Inventiones math. 60, 85 – 104 (1980)

Inventiones mathematicae

Über ein Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Die in [7] eingeführte und in [8] durch explizite Konstruktion vollständig bestimmte Spezialschar $\mathfrak{S}_k$ besteht aus gewissen Spitzenformen zur Siegelschen Modulgruppe Γ_2, zum Gewicht $k \equiv 0 \pmod 2$ und zum Multiplikatorsystem 1. Es erscheint nun angezeigt, auch die Frage nach der Spezialschar $\mathfrak{S}_k(v)$ der Spitzenformen

$$\chi(Z) = \sum_{N>0} a(N) \exp(\pi i \sigma(NZ)), \qquad N = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}, \; a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 2 \tag{1}$$

mit der Kennzeichnung

$$a(N) = \sum_{\substack{g/a,\, b,\, c \\ g>0}} g^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & b/2g \\ b/2g & ac/g^2 \end{pmatrix} \qquad \text{für } N > 0 \tag{2}$$

unter der Voraussetzung zu untersuchen, daß das Multiplikatorsystem von χ mit dem einzigen nicht-trivialen abelschen Charakter v von Γ_2 identisch ist. Das Zeichen v wird in dieser Bedeutung beibehalten ebenso wie σ als Spurzeichen. $\chi \in \mathfrak{S}_k(v)$ genügt also den Transformationsformeln

$$\chi(M\langle Z\rangle) = v(M)\,|CZ+D|^k\,\chi(Z), \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2. \tag{3}$$

Dabei ist $M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$. Die Multiplikatorwerte $v(M)$ sind gemäß [5] durch

$$v\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad v\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = (-1)^{b_1+b_2+b},$$
$$v\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} = (-1)^{(1+u_0+u_2)(1+u_1+u_3)+u_0 u_2} \tag{4}$$

0020-9910/80/0060/0085/$04.00

bestimmt. Hierin bezeichnet $B=\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{pmatrix}$ eine ganz symmetrische Matrix, $U = \begin{pmatrix} u_0 & u_3 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ eine unimodulare Matrix und E die zweireihige Einheitsmatrix. U' gehe aus U durch Transposition hervor. Mit dem Ansatz (1) tragen wir der Forderung

$$\chi(Z+B)=(-1)^{b_1+b_2+b}\,\chi(Z) \quad \text{für ganze } B=\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Rechnung.

Im folgenden bezeichne (G, g, m) den linearen Raum der automorphen Formen zur Gruppe G, zum Gewicht g und zum Multiplikatorsystem m. Ferner sei $(G, g, m)_0$ der Teilraum der Spitzenformen in (G, g, m). Ist $m=1$, so schreiben wir abkürzend $(G, g)=(G, g, 1)$ und $(G, g)_0=(G, g, 1)_0$. Die elliptische Modulgruppe werde mit Γ bezeichnet. Eine besondere Rolle spielt die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ bzw. $\Gamma_2(2)$ von Γ bzw. Γ_2 zur Stufe 2.

Das erste Ergebnis der folgenden Untersuchung ist ein Existenzsatz.

Satz 1.

$$\dim \mathfrak{S}_k(v)=\begin{cases}\dim(\Gamma, k-5) & \text{für } k\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 0 & \text{für } k\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases} \tag{6}$$

Insbesondere folgt hieraus, daß die Spitzenform $\chi_5=\sqrt{\chi_{10}}$ in $\mathfrak{S}_5(v)$ liegt, was in [6] andeutungsweise als Vermutung ausgesprochen ist. Wir setzen im folgenden $k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ voraus, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird.

Da $\Gamma_2(2)$ im Kern von v liegt, so hat es einen Sinn, die Operatorentheorie von Evdokimov [3] auf $\mathfrak{S}_k(v)$ anzuwenden. Eine Betrachtung, die an [1] anknüpft, ergibt

Satz 2. *$\mathfrak{S}_k(v)$ ist bezüglich der Heckeschen Operatoren $T(m)$, $m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ invariant und besitzt demgemäß eine Basis, die aus Eigenfunktionen der Heckeschen Operatoren besteht.*

Damit stellt sich die Frage nach der Funktionalgleichung des Eulerprodukts $Z_\chi(s)$ zu einer Eigenfunktion $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$. Das Ergebnis der angestellten Überlegungen ist

Satz 3. *Es sei $Z_\chi(s)$ das Eulerprodukt einer Eigenfunktion $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$ bezüglich der Heckeschen Operatoren $T(m)$, $m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$. Dann ist die durch*

$$(1-2^{k-1-s})(1-4^{k-2-s})\,\zeta(s+1-k)\,\zeta(s+2-k)\,D(s)=Z_\chi(s) \tag{7}$$

definierte Funktion $D(s)$ eine ganze, in jedem Streifen $\sigma_1\leqq \Re s\leqq\sigma_2$ beschränkte Funktion. Die Funktion

$$R_\chi(s)=\pi^{-2s}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+2-k)\,(1-4^{k-2-s})^{-1}\,Z_\chi(s) \tag{8}$$

genügt der Funktionalgleichung

$$R_\chi(2k-2-s)=2^{2(k-1-s)}\,R_\chi(s). \tag{9}$$

Die Herleitung dieses Satzes beruht ausschließlich auf der Anwendung eines Lemmas von Shimura [10, Lemma 3.3]. Auf die Möglichkeit einer solchen Beweisführung hat bereits Andrianov [1] hingewiesen. Es folgt unmittelbar

Satz 4. *Bildet man unter der Voraussetzung von Satz 3 die Funktion*

$$R(s)=(\sqrt{2}\,\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,D(s), \tag{10}$$

so gilt

$$R(2k-2-s)=R(s). \tag{11}$$

Jeder Eigenfunktion $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$ wird demgemäß eine Spitzenform $g\in(G(\sqrt{2}),2k-2)_0$ zugeordnet, wobei $G(\sqrt{2})$ die von $\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erzeugte Gruppe ist. g ist bestimmt durch

$$D(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,n^{-s}, \qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp(\sqrt{2}\,\pi i n z). \tag{12}$$

Wir setzen zweckmäßig $D(s)=D_g(s)$. Aus (7) geht hervor, daß $D_g(s)$ ein Eulerprodukt mit dem 2-Faktor $(1+2^{k-2-s})^{-1}$ im Heckeschen Sinne hat. Wie Bogo-Kuyk [2, Remark 2] ausgeführt haben, ist $g(z)$ daher Eigenfunktion aller Heckeschen Operatoren $T(2,m)$, $m\in\mathbb{N}$. Insbesondere stellt sich heraus, daß $T(2,2)\,g=-2^{k-1}g$ ist. Bezeichnet $\omega(p)$ den Eigenwert von g bezüglich $T(2,p)$, $p=$ Primzahl >2, so folgt nach [2]

$$D_g(s)=(1+2^{k-2-s})^{-1}\prod_{p>2}(1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s})^{-1}, \tag{13}$$

mithin

$$Z_\chi(s)=\prod_{p>2}\{(1-p^{k-1-s})(1-p^{k-2-s})(1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s})\}^{-1}. \tag{14}$$

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 5. *Besteht die Basis $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_r$ von $\mathfrak{S}_k(v)$ aus Eigenfunktionen der Heckeschen Operatoren, so wird durch*

$$\chi_\nu(Z)\to Z_{\chi_\nu}(s)\to D(s)=D_{g_\nu}(s)\to g_\nu(z)\quad(\nu=1,2,\dots,r)$$

eine lineare Abbildung von $\mathfrak{S}_k(v)$ in

$$\mathfrak{M}_{2k-2}=\{g\in(G(\sqrt{2}),2k-2)_0\,|\,T(2,2)\,g=-2^{k-1}g\} \tag{15}$$

definiert, welche Eulerprodukte in Eulerprodukte überführt. Im übrigen ist

$$\dim\mathfrak{S}_k(v)=\dim\mathfrak{M}_{2k-2}. \tag{16}$$

Das Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa besagt, daß die in Satz 5 genannte lineare Abbildung $\mathfrak{S}_k(v)\to\mathfrak{M}_{2k-2}$ eine Bijektion ist. Ein Beweis hierfür wäre gegeben, wenn aus $Z_{\chi_\mu}=Z_{\chi_\nu}$ folgen würde, daß χ_μ,χ_ν bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Im Fall $\dim \mathfrak{S}_k(v)=1$, also für $k=5,9,11,13,15$ ist das jedenfalls richtig. Es liegt hier eine mit [1] vergleichbare Situation vor.

