Inventiones math. 52, 95–104 (1979)

Inventiones mathematicae

Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades

Hans Maaß
Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Note ist der lineare Raum $\mathfrak{L}_k$ der Modulformen zweiten Grades φ zum Gewicht $k \equiv 0 \pmod 2$, deren Fourierkoeffizienten $a(T)$ den Relationen

$$a(T) = \sum_{\substack{d/n,m,t \\ d>0}} d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2d} \\ \frac{t}{2d} & \frac{nm}{d^2} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix} \tag{1}$$

genügen. Dabei durchlaufe T alle halbganzen semidefiniten von Null verschiedenen Matrizen. Es liegt auf der Hand, daß die Relation (1) für die Berechnung von Fourierkoeffizienten besondere Bedeutung hat (vgl. [4]). Die Eisensteinreihe φ_k ist zwar die einzige nachweislich in $\mathfrak{L}_k$ liegende Form (s. [3]); die umfangreichen Koeffiziententabellen von Resnikoff und Saldaña [7] sowie Kurokawa [2] lassen jedoch vermuten, daß weitere Formen in $\mathfrak{L}_k$ liegen. Jedenfalls stellt sich damit die Frage nach der Dimension von $\mathfrak{L}_k$. Auf Grund der Eigenschaften der Jacobischen Formen Θ_m in der Entwicklung

$$\varphi(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(z_1, z) e^{2\pi i m z_2}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

wird im folgendem die Abschätzung

$$1 \leqq \dim \mathfrak{L}_k \leqq \left[\frac{k+2}{6}\right] \qquad \text{für } k \equiv 0 \pmod 2, \qquad k \geqq 4 \tag{3}$$

bewiesen. $\mathfrak{L}_k$ ist demnach im linearen Raum (Γ_2, k) aller Formen zur Siegelschen Modulgruppe Γ_2 und zum Gewicht k nur schwach vertreten; denn es ist $\dim(\Gamma_2, k) \sim 2^{-6} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-1} \cdot k^3$ für $k \to \infty$. Jedenfalls ist $\dim \mathfrak{L}_k < \dim(\Gamma_2, k)$ für $k = 12$ und $k \geqq 16$ (s. auch [2]).

0020-9910/79/0052/0095/$02.00

Bezeichnet $\mathfrak{S}_k$ den Teilraum der Spitzenformen in $\mathfrak{L}_k$, so ist

$$\mathfrak{L}_k = \mathbb{C}\,\varphi_k \oplus \mathfrak{S}_k, \qquad \text{also } \dim \mathfrak{S}_k \leqq \left[\frac{k-4}{6}\right] \quad \text{für } k \geqq 4. \tag{4}$$

Eine einfache Abzählung zeigt, daß $\left[\frac{k-4}{6}\right]$ mit der Anzahl der Spitzenformen

$$\chi_{10}\,\varphi_4^a\,\varphi_6^b \quad \text{bzw.} \quad \chi_{12}\,\varphi_4^a\,\varphi_6^b \in (\Gamma_2, k) \tag{5}$$

übereinstimmt, wobei $a, b \geqq 0$, $4a+6b=k-10$ bzw. $k-12$ und χ_{10}, χ_{12} die von J. Igusa eingeführten Spitzenformen sind. Die Formen (5) liegen jedoch im allgemeinen nicht in $\mathfrak{S}_k$. Aus $\chi_{10}\,\varphi_4\,\varphi_6$, $\chi_{12}\,\varphi_4^2 \in \mathfrak{S}_{20}$ würde beispielsweise folgen, daß $\dim \mathfrak{S}_{20} = 2$ ist. Andererseits ist $\mathfrak{S}_{20}$ Unterraum des linearen Raumes aller Spitzenformen, deren Fourierkoeffizienten der Relation (1) nur für $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ genügen. Dieser Raum ist ebenfalls zweidimensional, wäre also mit $\mathfrak{S}_{20}$ identisch, und besitzt die Basis

$$\chi_{12}\,\varphi_4^2 + 1382400\,\chi_{10}^2, \qquad \chi_{10}\,\varphi_4\,\varphi_6 - 2903040\,\chi_{10}^2, \tag{6}$$

woraus $\chi_{10}^2 \in \mathfrak{S}_{20}$ folgen würde, was nicht zutrifft. Man vergleiche hierzu den Anhang. Einer Vermutung Kurokawas zufolge ist sogar $\dim \mathfrak{L}_k = \left[\frac{k+2}{6}\right]$.

