

Harmonische Formen in einer Matrixvariablen

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung und Resultate

Bekanntlich (s. [2], Theorem 4) lassen sich Spitzenformen zur Siegelischen Modulgruppe n -ten Grades mit Hilfe von Thetareihen zu positiven geraden quadratischen Formen der Determinante 1 in m Variablen konstruieren, indem man die Glieder der Reihe mit geeigneten Werten einer komplexwertigen, im landläufigen Sinne harmonischen Form $u(X)$ der Matrixvariablen $X = X^{(m,n)} = (x_{\mu\nu})$ multipliziert. Durch Einführung des Begriffs der vektorwertigen harmonischen Form hat E. Freitag diesen Ansatz auf vektorwertige Modulformen weitgehend verallgemeinert; eine Publikation ist vorgesehen. Jedenfalls sind damit die komplexwertigen harmonischen Formen erneut ins Blickfeld der Modulfunktionäre gerückt. Soviele zur Rechtfertigung der vorliegenden Note, in der ich unter Berücksichtigung einer höchst bemerkenswerten Arbeit von Hoppe [1] eigene Betrachtungen, die ich vor mehr als zwanzig Jahren angestellt habe, in größerer Allgemeinheit ausführe.

Es bezeichne $F_k(m, n)$ den linearen Raum der Polynome $u(X)$, die der Homogenitätsbedingung

$$u(XV) = |V|^k u(X) \quad \text{für } V = V^{(n)} \quad \text{und ganzes gegebenes } k \geq 0 \quad (1)$$

genügen. $u \in F_k(m, n)$ soll (abweichend von [3, 4]) harmonisch genannt werden, wenn u der Differentialgleichung $\Delta u(X) = 0$ genügt. Dabei ist $\Delta = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial X'}, \frac{\partial}{\partial X} \right)$ der Laplacesche Differentialoperator in den mn Variablen $x_{\mu\nu}$, $X' = (x_{\nu\mu})$, $\frac{\partial}{\partial X} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu\nu}} \right)$ und σ das Zeichen für die Spurbildung.

$$H_k(m, n) = \{u \in F_k(m, n) \mid \Delta u = 0\} \quad (2)$$

stellt also den Raum aller harmonischen Formen in $F_k(m, n)$ dar.

Der triviale Fall $k=0$ ist ohne Interesse. Wir setzen daher $k>0$ voraus. Im übrigen ist dann, wie man leicht sieht, $\dim F_k(m, n) = 0$, sofern $m < n$ ist, so daß wir

uns auf die Betrachtung des Falles $m \geq n$ beschränken können. Auch $m = n$ ist nicht sonderlich interessant, weil $F_k(m, m) = \{c|x|^k | c \in \mathbb{C}\}$ und

$$\dim H_k(m, m) = \begin{cases} 1 & \text{für } k=0, 1, \\ 0 & \text{für } k > 1 \end{cases} \quad (3)$$

ist, wie man aus

$$\Delta |X|^k = k(k-1)|X|^{k-2} \sigma((X'X)^{-1}) \quad (m=n)$$

ersieht.

Im Fall $m > n$, der nun verbleibt, ist $F_k(m, n)$ in gewisser Weise der Graßmannschen Mannigfaltigkeit $G(m, n)$ der n -dimensionalen linearen Unterräume in \mathbb{R}^m zugeordnet. Obgleich $G(m, n)$ durch Übergang zu orthogonalen Komplementen bijektiv auf $G(m, m-n)$ bezogen werden kann, scheint es zwischen $H_k(m, n)$ und $H_k(m, m-n)$ keine Relation zu geben. Dies macht

$$\dim H_k(m, m-1) = \begin{cases} m & \text{für } k=1, \\ 0 & \text{für } k > 1 \end{cases} \quad (m > 2) \quad (4)$$

deutlich, während bekanntlich

$$\dim H_k(m, 1) = \frac{(m+k-3)!}{(m-2)!k!} (m+2k-2) \quad \text{für } k \geq 0 \quad (m \geq 2) \quad (5)$$

ist. Bezeichnen wir mit u^* die Gauß-Transformierte von u , definiert durch

$$u^*(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u(X+T) e^{-\pi \sigma(T'T)} [dT], \quad T=(t_{\mu\nu}), \quad [dT] = \prod_{\mu, \nu} dt_{\mu\nu}, \quad (6)$$

so gelten, wie in [2] ausgeführt wurde, unter der Voraussetzung $u \in F_k(m, n)$ jedenfalls die Äquivalenzen

$$\Delta u(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} u(X) = 0 \Leftrightarrow u^* = u \quad (m \geq n). \quad (7)$$