Bemerkung. Den Beweis der Dimensionsformel (16) sowie eine neue Formulierung von Satz 5 in der Sprache der Atkin-Lehner-Theorie, die als Satz 5* am Ende der Arbeit steht, verdanke ich dem Referenten, Herrn Zagier, und Herrn Kohnen. Ich hatte nur die Ungleichung $\dim \mathfrak{M}_{2k-2} \leqq \dim \mathfrak{S}_k(v)$ bewiesen.

§ 1. Die Dimensionsformel

Wir beweisen Satz 1 und erledigen zunächst den Fall $k \equiv 0 \pmod 2$. Auf Grund der Transformationsformel (3) mit $M=\begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix} \in \Gamma_2$ folgt $a(N[U]) = v\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U'\end{pmatrix} |U|^k a(N)$ mit $N[U]=U'NU$. Speziell $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ergibt $a\left(N\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=-a(N)$. Wählt man $N=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{pmatrix}>0$ primitiv, so stimmen $a\left(N\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$ und $a(N)$ gemäß (2) mit $a\begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ b/2 & ac\end{pmatrix}$ überein, woraus $a(N)=0$ für alle primitiven $N>0$ und somit $\chi=0$ folgt.

Wir setzen fortan $k \equiv 1 \pmod 2$ voraus. Der Beweis von (6) basiert in diesem Fall auf der Entwicklung einer beliebigen Spitzenform $\chi \in (\Gamma_2, k, v)_0$ nach Jacobischen Funktionen:

$$\chi(Z)=\sum_m \theta_m(z_1, z)\exp(\pi i m z_2), \qquad Z=\begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Hinsichtlich der Summation verabreden wir allgemein, daß in $\sum\limits_{m,n,\ldots}$ die Zeichen $m, n, \ldots$ unabhängig voneinander alle positiven ungeraden Zahlen durchlaufen. Die Multiplikatorwerte (4) ergeben

$$\chi\begin{pmatrix} z_1 & z+h \\ z+h & z_2\end{pmatrix}=(-1)^h \chi\begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2\end{pmatrix},$$

$$\chi\left(Z\begin{bmatrix} 1 & g \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\chi\begin{pmatrix} z_1 & g z_1+z \\ g z_1+z & g^2 z_1+2gz+z_2\end{pmatrix}=(-1)^g \chi\begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2\end{pmatrix}$$

und damit

$$\theta_m(z_1, z+h)=(-1)^h \theta_m(z_1, z),$$

$$\theta_m(z_1, g z_1+z)\exp(\pi i m(g^2 z_1+2gz))=(-1)^g \theta_m(z_1, z).$$

Demzufolge ist

$$\theta_m(z_1, z)=\sum_{\substack{h \bmod 2m \\ h \equiv 1 \pmod 2}} c_{mh}(z_1) \cdot \sum_{g=-\infty}^{\infty} (-1)^g \exp\left(\pi i\left\{m\left(g+\frac{h}{2m}\right)^2 z_1+2m\left(g+\frac{h}{2m}\right) z\right\}\right),$$

speziell für $m=1$ also

$$\theta_1(z_1, z) = i\, c_1(z_1)\, \vartheta_{11}(z_1, z) \tag{18}$$

mit

$$\vartheta_{11}(z_1, z) = -i \sum_{g=-\infty}^{\infty} (-1)^g \exp\left(\frac{\pi i}{4}(2g+1)^2 z_1 + \pi i (2g+1) z\right). \tag{19}$$

Das Verhalten von θ_m gegenüber elliptischen Transformationen $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ resultiert aus der allgemeinen Transformationsformel (3), wenn man

$$M^* = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

an Stelle von M wählt. Mit dem durch $w(M_1) = v(M^*)$ definierten abelschen Charakter von Γ ergibt sich

$$\theta_m\left(M_1\langle z_1\rangle, \frac{z}{\gamma z_1 + \delta}\right) \exp\left(-\pi i m \frac{\gamma z^2}{\gamma z_1 + \delta}\right) = w(M_1)(\gamma z_1 + \delta)^k\, \theta_m(z_1, z). \tag{21}$$

Diese Transformationsformeln sind in ihrer Gesamtheit ($m \equiv 1 \pmod 2$, $m > 0$) gleichwertig mit (3) für $M = M^*$.

Bekanntlich ist

$$\vartheta_{11}\left(-\frac{1}{z_1}, \frac{z}{z_1}\right) \exp\left(-\pi i \frac{z^2}{z_1}\right) = -i\sqrt{-i z_1}\, \vartheta_{11}(z_1, z) \tag{22}$$

und, wie man sofort sieht,

$$\vartheta_{11}(z_1 + 1, z) = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \vartheta_{11}(z_1, z). \tag{23}$$

In der ersten Formel ist $\sqrt{-i z_1}$ für $z_i = i$ positiv zu wählen. Ferner ist

$$w\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}^3 \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $c_1(z_1)$ ergeben sich nach (18), (21), (22) und (23) die Transformationsformeln

$$c_1(z_1+1) = \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right) c_1(z_1), \quad c_1\left(-\frac{1}{z_1}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} (-i z_1)^{k-\frac{1}{2}}\, c_1(z_1). \tag{24}$$

Die Produktdarstellung von $\left.\frac{\partial}{\partial z} \vartheta_{11}(z_1, z)\right|_{z=0}$ zeigt, daß $c_1(z_1)$ in der oberen z_1-Halbebene holomorph ist. Im übrigen stellt man leicht fest, daß $c_1(z_1)$ für $\Im m\, z_1 \to \infty$ verschwindet. D.h. $c_1(z_1)$ ist eine ganze Modulform zur Gruppe Γ, zum Gewicht $k-\frac{1}{2}$ und einem gewissen Multiplikatorsystem. Auf Grund der bekannten Transformationseigenschaften der Dedekindschen Etafunktion ist nun

$$c_1=\eta^9\,\varphi \quad \text{mit } \varphi\in(\Gamma, k-5) \tag{25}$$

zu schließen. Der lineare Raum der möglichen Jacobischen Formen $\theta_1(z_1, z)$ hat also dieselbe Dimension wie $(\Gamma, k-5)$.

Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß zu jeder so bestimmten Jacobischen Form $\theta_1(z_1, z)$ genau eine Form $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$ gehört. In Analogie zu [7] ergibt sich für θ_m notwendig der Ansatz

$$\theta_m(z_1, z)=\theta_1|\,T(m)(z_1, \sqrt{m}\,z) \qquad \text{für } m\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2). \tag{26}$$

Durchläuft S ein Vertretersystem der Linksrestklassen in der Zerlegung

$$\bigcup_S \Gamma S=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\, a, b, c, d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=m\right\},\quad S\equiv E\,(\mathrm{mod}\, 2),$$

so wird der Heckesche Operator $T(m)$ durch

$$\theta_1|\,T(m)=m^{k-1}\sum_S \theta_1|S$$

erklärt. Allgemein ist dabei

$$\theta|S(z_1, z)=\theta\left(S\langle z_1\rangle, \frac{\sqrt{m}\,z}{c z_1+d}\right)(c z_1+d)^{-k}\exp\left(-\pi i\frac{c z^2}{c z_1+d}\right)$$

für reelle Substitutionen $S=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ mit $ad-bc=m>0$. Die Kongruenzen $S\equiv E\,(\mathrm{mod}\, 2)$ sind für das genannte Vertretersystem zu erfüllen, da $m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 2)$ ist. Da $\Gamma_2(2)$ zum Kern von v, also $\Gamma(2)$ zum Kern von w gehört, ist θ_m durch (26) jedenfalls eindeutig bestimmt.

