Inventiones math. 53, 255–265 (1979)

Inventiones mathematicae

Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (III)

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Es bezeichne (Γ_2, k) den linearen Raum der Modulformen zur Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades Γ_2 und zum Gewicht $k \equiv 0 \pmod 2$, analog (Γ, k) den linearen Raum der elliptischen Modulformen zum Gewicht k und $(\Gamma, k)_0$ den Teilraum der Spitzenformen in (Γ, k). Unter $\mathfrak{S}_k$ werde die in [6, 7] behandelte Spezialschar der Spitzenformen

$$\chi(Z) = \sum_{N>0} a(N)\, e^{2\pi i \sigma(NZ)} \in (\Gamma_2, k) \qquad (\sigma = \text{Spur}) \tag{1}$$

verstanden, für welche die Koeffizientenrelationen

$$a\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} = \sum_{g/a,b,c} g^{k-1}\, a\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{2g} \\ \dfrac{b}{2g} & \dfrac{ac}{g^2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

charakteristisch sind. Eine gewisse Vertrautheit mit den in [6, 7] verwendeten Bezeichnungen ist unerläßlich, da ich mich auf diese Arbeiten beziehe. In [7] wurde gezeigt, daß die Formen χ der Spezialschar $\mathfrak{S}_k$ mit den Formen des Typus

$$\chi(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_1 \,|\, T(m)(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{2\pi i m z_2}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

identisch sind. Die Jacobische Form Θ_1 hat die Gestalt

$$\Theta_1(z_1, z) = c_0(z_1)\, \vartheta_0(z_1, z) + c_1(z_1)\, \vartheta_1(z_1, z) \tag{4}$$

mit

$$\vartheta_h(z_1, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \left\{\left(n+\frac{h}{2}\right)^2 z_1 + (2n+h)z\right\}} \qquad \text{für } h = 0, 1 \tag{5}$$

0020-9910/79/0053/0255/$02.20

und gewissen Spitzenformen

$$c_h(z_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_h\left(n-\frac{h}{4}\right)e^{2\pi i\left(n-\frac{h}{4}\right)z_1}\in(\Gamma_0(4),k-\tfrac{1}{2},v_h). \tag{6}$$

Da c_1, wie in [6] ausgeführt wurde, durch c_0 eindeutig bestimmt ist, so ergibt sich eine umkehrbar eindeutige Beziehung $\chi\leftrightarrow\Theta_1\leftrightarrow c_0$.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß das Eulerprodukt $D(s,\chi)$ einer Eigenfunktion $\chi\in\mathfrak{S}_k$ der Heckeschen Operatoren $T(n)$ mit den Eigenwerten $\lambda(n)$ im Sinne der Theorie Andrianovs [1] die Gestalt

$$D(s,\chi)=\zeta(s-k+1)\,\zeta(s-k+2)\,D(s) \tag{7}$$

hat, wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und

$$D(s)=\prod_p(1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s})^{-1},\qquad \omega(p)=\lambda(p)-p^{k-1}-p^{k-2} \tag{8}$$

ist. Das Produkt ist hier über alle Primzahlen p zu erstrecken. Vermöge (7) erweist sich $D(s)$ als eine meromorphe Funktion von s. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\Psi(s)=(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,D(s)=-\Psi(2k-2-s), \tag{9}$$

die sich unmittelbar aus der von Andrianov [1] abgeleiteten Funktionalgleichung für $D(s,\chi)$:

$$\Psi(s,\chi)=(2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s-k+2)\,D(s,\chi)=\Psi(2k-2-s,\chi) \tag{10}$$

und der entsprechenden für $\zeta(s)$ ergibt. Ist $D(s)$ eine ganze Funktion, so folgt aus den Sätzen [4, § 2] und [5, Satz 42], daß die der Reihe

$$D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}\ \text{zugeordnete Funktion}\ f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z} \tag{11}$$

eine Spitzenform in $(\Gamma,2k-2)_0$ und überdies Eigenfunktion aller Heckeschen Operatoren $T(n)$ zu den Eigenwerten $\omega(n)$ ist. $D(s)$ ist dann mit dem Eulerprodukt $D(s,f)$ der Form f identisch. Wir beweisen mit Hilfe der Theorie Shimuras [8], daß $D(s)$ eine ganze Funktion ist, falls $\chi(Z)$ einen Koeffizienten