Der Beweis von (3) beruht auf der Tatsache, daß jede Form $\varphi \in \mathfrak{L}_k$ durch die erste Jacobische Form Θ_1 bereits eindeutig bestimmt ist. Wie Eichler [1] gezeigt hat, ist

$$\Theta_1(\tau, u) = \sum_{h \bmod 2} c_h(\tau)\,\vartheta(\tau, u, h) \tag{7}$$

mit

$$\vartheta(\tau, u, h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \left\{\tau\left(n+\frac{h}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{h}{2}\right)u\right\}}. \tag{8}$$

Der durch Θ_1 eindeutig bestimmte Vektor $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ist als ganze vektorielle Modulform zur Modulgruppe ersten Grades $\Gamma = \Gamma_1$ und zum Gewicht $k - \frac{1}{2}$ in folgendem Sinne anzusprechen: Mit gewissen nicht ausgearteten zweireihigen Matrizen $C(M)$ für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ist

$$\mathfrak{c}\,|\,M(\tau) := \mathfrak{c}(M(\tau))(c\tau + d)^{\frac{1}{2}-k} = C(M)\,\mathfrak{c}(\tau). \tag{9}$$

Bezeichnet $\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}$ den linearen Raum der ganzen, durch (9) gekennzeichneten vektoriellen Formen, so ist also zu zeigen, daß die angegebene Abbildung $\mathfrak{L}_k \to \mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}$ injektiv ist. Das geschieht in § 1, während die Dimensionsformel $\dim \mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}} = \left[\frac{k+2}{6}\right]$ im Rahmen der Peterssonschen "analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen" in § 2 bewiesen wird.

Es sei noch bemerkt, daß Eichler in [1] die Abschätzung

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{6}{k} \dim \mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}} \leqq 1 \qquad \text{für } k \equiv 0 \pmod{k_0} \tag{10}$$

mit Hilfe von rein algebraischen Methoden erhalten hat. Dabei bezeichnet k_0 eine gewisse, nicht näher angegebene natürliche Zahl.

§ 1. Die Injektivität der Abbildung $\mathfrak{L}_k \to \mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}$

In der eingangs festgelegten Bezeichnung sei

$$\varphi(Z) = \sum_{T \geqq 0} a(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)} \in (\Gamma_2, k) \tag{11}$$

mit $\sigma(TZ) = n z_1 + m z_2 + t z$ eine gegebene Modulform. Wir vereinbaren $a(T) = 0$ zu setzen, wenn T nicht halbganz oder nicht semidefinit ist. Wir entwickeln φ auf Grund der Darstellung (11) in eine Reihe nach Potenzen von z:

$$\varphi(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\pi i z)^\nu}{\nu!} \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_\nu A_\nu(\varphi; n, m)\, e^{2\pi i (n z_1 + m z_2)}. \tag{12}$$

Dabei sei $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_\nu = 2$ für $\nu > 0$ und

$$\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi; n, m) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} a \begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix} t^\nu. \tag{13}$$

Wegen $k \equiv 0 \pmod 2$ ist φ eine gerade Funktion von z; die Summen (13) verschwinden daher für ungerade ν. Ein Vergleich mit

$$\varphi(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(z_1, z)\, e^{2\pi i m z_2} \tag{14}$$

ergibt

$$\Theta_m(z_1, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\pi i z)^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_\nu A_\nu(\varphi; n, m)\, e^{2\pi i n z_1}. \tag{15}$$

Gemäß Definition ist

$$\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi; n, 0) = \begin{cases} a \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } \nu = 0, \\ 0 & \text{für } \nu > 0 \end{cases}$$

und daher

$$\Theta_0(z_1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2\pi i n z_1} = \varphi \,|\, \phi(z_1), \tag{16}$$

wobei ϕ den Siegelschen Operator bezeichnet.