Wir bestätigen die Gültigkeit der Relationen (21) unter Berücksichtigung von $(\theta|S)|\tilde{S}=\theta|(S\tilde{S})$ für beliebige $S, \tilde{S}$:

$$\begin{aligned}
&\theta_m\left(M_1\langle z_1\rangle, \frac{z}{\gamma z_1+\delta}\right)\exp\left(-\pi i m\frac{\gamma z^2}{\gamma z_1+\delta}\right)\\
&\quad=\theta_1|\,T(m)\left(M_1\langle z_1\rangle, \frac{\sqrt{m}\,z}{\gamma z_1+\delta}\right)\exp\left(-\pi i\frac{\gamma(\sqrt{m}\,z)^2}{\gamma z_1+\delta}\right)\\
&\quad=m^{k-1}\sum_S \theta_1|S\left(M_1\langle z_1\rangle, \frac{\sqrt{m}\,z}{\gamma z_1+\delta}\right)\exp\left(-\pi i\frac{\gamma(\sqrt{m}\,z)^2}{\gamma z_1+\delta}\right)\\
&\quad=(\gamma z_1+\delta)^k m^{k-1}\sum_S (\theta_1|S)|\,M_1(z_1, \sqrt{m}\,z)\\
&\quad=(\gamma z_1+\delta)^k m^{k-1}\sum_S \theta_1|(S M_1)(z_1, \sqrt{m}\,z)=w(M_1)(\gamma z_1+\delta)^k\,\theta_m(z_1, z).
\end{aligned}$$

Mit einer durch M_1 bestimmten Permutation $S \to \tilde{S}$ des Vertretersystems ist nämlich $\tilde{M}_1 \tilde{S} = S M_1$ mit geeigneten Transformationen $\tilde{M}_1 \in \Gamma$, die jeweils von S abhängen. Wegen $\tilde{M}_1 \equiv M_1 \pmod 2$ ist aber $w(\tilde{M}_1) = w(M_1)$ unabhängig von S. Damit ist (3) für $M = M^*$ bewiesen.

Gemäß Ansatz gestattet θ_1 eine Darstellung

$$\theta_1(z_1, z) = \sum_n \sum_{t \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \alpha(n, t) \exp(\pi i (n z_1 + t z)), \tag{27}$$

wobei $\alpha(n, t) = 0$ im Falle $t^2 \geqq 4n$ ist. Um die Wirkung von $T(m)$ für $m \equiv 1 \pmod 2$ auf θ_1 zu ermitteln, legen wir das spezielle Vertretersystem $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $ad = m$, $b \bmod d$ zugrunde. Analog zu [8] ergibt sich

$$\theta_m(z_1, z) = \sum_n \sum_{t \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \left\{ \sum_{\substack{a/m, n, t \\ a > 0}} a^{k-1} \alpha\left(\frac{mn}{a^2}, \frac{t}{a}\right) \right\} \exp(\pi i (n z_1 + t z)) \tag{28}$$

und damit die Symmetrie der Reihe (17) in z_1, z_2. Die Transformationsformel (3) ist daher auch für

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (M^* L)^2$$

an Stelle von M gültig. Speziell für $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird $(M^* L)^2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Da Γ_2 von $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ und den Translationen $\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$ (B symmetrisch und ganz) erzeugt wird, so ist χ also eine Spitzenform in $(\Gamma_2, k, v)_0$. Die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{S}_k(v)$ ist auf Grund von (28) wie in [8] zu erschließen. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Die Invarianz von $\mathfrak{S}_k(v)$ gegenüber Heckeschen Operatoren

Wir setzen

$$\tilde{a}(N) = (-1)^{\frac{b-1}{2}} a(N) \quad \text{für } N = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix},\ a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 2.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & ac \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ac - \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$(-1)^{\frac{b-1}{2}} a \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & ac \end{pmatrix} = \tilde{a} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & ac \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ac - \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Der mit dem angegebenen Vorzeichen versehene Koeffizient hängt also nur von $4ac-b^2$ ab. An Stelle von (2) tritt nun

$$\tilde{a}(N)=\sum_{\substack{g/a,b,c\\g>0}}\left(\frac{-4}{g}\right)g^{k-1}\,\tilde{a}\begin{pmatrix}1 & b/2g\\ b/2g & ac/g^2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix} \tag{30}$$

mit dem quadratischen Restsymbol $\left(\frac{-4}{g}\right)=(-1)^{\frac{g-1}{2}}$ für $g>0$ und hieraus wird ersichtlich, daß $\tilde{a}(N)$ durch $t=$g.g.T.(a,b,c) und $D=(4ac-b^2)\,t^{-2}$ eindeutig bestimmt ist. Wir bringen dies durch $\tilde{a}(N)=\tilde{a}_0(t,D)$ zum Ausdruck. Die Relationen (30) gehen über in

$$\tilde{a}_0(t,D)=\sum_{g/t,\,g>0}\left(\frac{-4}{g}\right)g^{k-1}\,\tilde{a}_0(1,Dt^2g^{-2}). \tag{31}$$

Damit ist der Anschluß an [1, § 1] hergestellt. Die dort angegebene Schlußweise zeigt, daß (31) mit den Identitäten

$$\left(1-\left(\frac{-4}{q}\right)q^{k-1}z\right)\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(q^n l,D)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(l,q^{2n}D)\,z^n \tag{32}$$

gleichwertig ist. Dabei ist l, $D\in\mathbb{N}$, $D\equiv 3 \pmod 8$ und q eine beliebige ungerade Primzahl, welche l nicht teilt.

Wir beweisen, daß die auf $(\Gamma_2(2),k)_0$ definierten Heckeschen Operatoren $T(m)$, $m\equiv 1 \pmod 2$ den Teilraum $\mathfrak{S}_k(v)\subset(\Gamma_2(2),k)_0$ invariant lassen. Wie in [3] festgestellt wurde, lassen sich die $T(m)$ aus den Operatoren $T(p)$ und $T'(p)=T(p)^2-T(p^2)$ erzeugen. p durchläuft hier alle ungeraden Primzahlen. Nach [3, Theorem 3.2] ist

$$T(p^n)\,\chi(Z)=\sum_{N\in\mathfrak{N}}a(p^n,N)\exp(\pi i\sigma(NZ))$$

mit

$$\mathfrak{N}=\left\{\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}>0\;\middle|\;a\equiv b\equiv c\equiv 1 \pmod 2\right\},$$

$$a(p^n,N)=\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=n\\ \alpha,\beta,\gamma\geqq 0}}p^{(k-2)\beta+(2k-3)\gamma}\,(\Delta^-(p^\gamma)\,\Pi(p^\beta)\,\Delta^+(p^\alpha)\,a)(N), \tag{33}$$

wobei $a(N)$ die Fourierkoeffizienten von $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$ sind und die auftretenden Operatoren folgende Bedeutung haben:

$$\Delta^+(p^\alpha)\,a(N)=a(p^\alpha N),\qquad \Delta^-(p^\gamma)\,a(N)=a(p^{-\gamma}N),$$

$$\pi(p^\beta)\,a(N)=\sum_U a\left(p^{-\beta}N\left[U\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^\beta\end{pmatrix}\right]\right).$$

U durchläuft hier ein volles System von Matrizen $\in\Gamma(2)$ mit mod p nicht assoziierten ersten Spalten. Im übrigen ist hier und im folgenden $a(N)=0$ zu setzen, falls $N\notin\mathfrak{N}$. Die Operatoren sind auf

$$A(h)=\{\psi\colon\ \mathfrak{N}\to\mathbb{C}\mid\psi(N[U])=\psi(N)\ \text{für}\ U\in\Gamma(h)\},\qquad h=1,2$$

erklärt. Sie bilden $A(2)$ ebenso wie den Teilraum $A(1)\subset A(2)$ in sich ab. Die Einführung eines weiteren Operators ε erweist sich als zweckmäßig:

$$\varepsilon\psi(N)=\varepsilon(N)\psi(N), \qquad \varepsilon(N)=(-1)^{\frac{b-1}{2}}, \qquad N=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\in\mathfrak{N}. \tag{34}$$

Man bestätigt die Richtigkeit der Vertauschungsregeln

$$\Delta^+(p^\alpha)\varepsilon=\left(\frac{-4}{p}\right)^\alpha \varepsilon\Delta^+(p^\alpha), \qquad \Delta^-(p^\gamma)\varepsilon=\left(\frac{-4}{p}\right)^\gamma \varepsilon\Delta^-(p^\gamma), \qquad \pi(p^\beta)\varepsilon=\varepsilon\pi(p^\beta). \tag{35}$$

Allgemein setzen wir $\tilde{\psi}=\varepsilon\psi$ für $\psi\in A(2)$. Es bleibt zu zeigen, daß die Koeffizienten $b(N)=a(p,N)$ und ebenso die von $T'(p)\chi$ – sie mögen mit $b'(N)$ bezeichnet werden – die Relationen (2) befriedigen.