$a(N)\neq 0$ zu primitivem N mit $|N|=t\,n^2$ besitzt, wobei t,n natürliche Zahlen sind, t quadratfrei und $t+1\not\equiv 0 \pmod 4$ ist. (12)

Als Schlüssel für das Verständnis der analytischen Zusammenhänge erweisen sich die Relationen

$$\gamma_h\left(n-\frac{h}{4}\right)=a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}h\\ \frac{1}{2}h & n\end{pmatrix}\qquad\text{für } h=0,1\quad\text{und}\quad n\geqq 1, \tag{13}$$

die man mit Hilfe eines einfachen Integrationsprozesses gewinnt. Sie besagen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & n \end{pmatrix} e^{2\pi i\left(n-\frac{h}{4}\right)z} \in (\Gamma_0(4), k-\tfrac{1}{2}, v_h) \qquad \text{für } h=0,1. \tag{14}$$

Da $\mathfrak{S}_k$ für $k \leqq 18$ aus allen Spitzenformen in (Γ_2, k) besteht, so gibt es in diesen Fällen eine Basis $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ von $\mathfrak{S}_k$, die aus Eigenfunktionen bezüglich der Heckeschen Operatoren besteht. Auf Grund der Ergebnisse von Kurokawa [2] ist dies zufolge $\dim \mathfrak{S}_{20} = 2$ auch noch für $k=20$ richtig. Schließlich zeigen die Rechnungen von Kurokawa für $k \leqq 20$, daß die Eulerprodukte $D(s,\chi_\nu)$ der Basisformen χ_ν paarweise verschieden sind; denn sie unterscheiden sich bereits im 2-Faktor, da die Eigenwerte $\lambda(2) = \lambda(2,\chi_\nu)$ paarweise verschieden sind. Die Forderung (12) ist in den genannten Fällen stets für die Einheitsmatrix $N = E$ erfüllt. Den Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r \in \mathfrak{S}_k$ entsprechen daher Spitzenformen $f_1, f_2, \ldots, f_r \in (\Gamma, 2k-2)_0$ mit paarweise verschiedenen Eulerprodukten $D(s, f_\nu)$. Es besteht daher eine umkehrbar eindeutige Beziehung $\chi_\nu \leftrightarrow f_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$, die in den Relationen

$$D(s,\chi_\nu) = \zeta(s-k+1)\,\zeta(s-k+2)\,D(s,f_\nu) \qquad \text{für } \nu = 1,2,\ldots,r \tag{15}$$

ihren Ausdruck findet. Die „Conjecture 1" von Kurokawa [2] hat sich damit jedenfalls für die Gewichte $10 \leqq k \leqq 20$ als richtig erwiesen. Der Hinweis erscheint angezeigt, daß Hiroshi Saito mir diese Vermutung bereits am 16. 3. 1977 brieflich mitgeteilt hat. Es fehlte indessen der Bezug auf die Formenschar $\mathfrak{S}_k$, der sich hier als wesentlich herausgestellt hat.

Die folgenden Beweisansätze stützen sich vor allem auf Eigenschaften der Spitzenform c_0. Bringt man, wie Andrianov im Anschluß an die vorliegende Untersuchung während seines Heidelberger Seminars im Sommersemester 1979 vorschlug, mit c_0 gleichzeitig die Form c_1 ins Spiel, so läßt sich ohne zusätzliche Voraussetzung zeigen, daß die durch (8) erklärte Funktion ganz ist. Schließlich konnte Andrianov noch beweisen, daß die Schar $\mathfrak{S}_k$ gegenüber den Heckeschen Operatoren invariant ist. Er bereitet eine Publikation dieser Ergebnisse vor.