Die folgenden Rechnungen beschränken sich auf die Formen $\varphi \in \mathfrak{L}_k$; d.h. wir setzen (1) voraus, wobei entweder $n > 0$ oder $m > 0$ ist. Insbesondere ist also

$$a\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{d/n,\, d>0} d^{k-1} \qquad \text{für } n>0. \tag{17}$$

Bis auf einen konstanten Faktor sind dies die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe ersten Grades $\varphi_k|\phi$. Mit geeignetem $c\in\mathbb{C}$ ist daher $(\varphi-c\varphi_k)|\phi$ eine konstante Modulform, die wegen $k>0$ notwendig Null ist, woraus $\varphi-c\varphi_k\in\mathfrak{S}_k$ erhellt. Die Zerlegung $\mathfrak{L}_k=\mathbb{C}\varphi_k\oplus\mathfrak{S}_k$ ist damit bewiesen.

Im Fall $m>0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi; n, m) &= \sum_{t\in\mathbb{Z}} \sum_{d/n,m,t} d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2d} \\ \frac{t}{2d} & \frac{nm}{d^2} \end{pmatrix} t^\nu \\
&= \sum_{t\in\mathbb{Z}} \sum_{d/n,m} d^{k+\nu-1} a \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{nm}{d^2} \end{pmatrix} t^\nu \\
&= \sum_{d/n,m} d^{k+\nu-1} \varepsilon_\nu A_\nu\left(\varphi; 1, \frac{nm}{d^2}\right),
\end{aligned} \tag{18}$$

eine Formel, die auf einen Zusammenhang mit den Heckeschen Operatoren hinweist.

Für reelle Matrizen $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit positiver Determinante werde

$$\Theta_1|M(z_1,z)=\Theta_1\left(M(z_1), \frac{\sqrt{|M|}\, z}{cz_1+d}\right)(cz_1+d)^{-k} e^{-2\pi i \frac{cz^2}{cz_1+d}}$$

gesetzt. Allgemein ist dann $\Theta_1|(MS)=(\Theta_1|M)|S$. Wie Eichler [1] ausgeführt hat, genügt Θ_1 der Transformationsformel $\Theta_1|M=\Theta_1$ für $M\in\Gamma$. Mit den Repräsentanten S_ν der disjunkten Zerlegung

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{Z}, ad-bc=m\right\} = \bigcup_{\nu=1}^{r} \Gamma S_\nu$$

definieren wir zu gegebener natürlicher Zahl m den Operator $T(m)$ in herkömmlicher Weise durch

$$\Theta_1|T(m)=m^{k-1}\sum_{\nu=1}^{r}\Theta_1|S_\nu. \tag{19}$$

Da $T(m)$ von der Auswahl der Repräsentanten S_ν nicht abhängt, können wir mit folgendem System

$$\{S_1,S_2,\dots,S_r\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| ad=m,\ d>0,\ b \bmod d\right\}$$

rechnen:

$$\begin{aligned}\Theta_1|T(m)(z_1,z) &= m^{k-1}\sum_{d/m,\,d>0}\ \sum_{b \bmod d}\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i\sqrt{m}\,z}{d}\right)^{\nu}\\ &\quad\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi;n,1)e^{2\pi i n\frac{az_1+b}{d}}d^{-k}\\ &= \sum_{a/m,\,a>0} a^{k-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i\sqrt{m}\,z}{d}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi;dn,1)\,e^{2\pi i n a z_1}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i z}{\sqrt{m}}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{a/n,m} a^{k+\nu-1}\varepsilon_\nu A_\nu\left(\varphi;\frac{nm}{a^2},1\right)\right\}e^{2\pi i n z_1}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i z}{\sqrt{m}}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi;n,m)e^{2\pi i n z_1}=\Theta_m\left(z_1,\frac{z}{\sqrt{m}}\right).\end{aligned}\tag{20}$$