Die folgenden Überlegungen erfordern die Voraussetzung $m \geq 2n$; sie erlaubt die Anwendung der Hoppeschen Theorie [1]. Der Fall $m > n > m-n$ bleibt somit unerledigt. Es erscheint angezeigt, den Hoppeschen Zerlegungssatz ausführlich zu beschreiben; er stellt das Hauptergebnis von [1] dar. Wir bezeichnen mit \mathfrak{R} die Algebra der gegenüber den Transformationen $X \rightarrow UXV$ ($U'U = E =$ Einheitsmatrix, $|V| \neq 0$) invarianten Differentialoperatoren. Sie wird von den Operatoren

$$\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right), \quad \sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^h \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

ebenso auch von

$$\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right), \quad \sigma(A^{2h}) \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad \text{mit } A = X \frac{\partial}{\partial X'} - \left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)' \quad (9)$$

erzeugt. Mit einer beliebigen aber fest gewählten komplexen Matrix $L = L^{(m,n)}$, die den Bedingungen $L'L = 0$, $L'\bar{L} > 0$ genügt ($m \geq 2n$ garantiert die Existenz), bilden wir

$$Y = L'X(X'X)^{-1}X'L = \begin{pmatrix} Y_r & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Y_r = Y_r^{(r)} \quad (Y_0 = 1). \tag{10}$$

Weiter sei I_k die Menge aller Systeme nicht-negativer Zahlen k_0, k_1, \dots, k_n mit der Eigenschaft

$$k_r \equiv 0 \pmod{1} \quad \text{für } r < n, \quad k_n \equiv \frac{k}{2} \pmod{1}, \quad \sum_{r=0}^n k_r = \frac{k}{2}. \tag{11}$$

Dann sind

$$u_{\mathfrak{f}}(X) = |X'X|^{k/2} \prod_{r=0}^n |Y_r|^{k_r} \in F_k(m, n), \quad \mathfrak{f} \in I_k \tag{12}$$

Eigenformen von \mathfrak{R} , deren Bildungsgesetz an die Selbergschen Eisensteinreihen zur Gruppe $SL(n, \mathbb{R})$ erinnert. Das Hauptergebnis von [1] können wir nun zusammenfassen in dem

Zerlegungssatz von Hoppe. *Es bezeichne $E_{\mathfrak{f}}(m, n)$ die lineare Hülle aller Formen $u_{\mathfrak{f}}(UX)$ mit $U'U = E$. Dann ist*

$$F_k(m, n) = \bigoplus_{\mathfrak{f} \in I_k} E_{\mathfrak{f}}(m, n) \quad (m \geq 2n) \tag{13}$$

die direkte Zerlegung in paarweise orthogonale Eigenräume von \mathfrak{R} . Zu jedem $\mathfrak{f} \in I_k$ gehört ein umkehrbar eindeutig bestimmtes System nicht-negativer Eigenwerte $\lambda_h(\mathfrak{f})$ ($h = 1, 2, \dots, n$), so daß $u \in E_{\mathfrak{f}}(m, n)$ mit

$$u \in F_k(m, n), \quad \sigma(A^{2h})u = \lambda_h(\mathfrak{f})u \quad (h = 1, 2, \dots, n) \tag{14}$$

gleichwertig ist und jede Eigenform $u \in F_k(m, n)$ von \mathfrak{R} in genau einem Eigenraum $E_{\mathfrak{f}}(m, n)$ liegt.

Der Orthogonalitätsaussage liegt die in [3] eingeführte positive hermitesche Metrik zugrunde. Wir führen noch die Eigenwerte bezüglich der Basis (8) ein:

$$\sigma \left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right)^h u_{\mathfrak{f}}(X) = \mu_h(\mathfrak{f})u_{\mathfrak{f}}(X) \quad (h = 1, 2, \dots, n). \tag{15}$$

Umfangreiche Rechnungen, die sich wesentlich auf Operatorenidentitäten in [1] stützen, ergeben

Satz 1. *Für $\mathfrak{f} \in I_k$ ist*

1. $\lambda_1(\mathfrak{f}) = 4 \sum_{r=1}^n r(m-1-r)k_r + 8 \sum_{h=1}^n \left(\sum_{r=h}^n k_r \right)^2$,
2. $\lambda_1(\mathfrak{f}) + 2\mu_1(\mathfrak{f}) = \lambda_1(\mathfrak{f}_0) = 2nk(k+m-n-1)$ mit $\mathfrak{f}_0 = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{k}{2} \right)$,
3. $\lambda_1(\mathfrak{f}) \leq \lambda_1(\mathfrak{f}_0)$. Das Gleichheitszeichen gilt hier genau dann, wenn $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$ ist.