§ 1. Das Eulerprodukt einer Eigenfunktion $\chi \in \mathfrak{S}_k$

Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$$Z = X + iY, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x \\ x & x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y \\ y & y_2 \end{pmatrix}, \quad dv = |Y|^{-\frac{3}{2}}\,dy_1\,dy_2\,dy$$

und setzen

$$\Gamma_2(s) := \int_{Y>0} e^{-\sigma(Y)}\,|Y|^s\,dv = \sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s-\tfrac{1}{2}) \qquad (\sigma = \text{Spur}).$$

Zum Beweis der Relationen (13) berechnen wir das Integral

$$I_h(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{Y>0} \iiint_0^1 \chi(Z)\,e^{-2\pi i\sigma(N_h(m)Z)}\,|Y|^s\,dx_1\,dx_2\,dx\,dv \tag{16}$$

auf zwei verschiedene Weisen. Zur Abkürzung ist hier

$$N_h(m)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}h\\ \frac{1}{2}h & m\end{pmatrix} \quad \text{für } h=0,1 \quad \text{und} \quad m\in\mathbb{N}$$

gesetzt worden. Trägt man in (16) für χ die Fourierreihe (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I_h(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}h\\ \frac{1}{2}h & m\end{pmatrix} \int_{Y>0} e^{-4\pi\sigma(N_h(m)Y)}|Y|^s\,dv \\ &=(4\pi)^{-2s}\Gamma_2(s)\sum_{m=1}^{\infty} a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}h\\ \frac{1}{2}h & m\end{pmatrix}\left(m-\frac{h}{4}\right)^{-s} \qquad \text{für } h=0,1. \end{aligned} \tag{17}$$

Etwas länger gestaltet sich die Rechnung, wenn in (16) für χ die Entwicklung (3) eingetragen wird. Die Integration über x_2 führt auf

$$I_h(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{Y>0}\iint_0^1 \Theta_1|T(m)(z_1,\sqrt{m}\,z)\,e^{-2\pi i(\bar z_1+h\bar z)-4\pi m y_2}\,|Y|^s\,dx_1\,dx\,dv.$$

Um die Wirkung des Heckeschen Operators $T(m)$ auf Θ_1 zu ermitteln, wählen wir die Matrizen $S=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$, $ad=m$, $b \bmod d$ als Repräsentantensystem. Die Reihendarstellung (5) ergibt dann

$$\begin{aligned} \Theta_1|T(m)(z_1,\sqrt{m}\,z) &= m^{k-1}\sum_S \Theta_1|S(z_1,\sqrt{m}\,z) \\ &= m^{k-1}\sum_S \Theta_1\left(\frac{az_1+b}{d},\frac{mz}{d}\right)d^{-k} \\ &= m^{k-1}\sum_S\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{c_0\left(\frac{az_1+b}{d}\right)e^{2\pi i\left\{n^2\frac{az_1+b}{d}+2naz\right\}}\right. \\ &\quad \left.+c_1\left(\frac{az_1+b}{d}\right)e^{2\pi i\left\{(n+\frac{1}{2})^2\frac{az_1+b}{d}+(2n+1)az\right\}}\right\}d^{-k}. \end{aligned}$$

Die Integration über x wird in den Fällen $h=0,1$ separat ausgeführt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Theta_1|T(m)(z_1,\sqrt{m}\,z)\,dx &= m^{k-1}\sum_S c_0\left(\frac{az_1+b}{d}\right)d^{-k} \\ &= m^{k-1}\sum_S\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_0(n)\,e^{2\pi i\frac{az_1+b}{d}n}\,d^{-k} \\ &= \sum_{d/m}\sum_{n=1}^{\infty} a^{k-1}\gamma_0(nd)\,e^{2\pi i n a z_1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Theta_1 | T(m)(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{-2\pi i \bar{z}}\, dx$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{b \bmod m} c_1 \left(\frac{z_1+b}{m}\right) e^{2\pi i \frac{z_1+b}{4m}}\, e^{-4\pi y}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{b \bmod m} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1 (n-\tfrac{1}{4})\, e^{2\pi i n \frac{z_1+b}{m}}\, e^{-4\pi y}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1 (n m - \tfrac{1}{4})\, e^{2\pi i n z_1}\, e^{-4\pi y}.$$

