{q+1}(2\pi t) a_{\mathfrak{g}}(V_1)(\mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} + V_1[\mathfrak{g}] E)\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}(q+\tfrac{1}{2}) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} u_{\mathfrak{g}} = (q+\tfrac{1}{2}) \Big\{ & t^{-q} K_q(2\pi t) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1} a_{\mathfrak{g}}(V_1) \\ & + \pi v t^{-q-1} K_{q+1}(2\pi t) a_{\mathfrak{g}}(V_1) \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} \Big\}\end{aligned} \tag{53}$$

$$-\tfrac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial v} u_{\mathfrak{g}} E = \tfrac{1}{2}\pi a_{\mathfrak{g}}(V_1) t^{1-q} K_{q+1}(2\pi t) E \tag{54}$$

$$-\pi^2 v \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} u_{\mathfrak{g}} = -\pi^2 a_{\mathfrak{g}}(V_1) t^{-q} K_q(2\pi t) \mathfrak{g}\mathfrak{g}' V_1^{-1} v \tag{55}$$

Addition dieser vier Gleichungen ergibt nach Streichung des Faktors $t^{-q} K_q(2\pi t)$ wegen (38) die Differentialgleichung

$$\left\{\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 + (q+\tfrac{1}{2}) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right\} a_{\mathfrak{g}}(V_1) = 0. \tag{56}$$

Sie wird mit Hilfe von (46) auf $\tilde{a}_{\mathfrak{g}}$ umgeschrieben:

$$\left\{\left(V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right)^2 - (q+\tfrac{1}{2}) V_1 \frac{\partial}{\partial V_1}\right\} \tilde{a}_{\mathfrak{g}}(V_1) = 0.$$

Damit gleichwertig ist

$$\left\{\frac{\partial}{\partial V_1}\, \underline{V_1}\, \frac{\partial}{\partial V_1} + (\tfrac{1}{2}(n-1)-q)\frac{\partial}{\partial V_1}\right\} \tilde{a}_{\mathrm{g}}(V_1) = 0\,. \tag{57}$$

Wir wählen speziell $\mathrm{g}'=(0,0,\ldots,0,g)$, so daß $\tilde{a}_{\mathrm{g}}$ gemäß (48) nur von $V_2 = V_1^*$ abhängt. In (57) kann dann $\underline{V_1}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial V_1}$ durch $\begin{pmatrix} \underline{V_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial V_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ersetzt werden. Es resultiert

$$\left\{\frac{\partial}{\partial V_2}\, \underline{V_2}\, \frac{\partial}{\partial V_2} + (\tfrac{1}{2}(n-1)-q)\frac{\partial}{\partial V_2}\right\} |V_2|^q \alpha_g(V_2) = 0$$

oder

$$\left\{\left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right)^2 - q V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right\} |V_2|^q \alpha_g(V_2) = 0$$

und schließlich

$$\left\{\left(V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right)^2 + q V_2 \frac{\partial}{\partial V_2}\right\} \alpha_g(V_2) = 0\,. \tag{58}$$

Die für a_0, b_0, α_g gemäß (13) charakteristischen Differentialgleichungen sind nun mit (50) (51), (58) bewiesen.

Die Invarianz von a_0, b_0, α_g gegenüber unimodularen Transformationen ist auf Grund von (37), (42), (46), (48) leicht einzusehen. Zum Beweis von (13) bedarf es also nur noch des Nachweises, daß a_0, b_0, α_g im jeweiligen Variablenbereich die Forderung 2 des Systems (5) erfüllen. Für a_0, b_0 ist dies wegen (41) sofort einzusehen. Für α_g ist folgende Überlegung anzustellen: Wir wählen $V_1 \geqq \varepsilon E > 0$ und bezeichnen mit $0 < \omega_1 \leqq \ldots \leqq \omega_{n-1}$ die der Größe nach geordneten charakteristischen Wurzeln von V_1. Zu gegebenem $\mathrm{g} \neq 0$ bestimmen wir v durch $v V_1^{-1}[\mathrm{g}] = \mathrm{g}'\mathrm{g}$. Mit einem gewissen ω im Intervall $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_{n-1}$ ist dann $V_1^{-1}[\mathrm{g}] = \omega^{-1}\mathrm{g}'\mathrm{g}$, also $v = \omega \geqq \omega_1 \geqq \varepsilon$. Nach (41) ist nun

$$|a_{\mathrm{g}}(V_1)|(\mathrm{g}'\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}q} K_q(2\pi\sqrt{\mathrm{g}'\mathrm{g}}) < C(|V_1| v)^{\kappa}\,,$$
$$v \leqq \omega_{n-1} \leqq \varepsilon^{2-n}\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1} = \varepsilon^{2-n}|V_1|\,,$$