Jede Form $u \in H_k(m, n)$ ist gemäß (7) Eigenform von \mathfrak{R} , da $\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^h u(X) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$) ist. Wenn demnach $\sigma(A^{2h})u = \lambda_h u$ ($h = 1, 2, \dots, n$) gilt, so ist $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ von u unabhängig. Für ein gewisses $\mathfrak{f} \in I_k$ ist also $\lambda_h = \lambda_h(\mathfrak{f})$ ($h = 1, 2, \dots, n$), mithin $H_k(m, n) \subset E_{\mathfrak{f}}(m, n)$. Ersichtlich ist $\mu_k(\mathfrak{f}) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$). Satz 1 gestattet nun $\lambda_1(\mathfrak{f}) = \lambda_1(\mathfrak{f}_0)$, d. h. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$ zu schließen. Bekanntlich (s. [2]) ist $E_{\mathfrak{f}_0}(m, n) \subset H_{\mathfrak{f}_0}(m, n)$. Damit ist $H_{\mathfrak{f}}(m, n) = E_{\mathfrak{f}_0}(m, n)$ bewiesen. Etwas ausführlicher besagt dies

Satz 2. Im Fall $m \geq 2n$ ist $H_k(m, n)$ die lineare Hülle der Formen $|L'X|^k$ mit beliebigen Lösungen L von $L'L = 0$, $L'L > 0$.

Mit diesen Ergebnissen erhalten wir unmittelbar eine Reihe neuer Möglichkeiten, harmonische Formen zu kennzeichnen. Wir fassen zusammen:

Satz 3. Unter der Voraussetzung $m \geq 2n$ sind für eine Form $u \in F_k(m, n)$ folgende Aussagen paarweise äquivalent.

1. u ist harmonisch, so daß gemäß Definition $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)u(X) = 0$,
2. $\frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} u(X) = 0$,
3. $\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)u(X) = 0$,
4. $\sigma(A^2)u(X) = 2nk(k + m - n - 1)u(X)$,
5. $u^*(X) = u(X)$,
6. u ist orthogonal zu allen Eigenformen $v \in F_k(m, n)$ des Operators $\sigma(A^2) : \sigma(A^2)v = \lambda_1 v$ mit $\lambda_1 < 2nk(k + m - n - 1)$.

Daß der Eigenraum $H_k(m, n)$ mit $E_{\mathfrak{f}_0}(m, n)$ identisch und $\lambda_1(\mathfrak{f}) < \lambda_1(\mathfrak{f}_0)$ für alle von \mathfrak{f}_0 verschiedenen $\mathfrak{f} \in I_k$ ist, habe ich für $n = 2$ auf anderem Wege in [3] bewiesen. Auf $H_1(m, n) = F_1(m, n)$ ($m \geq n$) sei noch besonders hingewiesen. Demzufolge ist $|L'X|$ ($m \geq n$) mit beliebigem L harmonisch.

Die unvermeidbaren Rechnungen

Zum Beweis der Dimensionsformel (4) beachten wir, daß jede Form $u(X) \in F_k(m, m-1)$ als homogenes Polynom vom Grad k in den Plücker'schen Koordinaten $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ von X geschrieben werden kann: $u(X) = f(\eta)$. Die in [3] bewiesene Formel

$$\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)u(X) = \left\{ q\Delta_0 + (m-2) \left(\sum_{v=1}^m \eta_v \frac{\partial}{\partial \eta_v} \right)^2 - (m-2) \sum_{v=1}^m \eta_v \frac{\partial}{\partial \eta_v} \right\} f(\eta), \quad (16)$$

wobei zur Abkürzung

$$q = \sum_{v=1}^m \eta_v^2, \quad \Delta_0 = \sum_{v=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \eta_v^2}$$

gesetzt ist, erlaubt uns festzustellen, wann $u \neq 0$ harmonisch ist. Notwendig dafür ist wegen (7) jedenfalls, daß die linke Seite von (16) verschwindet. Es sei q^h die größte Potenz von q , welche f teilt. Der Ansatz $f = q^h g$ ergibt

$$q \Delta_0 f = q^h \{ (4h(h-1) + 2hm + 4h(k-2h))g + q \Delta_0 g \}.$$

Aus $u \in H_k(m, m-1)$, $u \neq 0$ folgt daher

$$\{ 4h(h-1) + 2hm + 4h(k-2h) + (m-2)k(k-1) \} g + q \Delta_0 g = 0.$$

Wegen $q \nmid g$ verschwindet die geschweifte Klammer, in der keine negativen Summanden auftreten. $m > 2$ zieht also $k \leq 1$ nach sich. Im Falle $k=1$ ist $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ eine Basis von $H_1(m, m-1)$. Damit ist (4) bewiesen.