Einheitlich für $h=0,1$ folgt nun

$$\iint_0^1 \Theta_1 | T(m)(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{-2\pi i(\bar{z}_1 + h\bar{z})}\, dx_1\, dx = \gamma_h \left(m - \frac{h}{4}\right) e^{-4\pi(y_1+hy)}$$

und damit

$$I_h(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_h \left(m-\frac{h}{4}\right) \int_{Y>0} e^{-4\pi(y_1+hy+my_2)} |Y|^s\, dv$$

$$= (4\pi)^{-2s}\, \Gamma_2(s) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_h \left(m-\frac{h}{4}\right) \left(m-\frac{h}{4}\right)^{-s}. \tag{18}$$

Vergleich mit (17) ergibt in der Tat die Relationen (13).

Wir bestimmen die Wirkung des Heckeschen Operators $T(p)$, wobei p eine beliebige Primzahl bezeichnet, auf eine Spitzenform $\chi \in \mathfrak{S}_k$. Es seien $a(p,N)$ die Fourierkoeffizienten von $\chi | T(p)$. Bekanntlich (s. [1]) ist

$$a(p,N) = p^{2k-3} \sum_{\substack{ghd=p \\ U}} a\left(\frac{g}{hd} N \left[U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right]\right) g^{3-2k}\, d^{1-k}.$$

Summiert wird hier über alle multiplikativen Zerlegungen $ghd=p$ in natürliche Zahlen, und U durchläuft bei gegebenem d ein vollständiges System von unimodularen Matrizen, deren erste Spalten $\bmod d$ nicht assoziiert sind. Wir wählen

$$d=1:\ U=E \qquad \text{(Einheitsmatrix)},$$

$$d=p:\ U=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \qquad (0 \leqq \nu < p).$$

Speziell für $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$a\left(p, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & pm \end{pmatrix} + p^{k-2}\, a\begin{pmatrix} mp^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$+ p^{k-2} \sum_{\nu=0}^{p-1} a\begin{pmatrix} (1+\nu^2 m)\, p^{-1} & \nu m \\ \nu m & pm \end{pmatrix},$$

wenn allgemein $a(N)=0$ für nicht halbganze und nicht positive N gesetzt wird. Entsprechend sei auch $\gamma_0(x)=\gamma_1(x-\frac{1}{4})=0$ für $x\notin\mathbb{N}$. Fortgesetzte Anwendung von (2) und (13) ergibt für $p>2$ die Beziehung

$$a\left(p,\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\right)=\gamma_0(p^2 m)+\left\{p^{k-1}+p^{k-2}+\left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\right\}\gamma_0(m)+p^{2k-3}\gamma_0\left(\frac{m}{p^2}\right). \tag{19}$$

Im Fall $p=2$ gilt,

$$\begin{aligned} a\left(2,\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\right)&=a\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2m\end{pmatrix}+2^{k-2}a\begin{pmatrix}\frac{m}{2} & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+2^{k-2}a\begin{pmatrix}\frac{m+1}{2} & m\\ m & 2m\end{pmatrix}\\ &=\gamma_0(4m)+(2^{k-1}+2^{k-2})\gamma_0(m)+2^{2k-3}\left(\gamma_0\left(\frac{m}{4}\right)+\gamma_1\left(\frac{m}{4}\right)\right). \end{aligned}\tag{20}$$

Schließlich bestimmen wir noch

$$\begin{aligned} a\left(2,\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & m\end{pmatrix}\right)&=a\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2m\end{pmatrix}+2^{k-2}a\begin{pmatrix}\frac{m}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}+2^{k-2}a\begin{pmatrix}\frac{m}{2}+1 & m+\frac{1}{2}\\ m+\frac{1}{2} & 2m\end{pmatrix}\\ &=\gamma_0(4m-1)+2^{k-1}\gamma_1(m-\tfrac{1}{4})+\delta\left(\frac{m}{2}\right)2^{k-1}\gamma_1(m-\tfrac{1}{4}). \end{aligned}\tag{21}$$

Dabei ist $\delta(x)=1$ für $x\in\mathbb{Z}$ und 0 sonst.