daher $|a_{\mathrm{g}}(V_1)| < C_1|V_1|^{2\kappa}$ mit $C_1 = C_1(\varepsilon, \mathrm{g})$. Insbesondere folgt für $\mathrm{g}'=(0,0,\ldots,0,g)$ nach (46) und (48) mit $V_1 = \begin{pmatrix} V_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ die Abschätzung

$$|V_1|^{-q-\frac{1}{2}} |V_2|^q |\alpha_g(V_2)| \leqq C_1 |V_1|^{2\kappa}\,,$$

daher

$$|\alpha_g(V_2)| \leqq C_2 |V_2|^{2\kappa+\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad V_2 \geqq \varepsilon E$$

mit einer gewissen Konstanten C_2, die nur von ε und g abhängt, q.e.d.

Der Beweis des Entwicklungssatzes ist damit erbracht.

3. Dimensionsbestimmungen

Wir stellen auf Grund des Entwicklungssatzes mit Hilfe von Induktion nach n fest, daß $\mathfrak{L}_n(s)$ die direkte Zerlegung (9) gestattet, sofern $s>n+1$ ist. Diese Bedingung zieht die entsprechende für $\mathfrak{L}_{n-1}(s-1)$, $\mathfrak{L}_{n-1}(s)$, $\mathfrak{L}_{n-2}(s-1)$ nach sich und (9) ist jedenfalls richtig für $n=0$ und 1. Die Summendarstellung (9) bedeutet nichts anderes als eine Zerlegung von $\mathfrak{L}_n(s)$ in Eigenräume des Operators $\sigma\left(Y\dfrac{\partial}{\partial Y}\right)$. Hier ist zu beachten, daß mit $f(Y)$ auch $f(\lambda Y)$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ in $\mathfrak{L}_n(s)$ liegt. Läßt sich $f\in\mathfrak{L}_n(s)$ in m homogene Funktionen verschiedener Homogenitätsgrade $h_1, h_2, \ldots, h_m$ aufspalten: $f=g_1+g_2+\ldots+g_m$, so gehören die Komponenten g_j selber zu $\mathfrak{L}_n(s)$. Bestimmt man nämlich m verschiedene Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ so, daß die Determinante $|\lambda_\mu^{h_\nu}|\neq 0$ wird, so kann das System

$$f(\lambda_\mu Y)=\sum_{\nu=1}^{m} g_\nu(\lambda_\mu Y)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\mu^{h_\nu} g_\nu(Y) \qquad (1\leqq\mu\leqq m)$$

nach den g_ν aufgelöst werden:

$$g_\mu(Y)=\sum_{\nu=1}^{m} c_{\mu\nu} f(\lambda_\nu Y) \qquad (1\leqq\mu\leqq m),$$

woraus in der Tat $g_\mu\in\mathfrak{L}_n(s)$ $(1\leqq\mu\leqq m)$ erhellt. Wir nehmen an, daß (9) für $h(<n)$ an Stelle von n bewiesen ist. Aus dem Entwicklungssatz geht hervor, daß $f\in\mathfrak{L}_n(s)$ als Summe von endlich vielen homogenen Funktionen geschrieben werden kann. Sei f bereits homogen. Dann sind auch alle a_0, b_0, α_g homogen und für $\operatorname{grad} f$ kommen folgende Werte in Frage:

$$\operatorname{grad} a_0=\tfrac{1}{2}j(j+1)-js \qquad (0\leqq j\leqq n-1)$$

oder

$$\operatorname{grad} b_0(V_1)|V_1|^{-\frac{1}{2}}v^{-q}=\operatorname{grad} b_0(V_1)+1-s=\tfrac{1}{2}j(j+1)-js \qquad (1\leqq j\leqq n)$$

oder

$$\operatorname{grad} a_g(V_1)=\operatorname{grad}\alpha_g(V_1)+1-s=\tfrac{1}{2}j(j+1)-js \qquad (1\leqq j\leqq n-1).$$

Damit ist (9) bewiesen. Insbesondere wird ersichtlich, daß alle $f(Y)\in\mathfrak{L}_n^{(0)}(s)$ bzw. $\mathfrak{L}_n^{(n)}(s)$ von der Gestalt $a_0(V_1)$ bzw. $c_0(V_1)|Y|^{\frac{1}{2}(n+1)-s}$ sind. Wegen der Invarianz von $f(Y)$ gegenüber unimodularen Transformationen ist das nur möglich, wenn a_0 bzw. c_0 konstant ist, woraus

$$\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)=\mathbb{C} f_j(Y) \quad \text{für} \quad j=0 \quad \text{und} \quad n \tag{59}$$

erhellt.

