Inventiones math. 53, 249–253 (1979)

Inventiones mathematicae

Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades (II)

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Im linearen Raum (Γ_2, k) der Modulformen zweiten Grades zur Siegelschen Modulgruppe Γ_2 und zum Gewicht $k \equiv 0 \pmod 2$ verdient eine Teilschar $\mathfrak{S}_k$ von Spitzenformen aus zahlentheoretischen Gründen ein besonderes Interesse. Eine Form

$$\chi(Z) = \sum_{T>0} a(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)} \qquad (\sigma = \text{Spur}) \tag{1}$$

dieser Schar ist gekennzeichnet durch die Koeffizientenrelationen

$$a(T) = \sum_{d/n,m,t} d^{k-1}\, a\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{2d} \\ \dfrac{t}{2d} & \dfrac{nm}{d^2} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dabei durchlaufe T alle halbganzen positiven Matrizen. Da der Koeffizient $a(T)$ nur von der Äquivalenzklasse von T abhängt: $a(T[U]) = a(T)$ für unimodulare Matrizen U, so besagen die Relationen (2) insbesondere, daß $a(T)$ nur von $e = \text{g.g.T.}(m, n, t)$ und $|T|$ abhängt. Überdies ist die Form χ durch ihre Koeffizienten $a(T)$ zu primitiven $T (e=1)$ bereits eindeutig bestimmt. Auf Grund umfangreicher Koeffiziententabellen wurden die Relationen (2) zuerst von Resnikoff und Saldaña [4] für die Eisensteinreihe φ_k und Igusas Spitzenformen χ_{10} und χ_{12} als Vermutung formuliert. Die weiter reichende Vermutung Kurokawas [2], daß $\dim \mathfrak{S}_k = \left[\dfrac{k-4}{6}\right]$ für $k \geqq 4$ ist, wurde durch Koeffiziententabellen für Spitzenformen bis zum Gewicht $k=20$ motiviert. Gezeigt werden konnte bisher nur, daß die Koeffizienten der Eisensteinreihe den Relationen (2) genügen. Der von mir angegebene Beweis – er beruht auf dreifach iterierter Induktion – ist vergleichsweise kompliziert. Ein einfacherer Beweis bietet sich auch für φ_k auf der Grundlage der Überlegungen in [3] sowie der vorliegenden Note an.

0020-9910/79/0053/0249/$01.00

Unlängst gelang mir der Nachweis der Ungleichung $\dim \mathfrak{S}_k \leqq \left[\frac{k-4}{6}\right]$ für $k \geqq 4$. Offen blieb die Frage, ob es überhaupt Formen $\chi \neq 0$ in $\mathfrak{S}_k$ gibt. Mit den in [3] dargelegten Ansätzen läßt sich jedoch, wie hier gezeigt werden soll, nicht nur die Existenzfrage konstruktiv beantworten, sondern sogar

$$\dim \mathfrak{S}_k = \left[\frac{k-4}{6}\right] \quad \text{für } k \geqq 4 \tag{3}$$

beweisen. Damit werden die formulierten Vermutungen von Resnikoff, Saldaña und Kurokawa in vollem Umfang bestätigt. Insbesondere liegen Igusas Spitzenformen χ_{10} und χ_{12} in der Spezialschar $\mathfrak{S}_{10}$ bzw. $\mathfrak{S}_{12}$.

Die Konstruktion der Formen $\chi \in \mathfrak{S}_k$ stützt sich auf die Entwicklung von χ nach Jacobischen Formen:

$$\chi(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(z_1, z)\, e^{2\pi i m z_2}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Tatsächlich ist χ bereits durch Θ_1 eindeutig bestimmt; in [3] wurde nämlich gezeigt, daß notwendig

$$\Theta_m(z_1, z) = \Theta_1 | T(m)(z_1, \sqrt{m}\, z) \tag{5}$$

ist, wenn die Wirkung des Heckeschen Operators $T(m)$ durch

$$\Theta_1 | T(m)(z_1, z) = m^{k-1} \sum_{\nu=1}^{r} \Theta_1 | S_\nu, \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = m \right\} = \bigcup_{\nu=1}^{r} \Gamma_1 S_\nu \tag{7}$$

definiert wird, wobei Γ_1 die Modulgruppe ersten Grades bezeichnet und allgemein

$$\Theta | S(z_1, z) = \Theta\left(S(z_1), \frac{\sqrt{m}\, z}{c z_1 + d}\right) e^{-2\pi i \frac{c z^2}{c z_1 + d}} (c z_1 + d)^{-k} \tag{8}$$

für reelle Substitutionen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Determinante $m > 0$ gesetzt wird. Durch Rechnung bestätigt man $(\Theta | M) | S = \Theta | (MS)$. Die Unabhängigkeit der Operation (6) von der Auswahl des Repräsentantensystems (S_ν) ist gewährleistet, wenn

$$\Theta_1 | M = \Theta_1 \qquad \text{für } M \in \Gamma_1 \tag{9}$$

gilt. Diese Transformationsinvarianz wiederum wird gemäß [1] durch Wahl von Θ_1 garantiert:

$$\Theta_1(z_1, z) = \sum_{h=0}^{1} c_h(z_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \left\{ z_1 \left(n + \frac{h}{2}\right)^2 + 2\left(n + \frac{h}{2}\right) z \right\}}. \tag{10}$$