Wir legen folgende Bezeichnung zugrunde:

$$N=tN_0\in\mathfrak{N}, N_0 \text{ primitiv}, |2N_0|=df^2, d \text{ quadratfrei}, t=p^n l, p\nmid l.$$

Nach (33) ist

$$b(N)=\Delta^+(p)\,a(N)+p^{k-2}\pi(p)\,a(N)+p^{2k-3}\Delta^-(p)\,a(N).$$

Beachtet man, daß $a=\varepsilon\tilde{a}$ ist, und berücksichtigt man (35), so ergibt sich mit $\kappa=\left(\frac{-4}{p}\right)$ die Beziehung

$$\tilde{b}(N)=\kappa\Delta^+(p)\,\tilde{a}(N)+p^{k-2}\pi(p)\,\tilde{a}(N)+\kappa p^{2k-3}\Delta^-(p)\,\tilde{a}(N).$$

Eine kurze Rechnung, analog zu [1, (13), (14)], führt auf

$$\begin{aligned}\tilde{b}(N)=\kappa\tilde{a}_0(pt,D)+\kappa p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^{-1}t,D)+p^{k-2}\nu(D)\,\tilde{a}_0(t,D)\\ +p^{k-2}(p+1-\nu(D))\,\tilde{a}_0(p^{-1}t,p^2D) \qquad \text{für } p\nmid f\end{aligned} \tag{36}$$

mit $\nu(D)=1+\left(\frac{-D}{p}\right)$ sowie

$$\begin{aligned}\tilde{b}(N)=\kappa\tilde{a}_0(pt,D)+\kappa p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^{-1}t,D)+p^{k-2}\tilde{a}_0(pt,p^{-2}D)\\ +p^{k-1}\tilde{a}_0(p^{-1}t,p^2D) \qquad \text{für } p/f.\end{aligned} \tag{37}$$

Jedenfalls hängt $\tilde{b}(N)$ nur von t und D ab, so daß wir nun $\tilde{b}(N)=\tilde{b}_0(t,D)$ setzen können. Die letzten beiden Relationen stellen sich jetzt in der Form

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0(p^nl,D)=\kappa\tilde{a}_0(p^{n+1}l,D)+\kappa p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^{n-1}l,D)+p^{k-2}\nu(D)\,\tilde{a}_0(p^nl,D)\\ +p^{k-2}(p+1-\nu(D))\,\tilde{a}_0(p^{n-1}l,p^2D) \qquad \text{für } p\nmid f,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0(p^nl,D)=\kappa\tilde{a}_0(p^{n+1}l,D)+\kappa p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^{n-1}l,D)+p^{k-2}\tilde{a}_0(p^{n+1}l,p^{-2}D)\\ +p^{k-1}\tilde{a}_0(p^{n-1}l,p^2D) \qquad \text{für } p/f\end{aligned} \tag{39}$$

dar. Es genügt also zu beweisen, daß die Identität (32) mit $\tilde{b}_0$ an Stelle von $\tilde{a}_0$ für alle Primzahlen $q>2$ erfüllt ist. Ist $q\neq p$, so folgt dies wie in [1, § 1], da $\tilde{b}_0$ in $\tilde{a}_0$ linear ist und (32) für $\tilde{a}_0$ gilt. Es bleibt der Fall $q=p$ zu untersuchen. Wird zur Abkürzung

$$\Sigma_1=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(p^n l, D)z^n \quad \text{und} \quad \Sigma_2=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(l, p^{2n}D)z^n$$

gesetzt, so ergibt sich für $p\nmid f$:

$$\begin{aligned}
&(1-\kappa p^{k-1}z)\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}_0(p^n l, D)z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}_0(l, p^{2n}D)z^n\\
&=(1-\kappa p^{k-1}z)\Big\{\frac{\kappa}{z}(\Sigma_1-\tilde{a}_0(l,D))+\kappa p^{2k-3}z\Sigma_1+p^{k-2}\nu(D)\Sigma_1\\
&\quad+p^{k-2}(p+1-\nu(D))z\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(p^n l, p^2 D)z^n\Big\}-\Big\{\kappa\tilde{a}_0(p\,l,D)\\
&\quad+p^{k-2}\nu(D)\,\tilde{a}_0(l,D)+\sum_{n=1}^{\infty}(\kappa\tilde{a}_0(p\,l,p^{2n}D)+p^{k-2}\tilde{a}_0(p\,l,p^{2n-2}D))z^n\Big\}\\
&=\Big(p^{k-1}-\frac{\kappa}{z}\Big)\tilde{a}_0(l,D)+\Big(\frac{\kappa}{z}+\kappa p^{2k-3}z+p^{k-2}\nu(D)\Big)\Sigma_2\\
&\quad+p^{k-2}(p+1-\nu(D))z\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(l,p^{2n+2}D)z^n\\
&\quad-\Big\{\kappa\tilde{a}_0(l,p^2D)+p^{k-1}\tilde{a}_0(l,D)\\
&\quad+p^{k-2}\nu(D)\,\tilde{a}_0(l,D)+\sum_{n=1}^{\infty}[\kappa\tilde{a}_0(l,p^{2n+2}D)+p^{k-1}\tilde{a}_0(l,p^{2n}D)\\
&\quad+p^{k-2}a_0(l,p^{2n}D)+\kappa p^{2k-3}\tilde{a}_0(l,p^{2n-2}D)]z^n\Big\}\\
&=\Big(p^{k-1}-\frac{\kappa}{z}\Big)\tilde{a}_0(l,D)+\Big(\frac{\kappa}{z}+\kappa p^{2k-3}z+p^{k-2}\nu(D)\Big)\Sigma_2\\
&\quad+p^{k-2}(p+1-\nu(D))(\Sigma_2-\tilde{a}_0(l,D))-\Big\{\kappa\tilde{a}_0(l,p^2D)+p^{k-1}\tilde{a}_0(l,D)\\
&\quad+p^{k-2}\nu(D)\,\tilde{a}_0(l,D)+\frac{\kappa}{z}(\Sigma_2-\tilde{a}_0(l,D)-\tilde{a}_0(l,p^2D)z)\\
&\quad+p^{k-1}(\Sigma_2-\tilde{a}_0(l,D))+p^{k-2}(\Sigma_2-\tilde{a}_0(l,D))+\kappa p^{2k-3}z\Sigma_2\Big\}=0.
\end{aligned}$$

Der Fall p/f erledigt sich in gleicher Weise. Daß auch $\tilde{b}'(N)=\tilde{b}'_0(t,D)$ an Stelle von $\tilde{a}_0(t,D)$ den Identitäten (32) genügt, beweist man analog. In die etwas längere aber ebenfalls elementare Rechnung gehen die Darstellungen (vgl. [1] § 1, (15), (16))

$$\begin{aligned}
\tilde{b}'_0(p^n l, D)&=p^{2k-4}\nu_p(N)\,\tilde{a}_0(p^n l,D)+p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^n l,D)\\
&\quad+\kappa p^{3k-5}\nu\tilde{a}_0(p^{n-1}l,D)+\kappa p^{3k-5}(p+1-\nu)\,\tilde{a}_0(p^{n-2}l,p^2D)\\
&\quad+\kappa p^{k-2}\nu\tilde{a}_0(p^{n+1}l,D)+\kappa p^{k-2}(p+1-\nu)\,\tilde{a}_0(p^n l,p^2D) \qquad \text{für } p\nmid f
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0'(p^n l, D) &= p^{2k-4} v_p(N)\,\tilde{a}_0(p^n l, D) + p^{2k-3}\tilde{a}_0(p^n l, D)\\ &+\kappa p^{3k-5}\tilde{a}_0(p^n l, p^{-2}D) + \kappa p^{3k-4}\tilde{a}_0(p^{n-2} l, p^2 D)\\ &+\kappa p^{k-2}\tilde{a}_0(p^{n+2} l, p^{-2}D) + \kappa p^{k-1}\tilde{a}_0(p^n l, p^2 D) \qquad \text{für } p/f\end{aligned}$$

ein. Hierin ist $v = v(D) = 1 + \left(\frac{-D}{p}\right)$ und $v_p(N) = p+1$ bzw. v für $n>0$ bzw. $n=0$. Satz 2 kann damit als bewiesen gelten.