Der Beweis von Satz 1 gestaltet sich umfangreicher. Zunächst führen wir eine Reihe von Bezeichnungen ein:

$$k_r = s_r - s_{r+1} - \frac{1}{2} \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad s_{n+1} = -\frac{n+1}{4}$$

$$Y = Y^{(n)} = Y' = (y_{\mu\nu}), \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \right),$$

$$e_{\mu\mu} = 1, \quad e_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \quad \text{für } \mu \neq \nu, \tag{17}$$

$$f_s(Y) = \prod_{r=1}^n |Y_r|^{k_r}, \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad Y = \begin{pmatrix} Y_r & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Y_r = Y_r^{(r)}.$$

Bekanntlich ist $f_s(Y)$ Eigenfunktion aller Operatoren $\sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^h$; d. h. mit gewissen $v_h(s)$ ist

$$\sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^h f_s(Y) = v_h(s) f_s(Y) \quad (h=1, 2, \dots, n). \tag{18}$$

Eine in [5, S. 74] angegebene Rekursionsformel ermöglicht es, die Eigenwerte $v_h(s)$ für $h=1, 2$ durch Induktion nach n rasch zu berechnen. Man erhält

$$v_1(s) = s_1 + s_2 + \dots + s_n,$$

$$v_2(s) = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2 - \frac{1}{48}(n-1)n(n+1). \tag{19}$$

Die Umschreibung auf k_1, k_2, \dots, k_n mit Hilfe von

$$s_h = k_h + \dots + k_n + \frac{1}{4}(n+1-2h) \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

ergibt

$$v_1(s) = \sum_{r=1}^n r k_r,$$

$$v_2(s) = \sum_{h=1}^n \left\{ \left(\frac{n+1}{2} - h \right) \sum_{r=h}^n k_r + \left(\sum_{r=h}^n k_r \right)^2 \right\}. \tag{20}$$

Wir betrachten im folgenden die Matrix Y in Abhängigkeit von X gemäß den Angaben des Zerlegungssatzes von Hoppe und setzen $W=X'X$. Dann ist

$$u_f(X) = |W|^{k/2} f_s(Y) \quad \text{für } f \in I_k$$

und nach [1, S. 57, (30)]

$$\begin{aligned} \sigma \left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right) f_s(Y) &= - \left\{ 4\sigma \left(\frac{\partial}{\partial Y} Y \right)^2 + 2m\sigma \left(\frac{\partial}{\partial Y} Y \right) \right\} f_s(Y) \\ &= -2 \left\{ 2\sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 + (m-n-1)\sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right) \right\} f_s(Y) \\ &= -2 \{ 2v_2(s) + (m-n-1)v_1(s) \} f_s(Y). \end{aligned} \quad (21)$$

Die Unterstreichung einer Matrix zeigt an, daß sie bei nachfolgenden Differentialoperationen als konstant anzusehen ist. Die Operatorenidentität

$$\begin{aligned} \Omega_k &:= |W|^{-k/2} W \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} |W|^{k/2} \\ &= k(k+m-n-1)E + k \left\{ X' \frac{\partial}{\partial X} + W \left(W^{-1} X' \frac{\partial}{\partial X} \right)' \right\} + \Omega_0 \end{aligned} \quad (22)$$

ist im wesentlichen eine Folge der Vertauschungsregel

$$\frac{\partial}{\partial X} |W|^{k/2} = |W|^{k/2} \left(\frac{\partial}{\partial X} + kXW^{-1} \right),$$

die man leicht bestätigt, wenn man beachtet, daß $\frac{\partial}{\partial X}$ und $2X \frac{\partial}{\partial W}$ auf Funktionen von $W=X'X$ dieselbe Wirkung haben. Demnach ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} |W|^{k/2} &= |W|^{k/2} \left(\frac{\partial}{\partial X'} + kW^{-1}X' \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} + kXW^{-1} \right) \\ &= |W|^{k/2} \left(\frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} + kW^{-1}X' \frac{\partial}{\partial X} + k \frac{\partial}{\partial X'} XW^{-1} + k^2 W^{-1} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\partial}{\partial X'} X = mE + \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right)', \quad \left(W \frac{\partial}{\partial W} \right)' = -\hat{W} \frac{\partial}{\partial \hat{W}} \quad \text{für } \hat{W} = W^{-1}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial X'} X' W^{-1} = mW^{-1} + \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right)' W^{-1} = (m-n-1)W^{-1} + \left(W^{-1} X' \frac{\partial}{\partial X} \right)'$$