Dabei sind c_0 und c_1 ganze Formen zur Hauptkonkruenzgruppe Γ_1 [4], zum Gewicht $k-\frac{1}{2}$ und zu gewissen Multiplikatorsystemen. Hinsichtlich einer genauen Beschreibung sei auf [3] verwiesen. Die Fourierentwicklung von c_h ist jedenfalls vom Typus

$$c_h(z_1) = \sum_{n-\frac{h}{4}\geqq 0} \gamma\left(n-\frac{h}{4}\right) e^{2\pi i\left(n-\frac{h}{4}\right) z_1} \qquad (h=0,1; n\in\mathbb{Z}), \tag{11}$$

und die Fourierkoeffizienten $\gamma\left(n-\frac{h}{4}\right)$ wachsen für $n\to\infty$ höchstens wie eine feste Potenz von $n-\frac{h}{4}$. Die Konvergenz aller gebildeten unendlichen Reihen ist daher leicht einzusehen. Die Jacobische Form Θ_1 kann nur dann zu einer Spitzenform χ führen, wenn $\Theta_1(z_1,z)\to 0$ für $\operatorname{Im} z_1\to\infty$ gilt. Gleichwertig damit ist $\gamma(0)=0$. Der lineare Raum der so ausgezeichneten Jacobischen Formen Θ_1 hat nach [3] die Dimension $\left[\frac{k-4}{6}\right]$; denn c_1 ist, wie in [3] gezeigt wurde, durch c_0 eindeutig bestimmt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß die mit einer ausgezeichneten Form Θ_1 gebildete Reihe (4) in $\mathfrak{S}_k$ liegt.

Gemäß Ansatz gestattet Θ_1 eine Fourierentwicklung der Art

$$\Theta_1(z_1,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha(n,t)\, e^{2\pi i(nz_1+tz)}, \tag{12}$$

wobei $\alpha(n,t)=0$ im Falle $t^2\geqq 4n$ ist. Um die Wirkung von $T(m)$ auf Θ_1 zu ermitteln, wählen wir das spezielle Repräsentantensystem $S=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$ mit $ad=m$, $d>0$, $b \bmod d$. Es ergibt sich

$$\Theta_1|T(m)(z_1,z) = m^{k-1}\sum_S\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\alpha(n,t)\, e^{2\pi i\left(n\frac{az_1+b}{d}+t\frac{\sqrt{m}\,z}{d}\right)} d^{-k},$$

also

$$\Theta_m(z_1,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\{\sum_{a/m} a^{k-1}\alpha(nd,t)\}\, e^{2\pi i(naz_1+taz)}.$$

Ersetzt man hierin na, ta durch n, t, so nimmt Θ_m die Gestalt

$$\Theta_m(z_1,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{a/m,n,t} a^{k-1}\alpha\left(\frac{mn}{a^2},\frac{t}{a}\right)\right\} e^{2\pi i(nz_1+tz)} \tag{13}$$

an. Auf Grund des Ansatzes (4) erweist sich $\chi(Z)$ nunmehr als eine in z_1, z_2 symmetrische Funktion. Überdies ist

$$\chi(Z+B)=\chi(Z) \qquad \text{für ganze symmetrische } B. \tag{14}$$

Mit Hilfe einer gegebenen Modulsubstitution $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_1$ bilden wir die Modulsubstitutionen zweiten Grades

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

und definieren in üblicher Weise

$$\Psi | M^*(Z) = \Psi((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) |CZ+D|^{-k} \qquad \text{für } M^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2.$$

Schließlich setzen wir noch

$$\Psi_m(Z) = \Theta_m(z_1, z)\, e^{2\pi i m z_2}, \tag{15}$$

so daß

$$\chi(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(Z) \tag{16}$$

wird. Wir zeigen die Invarianz von Ψ_m bezüglich M_1:

$$\begin{aligned} &\Psi_m | M_1(Z) \\ &\quad = \Theta_m \left(M(z_1), \frac{z}{\gamma z_1 + \delta} \right) e^{2\pi i m \left(z_2 - \frac{\gamma z^2}{\gamma z_1 + \delta}\right)} (\gamma z_1 + \delta)^{-k} \\ &\quad = \Theta_1 | T(m) \left(M(z_1), \frac{\sqrt{m}\, z}{\gamma z_1 + \delta} \right) e^{-2\pi i \frac{\gamma (\sqrt{m}\, z)^2}{\gamma z_1 + \delta}} (\gamma z_1 + \delta)^{-k} e^{2\pi i m z_2} \\ &\quad = m^{k-1} \sum_S \Theta_1 \Big| S \left(M(z_1), \frac{\sqrt{m}\, z}{\gamma z_1 + \delta} \right) e^{-2\pi i \frac{\gamma (\sqrt{m}\, z)^2}{\gamma z_1 + \delta}} (\gamma z_1 + \delta)^{-k} e^{2\pi i m z_2} \\ &\quad = m^{k-1} \sum_S (\Theta_1 | S) | M(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{2\pi i m z_2} \\ &\quad = m^{k-1} \sum_S \Theta_1 | (SM)(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{2\pi i m z_2} \\ &\quad = \Theta_1 | T(m)(z_1, \sqrt{m}\, z)\, e^{2\pi i m z_2} = \Psi_m(Z). \end{aligned} \tag{17}$$

Hier ist zu beachten, daß mit S auch SM ein Repräsentantensystem der in (7) angegebenen Art durchläuft. Zufolge (17) ist $\chi | M_1 = \chi$ und wegen der Symmetrie von $\chi(Z)$ in z_1, z_2 auch $\chi | M_2 = \chi$, also $\chi | M_1 M_2 = \chi$. Speziell für $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird $M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, wobei E die zweireihige Einheitsmatrix bezeichnet. Da Γ_2 aus den Modulsubstitutionen

$$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad (B \text{ ganz, symmetrisch}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt werden kann, erweist sich χ als eine Form zur Gruppe Γ_2 und zum Gewicht k. χ ist Spitzenform, da zufolge (13)

$$\chi(Z)=\sum_{T} a(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)} \tag{18}$$

mit

$$a\begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix} = \sum_{a|m,n,t} a^{k-1}\,\alpha\left(\frac{mn}{a^2}, \frac{t}{a}\right) \tag{19}$$

gilt, so daß $a(T)=0$ im Falle $T \not> 0$ wird. Insbesondere ist

$$a\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix} = \alpha(m,t).$$

Die Relationen (2) sind daher erfüllt; d.h. χ liegt in $\mathfrak{S}_k$. q.e.d.

Im folgenden sei $(\Gamma_n, k)_0$ für $n=1,2$ die Schar aller Spitzenformen in (Γ_n, k) und φ_k die normierte Eisensteinreihe in (Γ_2, k). Die in $(\Gamma_2, k)_0$ gelegenen Potenzprodukte $\chi_{10}^a \chi_{12}^b \varphi_4^c \varphi_6^d$ mit $a+b=1$ bzw. $a+b\geqq 2$ erzeugen einen Teilraum $\mathfrak{T}_k'$ bzw. $\mathfrak{T}_k''$. Wie schon in [2] ausgeführt wurde, ist $\dim \mathfrak{T}_k' = \left[\frac{k-4}{6}\right] = \dim(\Gamma_1, 2k-2)_0$ und $\mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{T}_k'' = \{0\}$. Ein Struktursatz von Igusa besagt ferner, daß $(\Gamma_2, k)_0 = \mathfrak{T}_k' \oplus \mathfrak{T}_k''$ ist. Nach einer Bemerkung des Referenten folgt hieraus bereits $\dim \mathfrak{S}_k \leqq \operatorname{codim} \mathfrak{T}_k'' = \dim \mathfrak{T}_k'$, also das Hauptergebnis von [3]. Darüber hinaus wurde in [3] bewiesen, daß der lineare Raum der Jacobischen Formen Θ_1 mit der Transformationsinvarianz $\Theta_1 | M = \Theta_1$ für $M \in \Gamma_1$ die Dimension $\left[\frac{k+2}{6}\right]$ hat. Erst auf Grund dieser Aussage ist es möglich, wie in der vorliegenden Note ausgeführt ist, $\dim \mathfrak{S}_k = \left[\frac{k-4}{6}\right]$ zu beweisen. Offenbar ist $(\Gamma_2, k)_0 = \mathfrak{S}_k \oplus \mathfrak{T}_k''$; d.h. es gibt in $\mathfrak{S}_k$ eine Basis, bestehend aus Formen der Art

$$\chi_{10}^a \chi_{12}^b \varphi_4^c \varphi_6^d + \psi_{a,b,c,d} \qquad \text{mit } a+b=1 \text{ und } \psi_{a,b,c,d} \in \mathfrak{T}_k''.$$

Der Tatsache, daß $\dim \mathfrak{S}_k = \dim(\Gamma_1, 2k-2)_0$ ist, dürfte einer Vermutung Kurokawas zufolge [2] eine tiefliegende Bedeutung zukommen.

Literatur

1. Eichler, M.: Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht. Math. Ann. **213**, 281–291 (1975)
2. Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Inv. Math. **49**, 149–165 (1978)
3. Maaß, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. Inv. Math. **52**, 95–104 (1979)
4. Resnikoff, H.L., Saldaña, R.L.: Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. J. f. d. reine u. angew. Math. **265**, 90–109 (1974)

Eingegangen am 24. April 1979