Der Vollständigkeit halber deuten wir einen Beweis für $f_j\in\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)$ $(0<j\leqq n)$ an. Die Transformation $Y\to Y[R]$ mit nicht-singulärer Matrix $R=R^{(n)}$ bewirkt $Y\dfrac{\partial}{\partial Y}\to R'Y\dfrac{\partial}{\partial Y}R'^{-1}$. Das Differentialgleichungssystem (5) geht also in der Gesamtheit in sich über. Es genügt daher zu zeigen, daß irgend ein Glied der Reihe f_j von

dem Differentialoperator in (5) annulliert wird. Entsteht Y_j aus Y durch Streichen der letzten $n-j$ Zeilen und Spalten, so ist $|Y_j|^{\frac{1}{2}(j+1)-s}$ ein solches Glied. Analog zu (58) kann nun

$$\left\{\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2+\left(s-\frac{n+1}{2}\right)Y\frac{\partial}{\partial Y}\right\}|Y_j|^{\frac{1}{2}(j+1)-s}=0$$

bewiesen werden. Wir merken noch $|f_j(Y)|\leqq|f_j(\varepsilon E)|$ für $Y\geqq\varepsilon E>0$ an.

Es bleibt nur noch $\dim\mathfrak{L}_n(s)\leqq n+1$ zu beweisen. $\dim\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)=1$ ist dann eine unmittelbare Folge von $f_j\in\mathfrak{L}_n^{(j)}(s)$ und (9). In der vereinbarten Bezeichnung (10) und (14) ist

$$Y=\begin{pmatrix}V_2 & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E & X\\ 0 & E\end{bmatrix}\quad\text{mit}\quad X=X^{(n-2,2)}=(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2x). \tag{60}$$

Die Invarianz von $f(Y)\in\mathfrak{L}_n(s)$ gegenüber den Transformationen $Y\to Y\begin{bmatrix}E & G\\ 0 & U\end{bmatrix}$, $G=G^{(n-2,2)}$ ganz, $U=U^{(2)}$ unimodular, findet ihren Ausdruck in der Fourierentwicklung

$$f(Y)=\sum_G u_G(V_2,V)e^{2\pi i\sigma(G'X)}$$

und den Koeffizientenrelationen

$$u_G(V_2,V)=u_{GU'^{-1}}(V_2,V[U]). \tag{61}$$

G durchläuft hier alle ganzen Matrizen vom Typus $G^{(n-2,2)}$. Speziell für $G=0$ wird

$$f_{V_2}(V):=u_0(V_2,V)=\int_0^1\cdots\int f(Y)dX=\int_0^1\cdots\int f(Y)d\mathfrak{x}_1d\mathfrak{x}_2. \tag{62}$$

Die Integration ist in beiden Integralen über den $2(n-2)$-dimensionalen Einheitswürfel auszuführen, dessen Koordinaten zwischen 0 und 1 liegen. Die bei der Koordinatentransformation auftretende Scherung kann wegen der Periodizität von f unberücksichtigt bleiben. Wegen (61) ist $f_{V_2}(V)$ gegenüber den unimodularen Transformationen $V\to V[U]$ invariant.

Die schrittweise Integration in (62) über $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ wird mit Hilfe des Entwicklungssatzes vorbereitet durch

$$\int_0^1\cdots\int f(Y)d\mathfrak{x}=a_0(V_1)+b_0(V_1)|V_1|^{-\frac{1}{2}}v^{-q}. \tag{63}$$

Bei der Integration von $f(Y)$ über $\mathfrak{x}_1$ liefern nur die Glieder in (11) einen Beitrag, für die $\mathfrak{g}'=(0,0,\ldots,0,g)$ ist. Dann ist $U_1=E$ eine zulässige Wahl. Nach Umschreibung auf die Koordinaten (14) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1\cdots\int f(Y)d\mathfrak{x}_1&=a_0(V_1)+b_0(V_1)|V_1|^{-\frac{1}{2}}v^{-q}\\&\quad+u^{-q-\frac{1}{2}}\sum_{g\neq0}|V_2|^{-\frac{1}{2}}\alpha_g(V_2)|g|^{-q}y^{\frac{1}{2}}K_q(2\pi|g|y)e^{2\pi igx}.\end{aligned} \tag{64}$$