Fortan sei χ eine Eigenfunktion, also

$$\chi\,|\,T(p)=\lambda(p)\,\chi \qquad \text{für alle Primzahlen } p\geqq 2. \tag{22}$$

Mit $\omega(p)=\lambda(p)-p^{k-1}-p^{k-2}$ ergibt sich dann

$$\omega(p)\,\gamma_0(m)=\gamma_0(p^2 m)+\left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\gamma_0(m)+p^{2k-3}\gamma_0\left(\frac{m}{p^2}\right) \qquad \text{für } p>2, \tag{23}$$

$$\omega(2)\,\gamma_0(m)=\gamma_0(4m)+2^{2k-3}\left(\gamma_0\left(\frac{m}{4}\right)+\gamma_1\left(\frac{m}{4}\right)\right), \tag{24}$$

$$(\lambda(2)-2^{k-1})\,\gamma_1(m-\tfrac{1}{4})=\gamma_0(4m-1)+\delta\left(\frac{m}{2}\right)2^{k-1}\gamma_1(m-\tfrac{1}{4}). \tag{25}$$

Die Koeffizienten von c_1 könnten mit Hilfe von (25) unmittelbar durch die von c_0 ausgedrückt werden, wenn sicher wäre, daß $\lambda(2)\neq 2^k, 2^{k-1}$ ist. Eine allgemeine Aussage darüber ist jedoch nicht möglich. Mit χ ist auch c_0 von Null verschieden. Es gibt daher natürliche Zahlen t, die außer 1 keinen quadratischen Teiler haben, so daß

$$D_t(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_0(t\,n^2)\,n^{-s}\neq 0. \tag{26}$$

Mit Hilfe von (23) läßt sich in Analogie zu [8, Theorem 1.9] für $D_t(s)$ die Produktdarstellung

$$D_t(s)=H_t(2^{-s})\prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-t}{p}\right)p^{k-2-s}\right)(1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s})^{-1} \tag{27}$$

mit

$$H_t(x)=\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_0(t\,2^{2h})\,x^h$$

gewinnen. Für diese Reihe liefert (24), hier in der speziellen Form

$$\omega(2)\,\gamma_0(t\,2^{2h})=\gamma_0(t\,2^{2h+2})+2^{2k-3}\{\gamma_0(t\,2^{2h-2})+\gamma_1(t\,2^{2h-2})\},$$

einen geschlossenen Ausdruck. Multipliziert man diese Relation mit x^{h+1} und summiert man über $h\geqq 0$, so ergibt sich

$$H_t(x)(1-\omega(2)\,x+2^{2k-3}\,x^2)=\gamma_0(t)-2^{2k-3}\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right)x, \tag{28}$$

denn es ist $\gamma_1(n)=0$ für $n\in\mathbb{N}$.

Wir setzen nun $-4t=dq^2$. Dabei bezeichne d die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-t})$. Offenbar stimmt $\left(\frac{-t}{p}\right)$ im Falle $p>2$ mit dem Restsymbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ überein. (27) und (28) ergeben daher

$$L\left(s-k+2,\left(\frac{d}{*}\right)\right)D_t(s)=D(s)\left(1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{k-2-s}\right)^{-1}\left(\gamma_0(t)-2^{2k-3-s}\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right)\right) \tag{29}$$

mit

$$D(s)=\prod_{p\geqq 2}(1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s})^{-1}. \tag{30}$$

Für das Eulerprodukt $D(s,\chi)$ der Form χ hat Andrianov folgende Darstellung gegeben

$$L_{-4t}(s-k+2)\sum_{i=1}^{h}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a(m\,N_i)}{m^s}=\Phi_\chi(s)\,D(s,\chi). \tag{31}$$