§ 3. Funktionalgleichungen

Bei den Beweisen der eingangs formulierten Sätze 3 und 4, die in diesem Paragraphen behandelt werden, wird von den Ergebnissen der Untersuchungen [1, 3, 10] weitgehend Gebrauch gemacht. Die auszuführenden Rechnungen sind bei Kenntnis der zitierten Arbeiten ohne Mühe zu verfolgen. Wir setzen im folgenden voraus, daß die Form $\chi \in \mathfrak{S}_k(v)$ Eigenfunktion der Heckeschen Operatoren $T(m)$, $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ist.

Trägt man die Reihenentwicklung (19) von $\vartheta_{11}(z_1, z)$ und

$$c_1(z_1) = \sum_n \gamma(n-\tfrac{1}{4}) \exp(\pi i (n-\tfrac{1}{4}) z_1) \tag{40}$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten $\gamma(n-\frac{1}{4})$ in (18) ein, so ergibt ein Vergleich mit

$$\theta_1(z_1, z) = \sum_{\substack{b, n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)\\ 4n - b^2 > 0}} a\begin{pmatrix} 1 & b/2\\ b/2 & n\end{pmatrix} \exp(\pi i (n z_1 + b z))$$

die wichtigen Beziehungen

$$\gamma(n-\tfrac{1}{4}) = a\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & n\end{pmatrix} \qquad \text{für } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2),\ n>0. \tag{41}$$

Wir wählen c minimal so, daß $\gamma(c-\frac{1}{4}) \neq 0$ wird und setzen $D = 4c-1$, $D = df^2$ mit quadratfreiem d. Ersichtlich ist $D \equiv d \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$, also $-d$ die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Das Legendresche Restsymbol $\left(\frac{x}{d}\right)$, das für $x>0$ mit $\left(\frac{-d}{x}\right)$ übereinstimmt, ist ein eigentlicher ungerader Charakter $\mathrm{mod}\, d$. Um $f=1$ zu beweisen, nehmen wir Bezug auf das Theorem 7.1 in [3]; demzufolge ist

$$(1-4^{k-2-s})\,\zeta_K(s+2-k) \sum_m a(m N_0) m^{-s} = a(N_0) Z_\chi(s) \tag{42}$$

mit $N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & (d+1)/4\end{pmatrix}$. $\zeta_K(s)$ bezeichnet die Zetafunktion von K und $Z_\chi(s)$ das Eulerprodukt zur Form χ. Die Relationen (2) gestatten die Zerlegung

$$\sum_m a(mN_0) m^{-s} = (1-2^{k-1-s})\,\zeta(s+1-k) \sum_m a\begin{pmatrix} 1 & m/2\\ m/2 & m^2(d+1)/4\end{pmatrix} m^{-s}. \tag{43}$$

Da

$$a\begin{pmatrix}1 & f/2\\ f/2 & f^2(d+1)/4\end{pmatrix}=(-1)^{\frac{f-1}{2}}a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & c\end{pmatrix}$$

ist, so würde $f>1$ wegen der Minimalforderung für c notwendig $a(N_0)=0$ und somit einen Widerspruch ergeben.

Mit der Bezeichnung $\frac{\partial}{\partial z}(\ )=(\ )'$ *ergibt sich zufolge* (18) *und* (21)

$$\theta_1'(z_1,0)=ic_1(z_1)\vartheta_{11}'(z_1,0)=2\pi ic_1(z_1)\eta^3(z_1)=2\pi i\eta^{12}(z_1)\varphi(z_1) \tag{44}$$

und

$$\theta_1'(M_1\langle z_1\rangle,0)=w(M_1)(\gamma z_1+\delta)^{k+1}\theta_1'(z_1,0) \quad \text{für } M_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma, \tag{45}$$

woraus erhellt, daß der gerade abelsche Charakter w von Γ das Multiplikatorsystem von η^{12} ist. Klassischen Formeln (s. etwa H. Weber: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Vieweg 1891) ist zu entnehmen, daß

$$w(\tilde{M}_1)=w(M_1) \quad \text{für } M_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0(d)=\{M_1\in\Gamma\,|\,\gamma\equiv 0(\operatorname{mod} d)\},$$
$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta d\\ \gamma/d & \delta\end{pmatrix}$$

ist. Überdies stellt man fest, daß

$$w_1^9(M_1)\,w_1^{-3}(\tilde{M}_1)=\left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \text{für } M_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0(d)$$

gilt, wenn $w_1(M_1)$ für $M_1\in\Gamma$ das durch

$$\eta(M_1\langle z_1\rangle)/\eta(z_1)=w_1(M_1)(\gamma z_1+\delta)^{\frac{1}{2}},\ -\pi<\arg(\gamma z_1+\delta)\leqq\pi$$

definierte Multiplikatorsystem von η bezeichnet. Die Funktion

$$G(z_1):=\frac{1}{2\pi}c_1(z_1)\overline{\vartheta_{11}'(dz_1,0)}=\eta^9(z_1)\overline{\eta^3(dz)}\,\varphi(z_1) \tag{46}$$

genügt folglich der Transformationsformel

$$G(M_1\langle z_1\rangle)=\left(\frac{\delta}{d}\right)(\gamma z_1+\delta)^{k-2}|\gamma z_1+\delta|^3G(z_1) \quad \text{für } M_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0(d). \tag{47}$$

Die Entwicklungen (40) und

$$\frac{1}{2\pi}\vartheta_{11}'(z_1,0)=\eta^3(z_1)=\sum_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\exp\left(\frac{\pi i}{4}n^2z_1\right)$$

gestatten die explizite Berechnung des Integrals

$$\hat{J}(s) := \int_0^\infty \int_0^1 G(z_1) y_1^{\frac{s-1}{2}} \, dx_1 \, dy_1 \qquad (z_1 = x_1 + i y_1). \tag{48}$$

Man erhält für hinreichend große Werte von $\Re e\, s$ die Darstellung

$$\hat{J}(s) = \left(\frac{2}{\pi d}\right)^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma(\tfrac{1}{4} n^2 d) n^{-s}. \tag{49}$$

Dabei ist

$$\gamma(\tfrac{1}{4} n^2 d) = a \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(n^2 d + 1) \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a \begin{pmatrix} 1 & n/2 \\ n/2 & n^2 c \end{pmatrix}, \qquad d = 4c - 1.$$

(49) geht nun über in

$$\hat{J}(s) = \left(\frac{2}{\pi d}\right)^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_n a \begin{pmatrix} 1 & n/2 \\ n/2 & n^2 c \end{pmatrix} n^{-s}. \tag{50}$$

Mit Hilfe von (43) erhalten wir schließlich

$$\hat{J}(s) = \frac{(\frac{1}{2}\pi d)^{-\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma(\frac{1}{2}(s+1))}{(1 - 2^{k-1-s}) \zeta(s+1-k)} \sum_n a(n N_0) n^{-s}. \tag{51}$$