Wendet man (63) sinngemäß auf a_0, b_0 an Stelle von f an, so erhält man

$$\int_0^1 \cdots \int a_0(V_1)\,d\mathfrak{x}_2 = a_0'(V_2) + b_0'(V_2)\,|V_2|^{-\frac{1}{2}} w^{-q-\frac{1}{2}}, \tag{65}$$

$$\int_0^1 \cdots \int b_0(V_1)\,d\mathfrak{x}_2 = a_0''(V_2) + b_0''(V_2)\,|V_2|^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}-q} \tag{66}$$

mit gewissen Funktionen a_0', b_0', a_0'', b_0''. Die Integration von (64) über $\mathfrak{x}_2$ liefert daher wegen $|V| = wv = u^2$:

$$f_{V_2}(V) = a_0'(V_2) + \varphi(z,\bar{z})\,|V|^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}+q} + b_0''(V_2)\,|V_2|^{-1}|V|^{-q} \tag{67}$$

mit

$$\varphi(z,\bar{z}) = b_0'(V_2)\,|V_2|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}+q} + a_0''(V_2)\,|V_2|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-q}$$

$$+ \sum_{g \neq 0} |V_2|^{-\frac{1}{2}} \alpha_g(V_2)\,|g|^{-q} y^{\frac{1}{2}} K_q(2\pi|g|y)\, e^{2\pi i g x}. \tag{68}$$

Diese Reihenentwicklung impliziert

$$\left\{ y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - (q+\tfrac{1}{2})(q-\tfrac{1}{2}) \right\} \varphi = 0. \tag{69}$$

Die Invarianz von φ gegenüber den Modultransformationen, dargestellt in (19), ist eine Folge der Invarianz von f_{V_2} gegenüber unimodularen Transformationen. Man vergleiche hierzu die Ausführungen in [3], S. 63–64. φ erweist sich damit als reell-analytische „Wellenfunktion" zur Modulgruppe im Sinne von [2].

Unter der Voraussetzung $a_0 = 0$ werden wir nun $f \in \mathfrak{L}_n^{(n)}(s)$ beweisen. Zunächst folgt $b_0' = 0$. Wegen $q - \frac{1}{2} > 0$ ist φ dann im Fundamentalbereich der Modulgruppe, folglich auch in der oberen Halbebene $y > 0$ beschränkt: $|\varphi(z,\bar{z})| < C$. Der g-te Fourierkoeffizient von φ ist daher auch durch C abgeschätzt:

$$|V_2|^{-\frac{1}{2}} |\alpha_g(V_2)|\; |g|^{-q} y^{\frac{1}{2}} K_q(2\pi|g|y) \leqq C.$$

Auf Grund des singulären Verhaltens der Besselfunktion:

$$K_q(y) \sim 2^{q-1}\Gamma(q)\,y^{-q} \quad \text{für} \quad y \to 0$$

ist nun $\alpha_g = 0$ für alle $g \neq 0$ zu schließen. f ist also von der Form

$$f(Y) = b_0(V_1)\,|V_1|^{-\frac{1}{2}} v^{-q} = c(V_1)\,|Y|^{-q}.$$

Wegen der Invarianz gegenüber unimodularen Transformationen ist c notwendig konstant, also $f \in \mathfrak{L}_n^{(n)}(s)$, q.e.d.

Durch $f(Y) \to a_0(V_1)$ wird eine eindeutige injektive Abbildung $\mathfrak{L}_n(s)/\mathfrak{L}_n^{(n)}(s) \to \mathfrak{L}_{n-1}(s)$ definiert. Die Eindeutigkeit liegt auf der Hand; denn wenn

$f \equiv \tilde{f} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{L}_n^{(n)}(s))$, so unterscheiden sich f und $\tilde{f}$ höchstens in der b_0-Komponente. Ist andererseits $a_0 = 0$, so ist $f \in \mathfrak{L}_n^{(n)}(s)$, wie soeben gezeigt wurde.

$$\dim \mathfrak{L}_n^{(n)}(s) = 1 \quad \text{und} \quad \dim(\mathfrak{L}_n(s)/\mathfrak{L}_n^{(n)}(s)) \leqq \dim \mathfrak{L}_{n-1}(s)$$

ergeben mit vollständiger Induktion die gewünschte Ungleichung $\dim \mathfrak{L}_n(s) \leqq n+1$. Damit sinde alle Behauptungen bewiesen.

Literatur

1. Koecher, M.: Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. J. Reine Angew. Math. **192**, 1–23 (1953)
2. Maaß, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **121**, 141–183 (1949)
3. Maaß, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen. Math. Ann. **126**, 44–68 (1953)
4. Maaß, H.: Lectures on modular functions of one complex variable. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1964
5. Maaß, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series. Lecture Notes in Mathematics 216. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971

Eingegangen am 8. Februar 1982