Die hier auftretenden Größen haben gemäß [1, Theorem 2.4.1] folgende Bedeutung: $N_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ b_i & c_i\end{pmatrix}$, $i=1,2,\dots,h$, bezeichnet ein vollständiges System von Repräsentanten der Klassen der im engeren Sinne äquivalenten positiv definiten primitiven Matrizen mit der Determinante t. Demgemäß ist b_i ganz und g.g.T. $(a_i, 2b_i, c_i)=1$. Anstelle des in den Andrianovschen Formeln auftretenden allgemeinen Gruppencharakters steht hier der Einheitscharakter. Er tritt daher als Argument nicht mehr in Erscheinung. Schließlich ist

$$\begin{aligned} L_{-4t}(s) &= \prod_{\mathfrak{p} \nmid q} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} = \prod_{p \nmid q} (1-p^{-s})^{-1} \left(1 - \left(\frac{d}{p}\right) p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \zeta(s)\, L\left(s, \left(\frac{d}{*}\right)\right) \prod_{p/q} (1-p^{-s}) \left(1 - \left(\frac{d}{p}\right) p^{-s}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

und

$$\Phi_\chi(s) = \sum_{i=1}^{h} \left\{ \prod_{p/q} \left(1 - \frac{\pi(p)}{p^{s-k+2}}\right) \left(1 - \frac{\Delta^-(p)}{p^{s-2k+3}}\right) a \right\} (N_i). \tag{33}$$

Die Operatoren $\pi(p)$ und $\Delta^-(p)$ sind durch [1, (2.1.14) und (2, 1, 17)] erklärt. In dem ersten Produkt in (32) durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, die q nicht teilen. $N\mathfrak{p}$ bezeichnet die Norm von $\mathfrak{p}$.

Auf Grund der Relationen (2) ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} a(m N_i)\, m^{-s} = \zeta(s-k+1)\, D_t(s), \tag{34}$$

unabhängig von i; denn es ist

$$a(m N_i) = \sum_{d/m} d^{k-1} \gamma_0(t m^2 d^{-2}),$$

also

$$\sum_{m=1}^{\infty} a(m N_i)\, m^{-s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} n^{k-1-s} \gamma_0(t m^2)\, m^{-s}.$$

Aus (29), (31), (32), (34) folgt nun

$$\begin{aligned} & h\,\zeta(s-k+1)\,\zeta(s-k+2)\, D(s) \left\{ \gamma_0(t) - 2^{2k-3-s} \gamma_1 \binom{t}{4} \right\} \prod_{p/q} (1-p^{k-2-s}) \\ &\quad = \Phi_\chi(s)\, D(s,\chi). \end{aligned} \tag{35}$$

Die behauptete Darstellung

$$D(s,\chi) = \zeta(s-k+1)\,\zeta(s-k+2)\, D(s) \tag{36}$$

reduziert sich demnach auf den Nachweis von

$$\Phi_\chi(s) = h \left\{ \gamma_0(t) - 2^{2k-3-s} \gamma_1 \binom{t}{4} \right\} \prod_{p/q} (1-p^{k-2-s}). \tag{37}$$

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß zufolge (26) und (29) die Koeffizienten $\gamma_0(t)$ und $\gamma_1 \binom{t}{4}$ nicht gleichzeitig verschwinden, so daß in (35) eine Kürzung durch $\Phi_\chi(s)$ möglich ist.