Die folgende Integraldarstellung, die $\hat{J}(s)$ als meromorphe Funktion ausweist, ist mit der Rankinschen Methode zu gewinnen (vgl. hierzu [1] und [10])

$$\hat{J}(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{\mathfrak{F}} y^{\frac{k}{2}} \hat{H}_{k-2}\left(\frac{s}{2}, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) G(z) \frac{dx\, dy}{y^2} \, (z = x + i y). \tag{52}$$

Hierin ist $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma_0(d)$ in der oberen Halbebene und

$$\hat{H}_{k-2}\left(s, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) := \pi^{-s} \Gamma(s) y^s \Sigma \left(\frac{n}{d}\right) (m d z + n)^{k-2} |m d z + n|^{-2s}, \tag{53}$$

wobei über ein volles System paarweise nicht assoziierter teilerfremder Paare $(m, n) \neq (0, 0)$ summiert wird. Shimuras Reihe $H_{k-2}\left(s, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right)$ erhält man, wenn man in (53) über alle Paare $(m, n) \neq (0, 0)$ summiert. Offenbar ist

$$H_{k-2}\left(s, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) = 2L\left(2s + 2 - k, \left(\frac{*}{d}\right)\right) \hat{H}_{k-2}\left(s, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right), \tag{54}$$

also

$$J(s) = 2\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L\left(s + 2 - k, \left(\frac{*}{d}\right)\right) \hat{J}(s), \tag{55}$$

wobei $L\left(s, \left(\frac{*}{d}\right)\right)$ die Dirichletsche L-Reihe zum Charakter $\left(\frac{*}{d}\right)$ bezeichnet und zur Abkürzung

$$J(s) := \int_{\mathfrak{F}} y^{\frac{3}{2}} H_{k-2}\left(\frac{s}{2}, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) G(z) \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{56}$$

gesetzt ist. Bekanntlich ist

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)\, L\left(s, \left(\frac{*}{d}\right)\right). \tag{57}$$

(50), (55) und (57) ergeben nun

$$J(s) = \frac{\sqrt{2}^5 d^{-\frac{1}{2}(s+1)} (\sqrt{2}\pi)^{-s} \Gamma(s)\, \zeta_K(s+2-k)}{(1-2^{k-1-s})\, \zeta(s+1-k)\, \zeta(s+2-k)} \sum_n a(nN_0) n^{-s}. \tag{58}$$

Da $\left(\frac{*}{d}\right)$ ein eigentlicher Charakter $\bmod d$ ist, so ist nach [10, Lemma 3.3] $H_{k-2}\left(s, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right)$ eine ganze Funktion von s, die der Funktionalgleichung

$$H_{k-2}\left(\frac{s}{2}, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) = -i d^{2k-\frac{1}{2}(3s+5)} H_{k-2}\left(k-1-\frac{s}{2}, -\frac{1}{dz}, \left(\frac{*}{d}\right)\right) \tag{59}$$

genügt. Überdies konvergiert das Integral (56) absolut für alle s und stellt eine ganze, in jedem Streifen $\sigma_1 \leqq \Re e\, s \leqq \sigma_2$ beschränkte Funktion von s dar. Mit Hilfe der Funktionalgleichung (59) werden wir für das Integral (56) eine Funktionalgleichung bezüglich der Transformation $s \to 2k-2-s$ herleiten. Da der Integrand von (56) bezüglich $\Gamma_0(d)$ invariant ist, so gilt dies eo ipso auch für den Integranden des umgeformten Integrals

$$J(s) = -i d^{2k-\frac{1}{2}(3s+5)} \int_{\mathfrak{F}} y^{\frac{3}{2}} H_{k-2}\left(k-1-\frac{s}{2}, -\frac{1}{dz}, \left(\frac{*}{d}\right)\right) G(z) \frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{60}$$

Die involutorische Abbildung $z \to T\langle z\rangle = -\frac{1}{dz}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ ergibt

$$J(s) = i d^{k-2-\frac{3}{2}s} \int_{T^{-1}\langle\mathfrak{F}\rangle} y^{\frac{3}{2}} H_{k-2}\left(k-1-\frac{s}{2}, z, \left(\frac{*}{d}\right)\right) z^{2-k} |z|^{-3} G\left(-\frac{1}{dz}\right) \frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{61}$$

Der neue Integrand ist bezüglich der Gruppe

$$T\Gamma_0(d)T^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \delta & -\gamma/d \\ -\beta d & \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(d) \right\}$$

invariant und diese ist ersichtlich mit $\Gamma_0(d)$ identisch. In (61) wird also über einen Fundamentalbereich von $\Gamma_0(d)$ integriert. $T^{-1}\langle\mathfrak{F}\rangle$ kann daher durch $\mathfrak{F}$ ersetzt werden. Schließlich ist

$$z^{2-k}|z|^{-3}G\left(-\frac{1}{dz}\right)=z^{2-k}|z|^{-3}\overline{c_1\left(-\frac{1}{dz}\right)\eta^3\left(-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=w_1^6\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}d^{k-\frac{3}{2}}\tilde{G}(z)=i d^{k-\frac{3}{2}}\tilde{G}(z)\quad\text{mit}\quad \tilde{G}(z)=c_1(dz)\overline{\eta^3(z)}. \tag{62}$$

Das Integral (61) nimmt nun die Gestalt

$$J(s)=-d^{2k-\frac{1}{2}(3s+5)}\int_{\mathfrak{F}} y^{\frac{3}{2}}H_{k-2}\left(k-1-\frac{s}{2},z,\left(\frac{*}{d}\right)\right)\tilde{G}(z)\frac{dx\,dy}{y^2} \tag{63}$$

an. Für hinreichend große Werte von $-\mathfrak{Re}\,s$ ist umgekehrt wie bei der Herleitung von (55) mit Hilfe von (54)

$$J(s)=-2d^{2k-\frac{1}{2}(3s+5)}L\left(k-s,\left(\frac{*}{d}\right)\right)\int_{\mathfrak{F}} y^{\frac{3}{2}}\hat{H}_{k-2}\left(k-1-\frac{s}{2},z,\left(\frac{*}{d}\right)\right)\tilde{G}(z)\frac{dx\,dy}{y^2}$$

$$=-2d^{2k-\frac{1}{2}(3s+5)}\pi^{\frac{1}{2}s+1-k}\Gamma\left(k-1-\frac{s}{2}\right)L\left(k-s,\left(\frac{*}{d}\right)\right)\int_0^\infty\int_0^1\tilde{G}(z)y^{k-\frac{1}{2}(s+3)}dx\,dy$$

zu schließen. Da d quadratfrei ist, kann $(n-\frac{1}{4})d=\frac{1}{4}m^2$ nur im Falle $m\equiv 0(\operatorname{mod} d)$ eintreten. Es ergibt sich daher

$$\int_0^\infty\int_0^1\tilde{G}(z)y^{k-\frac{1}{2}(s+3)}dx\,dy=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-\frac{1}{2}(s+1)}d^{s+2-2k}\Gamma\left(k-\frac{s+1}{2}\right)$$

$$\cdot\sum_m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\gamma\left(\frac{dm^2}{4}\right)m^{s+2-2k}$$

und somit

$$J(s)=\sqrt{2}^5 d^{-\frac{1}{2}(s+1)}(\sqrt{2}\pi)^{s+2-2k}\Gamma(2k-2-s)$$

$$\cdot L\left(k-s,\left(\frac{*}{d}\right)\right)\sum_m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\gamma\left(\frac{dm^2}{4}\right)m^{s+2-2k}$$

$$=\sqrt{2}^5 d^{-\frac{1}{2}(s+1)}\frac{(\sqrt{2}\pi)^{s+2-2k}\Gamma(2k-2-s)\zeta_K(k-s)}{(1-2^{s+1-k})\zeta(k-1-s)\zeta(k-s)}\sum_n a(nN_0)n^{s+2-2k}. \tag{64}$$