und damit schließlich (22). Wir wenden (22) auf $f_s(Y)$ an. Spurbildung und Multiplikation mit $|W|^{k/2}$ ergibt unter Berücksichtigung von $\sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) f_s(Y) = 0$

und (21)

$$\begin{aligned} \sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right) u_t(X) &= \mu_1(\mathbb{f}) u_t(X) \\ &= nk(k+m-n-1)u_t(X) - 2\{2v_2(s) + (m-n-1)v_1(s)\}u_t(X), \end{aligned}$$

also

$$\mu_1(\mathbb{f}) = nk(k+m-n-1) - 4v_2(s) - 2(m-n-1)v_1(s). \tag{23}$$

Eine Beziehung zwischen $\lambda_1(\mathbb{f})$ und $\mu_1(\mathbb{f})$ vermittelt die Formel

$$\sigma(A^2)u_t(X) = 2nk(k+m-n-1)u_t(X) - 2\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)u_t(X). \tag{24}$$

Sie ergibt sich aus der Identität

$$\sigma(A^2) = 2\sigma\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)^2 - 2\sigma\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)'\right)$$

mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \sigma\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)^2 &= \sigma\left(X \frac{\partial}{\partial X'} X \frac{\partial}{\partial X'}\right) + m\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &= \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X} X' \frac{\partial}{\partial X}\right) + m\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &= \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + (m-n)\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial X'}\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)' = \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} X' + \frac{\partial}{\partial X'}$$

sowie der Tatsache, daß nach [2, S. 125] für Funktionen $u(X)$, die sich als Funktionen der Plückerschen Koordinaten von X schreiben lassen,

$$X' \frac{\partial}{\partial X} u(X) = \frac{1}{n} \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) u(X) E$$

ist. Der hiermit bewiesenen Beziehung (24) entnehmen wir

$$\lambda_1(\mathbb{f}) = 2nk(k+m-n-1) - 2\mu_1(\mathbb{f}). \tag{25}$$

Wird $\mu_1(\mathbb{f})$ mittels (23) eliminiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbb{f}) &= 8v_2(s) + 4(m-n-1)v_1(s) \\ &= 4 \sum_{r=1}^n r(m-r-1)k_r + 8 \sum_{h=1}^n \left(\sum_{r=h}^n k_r\right)^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Damit sind die ersten beiden Aussagen von Satz 1 bewiesen. Schließlich ist für $\mathfrak{f} \in I_k$ auch

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\mathfrak{f}_0) - \lambda_1(\mathfrak{f}) &= 4n(m-n-1)\frac{k}{2} + 8n\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \lambda_1(\mathfrak{f}) \\
 &= 4 \sum_{r=0}^n n(m-n-1)k_r - 4 \sum_{r=1}^n r(m-r-1)k_r \\
 &\quad + 8 \sum_{h=1}^n \left(\sum_{r=0}^n k_r \right)^2 - 8 \sum_{h=1}^n \left(\sum_{r=h}^n k_r \right)^2 \\
 &= 4 \sum_{r=0}^n (n-r)(m-n-r-1)k_r \\
 &\quad + 8 \sum_{h=1}^n (k_0 + \dots + k_{h-1}) \left(\frac{k}{2} + k_h + \dots + k_n \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt ersichtlich genau dann, wenn $k_0 = \dots = k_{n-1} = 0$, also $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$ ist. Damit ist der Beweis von Satz 1 erbracht. Nach dem, was vorausging, erfordern Satz 2 und Satz 3 keine besonderen Begründungen mehr.

Literatur

1. Hoppe, K.: Über die spektrale Zerlegung der algebraischen Formen auf der Graßmann-Mannigfaltigkeit. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-naturwiss. Klasse 1971, 7. Abh., 60 S.
2. Maaß, H.: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian Math. Soc. **20**, 117–162 (1956)
3. Maaß, H.: Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen. Math. Ann. **135**, 391–416 (1958)
4. Maaß, H.: Zur Theorie der harmonischen Formen. Math. Ann. **137**, 142–149 (1959)
5. Maaß, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971

Eingegangen am 24. Mai 1980