Ist $q=1$, also $d=-4t$, so folgt $-t\not\equiv 1 \pmod 4$, also $t+1\not\equiv 0 \pmod 4$, mithin $\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right)=0$. Die rechte Seite von (37) reduziert sich also auf $h\gamma_0(t)$ in Übereinstimmung mit $\Phi_\chi(s)=\sum_{i=1}^{h} a(N_i)=h\gamma_0(t)$. Es bleibt der Fall $q=2$ zu untersuchen. Nun ist $d=-t\equiv 1 \pmod 4$. Gemäß (37) wird dann

$$\sum_{i=1}^{h} \{a(N_i)-2^{k-2-s}(\pi(2)\,a)(N_i)-2^{2k-3-s}(\Delta^{-}(2)\,a)(N_i)$$
$$+2^{3k-5-2s}(\pi(2)\,\Delta^{-}(2)\,a)(N_i)\}$$
$$=h\left\{\gamma_0(t)-2^{k-2-s}\gamma_0(t)-2^{2k-3-s}\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right)+2^{3k-5-2s}\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right)\right\} \tag{38}$$

behauptet. Wir setzen für einen fest gewählten Index $N=N_i=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$. Da N primitiv ist, ist jedenfalls $a(N)=\gamma_0(t)$ und $(\Delta^{-}(2)\,\mathrm{a})(N)=a(\frac{1}{2}N)=0$. Wegen $t=ac-b^2\equiv -1 \pmod 4$ und g.g.T. $(a,2b,c)=1$ sind im folgenden drei Fälle zu erörtern:

1) $b\equiv 0 \pmod 2$, $a\equiv c\equiv 1 \pmod 2$, $a+c\equiv 0 \pmod 4$,
2) $b\equiv 1 \pmod 2$, $a\equiv 0 \pmod 4$, $c\equiv 1 \pmod 2$,
3) $b\equiv 1 \pmod 2$, $a\equiv 1 \pmod 2$, $c\equiv 0 \pmod 4$.

Wir bestimmen die auf der linken Seite von (38) noch auftretenden Größen:

$$(\pi(2)\,a)(N)=a\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\frac{1}{2}c & b\\ b & 2a\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a+c)+b & b+c\\ b+c & 2c\end{pmatrix}.$$

In allen drei Fällen ist genau eine der hier auftretenden Matrizen halbganz; diese ist dann jeweils das Doppelte einer primitiven Matrix. Demnach ist

$$(\pi(2)\,a)(N)=\gamma_0(t)+2^{k-1}\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right).$$

Zugleich ergibt sich nun aber auch

$$(\pi(2)\,\Delta^{-}(2)\,a)(N)$$
$$=a\begin{pmatrix}\frac{1}{4}a & \frac{1}{2}b\\ \frac{1}{2}b & c\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\frac{1}{4}c & \frac{1}{2}b\\ \frac{1}{2}b & a\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(a+2b+c) & \frac{1}{2}(b+c)\\ \frac{1}{2}(b+c) & c\end{pmatrix}=\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right).$$

Damit ist (38) verifiziert.

§ 2. Der Bezug zu den Eigenfunktionen $f\in(\Gamma,2k-2)_0$

Die bisherigen Überlegungen wurden unabhängig von [8] ausgeführt. Um nun zu beweisen, daß das Produkt (30) unter der Voraussetzung (12) Eulerprodukt einer Eigenfunktion $f \in (\Gamma, 2k-2)_0$ ist, müssen wir uns wesentlich auf Shimuras Ergebnisse stützen. Bezeichnet $(\Gamma_0(4), k-\frac{1}{2}, v_h)_0$ den Raum der Spitzenformen in $(\Gamma_0(4), k-\frac{1}{2}, v_h)$, so ist zu zeigen, daß $(\Gamma_0(4), k-\frac{1}{2}, v_0)_0$ mit Shimuras Raum $S_{2k-1}(4, \varepsilon)$ identisch ist, wobei ε den Einheitscharakter mod 4 bezeichnet, und ferner, daß c_0 diesem Raum angehört. Daß c_0 eine Spitzenform darstellt, ist evident auf Grund der Entwicklungen (6), da $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ eine vektorielle Modulform zur Modulgruppe Γ ist, wie in [6] ausgeführt wurde. Es bleibt zu zeigen, daß

$$c_0(M(z)) = j(M, z)^{2k-1}\, c_0(z) \qquad \text{für } M \in \Gamma_0(4) \tag{39}$$

gilt, wenn j durch

$$j(M, z) = \vartheta_0(M(z))/\vartheta_0(z) \text{ für } M \in \Gamma_0(4)$$

erklärt wird und allgemein

$$\vartheta_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \left(n+\frac{h}{2}\right)^2 z} \qquad \text{für } h = 0, 1 \tag{40}$$

gesetzt wird.