Von der Legendreschen Relation

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2})$$

wurde wiederholt Gebrauch gemacht. Nach [10, Lemma 3.3] ist die mit der Dirichletreihe

$$D(s)=\frac{\zeta_K(s+2-k)}{(1-2^{k-1-s})\zeta(s+1-k)\zeta(s+2-k)}\sum_n a(nN_0)n^{-s} \tag{65}$$

gebildete Funktion

$$R(s)=(\sqrt{2}\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s)$$

eine ganze, in jedem Vertikalstreifen $\sigma_1 \leqq \Re s \leqq \sigma_2$ beschränkte Funktion. Ein Vergleich von (58) mit (64) zeigt, daß

$$R(2k-2-s)=R(s) \tag{66}$$

ist. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Die Funktionalgleichung (66) läßt sich ohne Mühe auf das Eulerprodukt $Z_\chi(s)$ umschreiben. O.B.d.A. werde $a(N_0)=1$ vorausgesetzt. Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion geht in die Betrachtung ein. Sie lautet $\rho(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\rho(1-s)$. Nach (8), (42) und (65) wird

$$\begin{aligned}
R_\chi(s) &:= \pi^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+2-k)(1-4^{-s})^{-1}Z_\chi(s)\\
&= \pi^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+2-k)\zeta_K(s+2-k)\sum_m a(mN_0)m^{-s}\\
&= \pi^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+2-k)(1-2^{k-1-s})\zeta(s+1-k)\zeta(s+2-k)D(s)\\
&= \pi^{-s}\Gamma(s+2-k)\left(2^{\frac{s}{2}}-2^{k-1-\frac{s}{2}}\right)\zeta(s+1-k)\zeta(s+2-k)R(s)\\
&= 2^{s+1-k}C(s)R(s)
\end{aligned}$$

mit

$$C(s)=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}-k}(s+1-k)\left(2^{\frac{s}{2}}-2^{k-1-\frac{s}{2}}\right)\rho(s+1-k)\rho(s+2-k).$$

Da die Funktionen $R(s)$ und $C(s)$ beide gegenüber $s\to 2k-2-s$ invariant sind, so trifft dies auch für $2^{k-1-s}R_\chi(s)$ zu. Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4. Die durch Eulerprodukte vermittelte Abbildung $\mathfrak{S}_k(v)\to\mathfrak{M}_{2k-2}$

Mit dem Beweis von Satz 5 kommen wir zum Ende der Betrachtungen. Es sei $\chi\in\mathfrak{S}_k(v)$ eine der in Satz 5 genannten Basisfunktionen und $g\in(G(\sqrt{2}),2k-2)_0$ die zugeordnete Spitzenform mit der Dirichletreihe

$$D_g(s)=\{(1-2^{k-1-s})(1-4^{k-2-s})\zeta(s+1-k)\zeta(s+2-k)\}^{-1}Z_\chi(s). \tag{67}$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß $D_g(s)$ eine Eulerproduktdarstellung bezüglich jeder Primzahl $p\geqq 2$ im Heckeschen Sinne hat. Der 2-Faktor ist stets von ein und derselben Gestalt $(1+2^{k-2-s})^{-1}$. Der Theorie von Bogo-Kuyk [2] zufolge ist g daher Eigenfunktion aller Heckeschen Operatoren $T(2,p)$, $p\geqq 2$ und das Eulerprodukt von g hat die Gestalt (13), wenn $T(2,p)g=\omega(p)g$ für alle Primzahlen $p\geqq 2$ ist. Es bleibt der Eigenwert $\omega(2)$ von g bezüglich $T(2,2)$ zu bestimmen. Allgemein ist

$$T(2,2)g(z)=2^{2k-3}g(2z)+\frac{1}{2}\left(g\left(\frac{z}{2}\right)+g\left(\frac{z+\sqrt{2}}{2}\right)\right)+2^{k-2}g\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{68}$$

Wenn nun

$$g \in (G(\sqrt{2}), 2k-2)_0, \qquad T(2,2)g = \omega(2)g,$$

so genügen die Koeffizienten der Reihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(\sqrt{2}\pi i n z)$$

den Relationen

$$\omega(2)a(n) = 2^{2k-3}a(n/2) + (-1)^n 2^{k-2} a(n) + a(2n) \ (a(n/2) = 0 \text{ für } 2 \nmid n).$$

Multiplikation mit $(2n)^{-s}$ und Summation über $n \in \mathbb{N}$ ergibt für die der Form $g(z)$ zugeordnete Reihe $D_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ die Beziehung

$$\{1 + (2^{k-2} - \omega(2) 2^{-s} + 2^{2k-3-2s}\} D_g(s) = (1 + 2^{k-1-s}) \sum_{\substack{n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2) \\ n > 0}} a(n) n^{-s}.$$

D.h. $D_g(s)$ hat ein Eulerprodukt bezüglich 2 mit dem 2-Faktor

$$(1 + 2^{k-1-s})\{1 + (2^{k-2} - \omega(2)) 2^{-s} + 2^{2k-3-2s}\}^{-1}. \tag{69}$$

Eine Übereinstimmung mit $(1 + 2^{k-2-s})^{-1}$ liegt also nur dann vor, wenn $\omega(2) = -2^{k-1}$ ist. $\mathfrak{M}_{2k-2}$ hat also die in Satz 5 angegebene Kennzeichnung.

Noch steht der Beweis der Dimensionsformel (16) aus. Bei ihrer Herleitung wird von der Beziehung

$$\dim(\Gamma, k-5) = \left[\frac{k-1}{4}\right] - \left[\frac{k-1}{6}\right] \qquad \text{für } k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2), \quad k > 0,$$

die wir gemäß Satz 1 und einer von Hecke [4, S. 593] mitgeteilten Dimensionsformel in

$$\dim \mathfrak{S}_k(v) = \dim(G(\sqrt{2}), 2k-2)_0 - \dim(G(1), 2k-2)_0 \qquad \text{für } k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \tag{70}$$

umschreiben können, wesentlicher Gebrauch gemacht. Diese Formel ist ein Pendant zu der in [8] bewiesenen Formel

$$\dim \mathfrak{S}_k = \dim(G(1), 2k-2)_0 \qquad \text{für } k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Das eingangs formulierte Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa steht mit der von mir ursprünglich bewiesenen Ungleichung $\dim \mathfrak{M}_{2k-2} \leq \dim \mathfrak{S}_k(v)$ in direkter Verbindung. Auf die Wiedergabe meines Beweises kann ich verzichten, nachdem das Problem von anderer Seite eine überraschende Wendung erfahren hat.

De facto enden hier meine Überlegungen. Was folgt sind Ausführungen, die der Referent mir nach sorgfältiger Analyse der vorliegenden Arbeit in einem detaillierten Bericht über den Managing Editor dieser Zeitschrift zugehen ließ. Sie stammen von ihm und Herrn Winfried Kohnen.

Die Gruppe $G(\sqrt{2})$, mit deren Hilfe wir bisher unsere Ergebnisse formuliert haben, ist vermöge der Transformation $z \to \sqrt{2}z$ mit der Gruppe

$$\Gamma_0^*(2) = \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2) W_2 = \text{Normalisator von } \Gamma_0(2) \quad \text{in } PGL_2(\mathbb{R})$$

$\left(W_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ isomorph (dieser Tatsache ist es zu verdanken, daß die Gruppe $G(\sqrt{2})$ hier auftritt; denn die Heckeschen Gruppen $G(\lambda)$ sind für $\lambda \neq 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ nicht arithmetisch und spielen in der Zahlentheorie keine Rolle). Unter diesem Isomorphismus wird $\mathfrak{M}_{2k-2}$ linear auf

$$\mathfrak{M}_{2k-2}^* = \Big\{ g \in S_{2k-2}(\Gamma_0^*(2)) \,|\, 2^{2k-2} g(2z) + 2^k g(z) + 2^{k-1} g(z + \tfrac{1}{2}) + g\left(\frac{z}{2}\right) + g\left(\frac{z+1}{2}\right) = 0 \Big\} \tag{71}$$

abgebildet; zur Vereinfachung ist hier $S_{2k-2}(\Gamma_0^*(2))$ an Stelle von $(\Gamma_0^*(2), 2k-2)_0$ geschrieben worden. Da die Dirichletreihen, die sich bei der Abbildung $\mathfrak{M}_{2k-2} \to \mathfrak{M}_{2k-2}^*$ entsprechen, identisch sind, so bleibt Satz 5 auch richtig, wenn man $\mathfrak{M}_{2k-2}$ durch $\mathfrak{M}_{2k-2}^*$ ersetzt. Wir beweisen jetzt die Dimensionsformel

$$\dim \mathfrak{M}_{2k-2} = \dim \mathfrak{M}_{2k-2}^* = \dim \mathfrak{S}_k(v) \tag{72}$$

indem wir zeigen, daß $\mathfrak{M}_{2k-2}^*$ aus vertrauten Objekten besteht. Das wesentliche Hilfsmittel ist die wohlbekannte Atkin-Lehner-Theorie für $\Gamma_0(m)$ [11].