Mit gewissen Multiplikatorsystemen w_h ist

$$\vartheta_h \in (\Gamma_0(4), \tfrac{1}{2}, w_h), \qquad w_h^4 = 1 \quad \text{für } h = 0, 1. \tag{41}$$

Gemäß [5, Satz 3] sowie den Ausführungen in [6, S. 102] bestehen Relationen

$$c_0\,\vartheta_0 + c_1\,\vartheta_1 = u, \qquad c_0\,\vartheta_0' + c_1\,\vartheta_1' = \frac{1}{2k}\, u' + \pi i v \tag{42}$$

mit gewissen Formen $u \in (\Gamma, k)$, $v \in (\Gamma, k+2)$. Die Form $\pi i \eta^6 = \vartheta_0\,\vartheta_1' - \vartheta_1\,\vartheta_0'$ verschwindet nicht und gehört dem Raum $(\Gamma_0(4), 3, w_0 w_1)$ an. Die Auflösung von (42) nach c_0 ergibt

$$c_0 = \frac{1}{\pi i k \eta^6} (k\,\vartheta_1'\, u - \tfrac{1}{2}\,\vartheta_1\, u') - \frac{\vartheta_1\, v}{\eta^6}. \tag{43}$$

Diese Darstellung zeigt, daß c_0 und ϑ_0^{2k-1} ein und demselben Raum $(\Gamma_0(4), k-\frac{1}{2}, \bar{w}_0)$ angehören. Damit ist (39) und zugleich $v_0 = \bar{w}_0$ bewiesen.

Die folgenden Betrachtungen werden unter der Voraussetzung (12) ausgeführt. Sie hat $\gamma_1\left(\frac{t}{4}\right) = 0$, also $\gamma_0(t) \neq 0$ zur Folge. Wegen $d = -4t$ ist $\varepsilon(*)\left(\frac{-t}{*}\right)$ ein eigentlicher Charakter mod $4t$. Die Voraussetzungen des Haupttheorems von Shimura [8, S. 458] sind daher für c_0 erfüllt, so daß

$$F_t(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)\, e^{2\pi i n z},$$

definiert durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)\, n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon(m) \left(\frac{-t}{m}\right) m^{k-2-s} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_0(t\, n^2)\, n^{-s}$$

$$= \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{-t}{m}\right) p^{k-2-s}\right)^{-1} D_t(s) = \gamma_0(t)\, D(s),$$

eine Spitzenform in $(\Gamma_0(2^a), 2k-2)$ mit geeignetem $a \in \mathbb{N}$ darstellt. $D(s)$ erweist sich damit als eine ganze Funktion, woraus erhellt, daß $D(s)$ das Eulerprodukt einer Eigenfunktion $f \in (\Gamma, 2k-2)_0$ ist.

Die Herleitung von (9) aus (10) unter Benutzung von

$$\Psi(s, \zeta) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \Psi(1-s, \zeta)$$

darf dem Leser überlassen bleiben.

Literatur

1. Andrianov, A.N.: Eulerprodukte, die den Siegelschen Modulformen zweiten Grades entsprechen (russisch). Uspehi Matematičeskih Nauk **XXIX**, 43–110 (1974)
2. Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Inv. Math. **49**, 149–165 (1978)
3. Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112**, 664–699 (1936)
4. Hecke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung II. Math. Ann. **114**, 316–351 (1937)
5. Maaß, H.: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **232**, 163–175 (1978)
6. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. Inv. Math. **52**, 95–104 (1979)
7. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (II). Inv. Math. 53, 249–253 (1979)
8. Shimura, G.: On modular forms of half integral weight. Ann. Math. **97**, 440–481 (1973)

Eingegangen am 18. Juni 1979