Es sei $g \in \mathfrak{M}_{2k-2}^*$. Die Koeffizienten der Reihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z)$ genügen gemäß (71) der Bedingung

$$a(2n) + (2^{k-1} + (-1)^n 2^{k-2}) a(n) + 2^{2k-3} a(n/2) = 0, \tag{73}$$

wobei wir die übliche Konvention $a(n/2) = 0$ für ungerade n gemacht haben. Die Bedingung (73) besagt

$$\begin{aligned} &a(2n) + 2^{k-2} a(n) = 0, && \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ &(a(2n) + 2^{k-2} a(n)) + 2^{k-1}(a(n) + 2^{k-2} a(n/2)) = 0, && \text{falls } n \text{ gerade}, \end{aligned}$$

und ist somit offensichtlich mit der einfacheren Bedingung

$$a(2n) + 2^{k-2} a(n) = 0 \qquad \text{für alle } n \tag{74}$$

äquivalent.

Führen wir in $S_{2k-2}(\Gamma_0(2))$ die zwei Standardoperationen

$$W_2\colon\ g(z) \to (g | W_2)(z) = 2^{1-k} z^{2-2k} g\left(-\frac{1}{2z}\right),$$

$$U_2\colon\ g(z) \to (g | U_2)(z) = \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{z}{2}\right) + g\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)$$

(oder $\Sigma a_n q^n \to \Sigma a_{2n} q^n$) ein, so gilt wegen (74)

$$\mathfrak{M}^*_{2k-2} = \{g \in S_{2k-2}(\Gamma_0(2)) \mid g|W_2 = g,\ g|(U_2 + 2^{k-2}) = 0\}.$$

Wir erinnern nunmehr an die Struktur von $S_k(\Gamma_0(p))$ (k gerade, p prim, auch 2) nach Atkin-Lehner:

1) $S_k(\Gamma_0(p)) = S_k^0 \oplus S_k^{\text{alt}}$, wobei S_k^{alt} der Raum ist, der von $f(z)$, $f(pz)$ ($f \in S_k(\Gamma(1))$) erzeugt wird, und S_k^0 (oder S_k^{neu}) sein orthogonales Komplement bezeichnet;

2) $g \in S_k^0 \Leftrightarrow Sp(g) = Sp(g|W_p) = 0$, wobei Sp: $S_k(\Gamma_0(p)) \to S_k(\Gamma(1))$ die Abbildung $f \to \sum_{\gamma \in \Gamma_0(p)/\Gamma(1)} f|_k \gamma$ bezeichnet (s. Serres Arbeit in Modular Forms of One Variable III, Springer Lecture Notes 350, S. 225 oben);

3) Sp wird explizit durch die Formel

$$Sp(f) = f + p^{1-k/2} f|W_p|U_p$$

gegeben (s. Serre, op. cit., S. 223 unten);

4) $W_p^2 = 1$ und W_p kommutiert mit allen Hecke-Operatoren und bildet S_k^0 und S_k^{alt} in sich ab; somit ist $S_k^0 = S_k^{0,+} \oplus S_k^{0,-}$, wobei $S_k^{0,\pm}$ der (± 1)-Eigenraum von W_p auf S_k^0 ist und eine Basis von Hecke-Eigenformen (Neuformen) besitzt.

Wenden wir dies auf $S_{2k-2}(\Gamma_0(2))$ an, so sehen wir, daß $\mathfrak{M}^*_{2k-2}$ nichts anderes als $S^{0,+}_{2k-2}$ ist; denn für $g|W_2 = g$ fallen die Bedingungen $Sp(g) = 0$ und $Sp(g|W_2) = 0$ zusammen, so daß $\mathfrak{M}^*_{2k-2}$ der Kern der Abbildung $S^+_{2k-2}(\Gamma_0(2)) \to S_{2k-2}(\Gamma(1))$ ist, die durch Beschränkung von Sp auf S^+_{2k-2} entsteht. Diese Abbildung ist aber surjektiv, wie folgende allgemeine Überlegung zeigt: Wenn $f(z) + g(pz) = 0$, $f, g \in S_k(\Gamma(1))$ und k gerade, so ist $f = g = 0$. Aus 1) oben folgt daher, daß die Kodimension von S_k^0 in $S_k(\Gamma_0(p))$ gleich $2 \dim S_k(\Gamma(1))$ ist, und aus 2), daß die durch $g \to (Sp(g), Sp(g|W_p))$ gegebene Abbildung von $S_k(\Gamma_0(p))$ nach $S_k(\Gamma(1)) \oplus S_k(\Gamma(1))$ surjektiv ist. Es folgt

$$\dim \mathfrak{M}^*_{2k-2} = \dim S_{2k-2}(\Gamma_0^*(2)) - \dim S_{2k-2}(\Gamma(1)) = \dim \mathfrak{S}_k(v).$$

Der nunmehr bewiesene Satz 5 läßt sich daher mit $f(z) = \Sigma a(n) \exp(2\pi i n z)$ an Stelle von $g(z)$ in (12) auch so formulieren:

Satz 5*. *Besteht die Basis $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ von $\mathfrak{S}_k(v)$ aus Eigenformen der Hecke Operatoren, so wird durch*

$$\chi_\nu(Z) \to Z_{\chi_\nu}(s) \to D(s) = D_{f_\nu}(s) \to f_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

eine lineare Abbildung von $\mathfrak{S}_k(v)$ in den von Neuformen vom Gewicht $2k-2$ auf $\Gamma_0^*(2)$ erzeugten Raum $S^{0,+}_{2k-2}(\Gamma_0(2))$ definiert, welche Eulerprodukte in Eulerprodukte überführt. Im übrigen ist

$$\dim \mathfrak{S}_k(v) = \dim S^{0,+}_{2k-2}(\Gamma_0(2)).$$

In Abwandlung eines geflügelten Wortes reflektiere ich: Even old dogs should learn new tricks.

Literatur

1. Andrianov, A.N.: Modular Descent and the Saito-Kurokawa Conjecture. Inv. Math. **53**, 267–280 (1979)
2. Bogo, J., Kuyk, W.: The Hecke Correspondences for $\overline{G(q^{1/2})}$; q prime; Eisenstein Series and Modular Invariants. J. of Algebra **43**, 585–605 (1976)
3. Evdokimov, S.A.: Eulerprodukte für Kongruenzuntergruppen der Siegelschen Gruppe zweiten Grades (russisch). Matematičeskij sbornik, Bd. 99 (141), Nr. 4, 1976
4. Hecke, E.: Mathematische Werke. Vandenhoeck & Ruprecht, 1959
5. Maaß, H.: Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe. Nachr. der Akad. der Wiss. in Göttingen, II. math.-phys. Klasse, Nr. 11, 1964
6. Maaß, H.: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **232**, 163–175 (1978)
7. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. Inv. Math. **52**, 95–104 (1979)
8. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (II). Inv. Math. **53**, 249–253 (1979)
9. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (III). Inv. Math. **53**, 255–265 (1979)
10. Shimura, G.: On modular forms of half integral weight. Ann. Math. **97**, 440–481 (1973)
11. Atkin, A.O.L., Lehner, J.: Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. Math. Ann. **185**, 134–160 (1970)

Eingegangen am 7. Januar 1980