Hier wurde von der Symmetrie von $A_\nu(\varphi;n,m)$ in n,m Gebrauch gemacht. Zusammenfassend stellen wir fest:

$$\varphi(Z)=\varphi|\phi(z_1)+\sum_{m=1}^{\infty}\Theta_1|T(m)(z_1,\sqrt{m}\,z)\,e^{2\pi i m z_2}\qquad\text{für}\quad\varphi\in\mathfrak{L}_k.\tag{21}$$

Die Injektivität der Abbildung $\mathfrak{L}_k\to\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}$ ist damit bewiesen. Wenn nämlich die eingangs definierte vektorielle Form $\mathfrak{c}=0$ oder, damit gleichwertig, $\Theta_1=0$ ist, so ist auch $\varphi=0$.

§ 2. Die Dimension des Raumes $\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}$

Der Funktionszweig $(c\tau+d)^r$ in der oberen τ-Halbebene sei für reelle $(c,\ d)\neq(0,0)$ durch $-\pi<\arg(c\tau+d)\leq\pi$ festgelegt. Ferner sei

$$U=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad V=TU=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Dann ist $V^3=E$, wenn E die Einheitsmatrix bezeichnet. Da die Modulgruppe Γ von U und T erzeugt wird, so sind die Matrizen $C(M)$ in (9) durch $C(U)$ und $C(T)$ eindeutig bestimmt. Nach [1], S. 284, Formel (11) und (13) – letztere bedarf einer Korrektur – ist

$$C(U)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix},\qquad C(T)=e^{-\frac{\pi i}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.\tag{22}$$

Multipliziert man $\mathfrak{c}$ mit der dritten Potenz der elliptischen η-Funktion, so ergibt sich eine vektorielle Form

$$\mathfrak{g}=\begin{pmatrix}g\\g^*\end{pmatrix}:=\mathfrak{c}\,\eta^3\tag{23}$$

zu ganzzahligem Gewicht $h=k+1$. Da $\eta^3|M=v_1(M)\eta^3$ für $M\in\Gamma$ mit gewissen Multiplikatoren $v_1(M)$ ist, so treten mit $D(M)=v_1(M)\,C(M)$ die Transformationsformeln

$$\mathfrak{g}|M=D(M)\mathfrak{g}, \qquad D(MS)=D(M)\,D(S) \qquad \text{für } M,S\in\Gamma \tag{24}$$

an Stelle von (9) und mit $v_1(U)=e^{\frac{\pi i}{4}}$, $v_1(T)=e^{\frac{3\pi i}{4}}$ wird

$$D(U)=\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \qquad D(T)=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Wie Petersson [6] ausgeführt hat, erzeugen die parabolischen Transformationen

$$R_\infty=U, \qquad R_0=TU^4T^{-1}, \qquad R_{\frac{1}{2}}=(TU^{-2}T)\,U(TU^{-2}T)^{-1} \tag{26}$$

die Kongruenzgruppe $\Gamma_0[4]\subset\Gamma$. Der Index bezeichnet jeweils den Fixpunkt der betreffenden Transformation. Zwischen den Erzeugenden besteht genau eine Relation; sie lautet $R_\infty R_0 R_{\frac{1}{2}}=-E$. Eine kurze Rechnung ergibt

$$D(R_\infty)=\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \qquad D(R_0)=-E, \qquad D(R_{\frac{1}{2}})=\begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

damit allgemein $D(M)=\begin{pmatrix} v(M) & 0 \\ 0 & v^*(M) \end{pmatrix}$ für $M\in\Gamma_0[4]$, wobei v und v^* gewisse abelsche Charaktere von $\Gamma_0[4]$ bezeichnen. Verstehen wir unter (Γ_0, k_0, v_0) den linearen Raum der ganzen Formen zu einer Untergruppe $\Gamma_0\subset\Gamma$, zum Gewicht k_0 und zum Multiplikatorsystem v_0, so ist nun

$$g\in(\Gamma_0[4],h,v) \quad\text{und}\quad g^*\in(\Gamma_0[4],h,v^*) \tag{28}$$

bewiesen.

Das System der Transformationsformeln (24) wird offenbar durch

$$\begin{aligned} g|U&=e^{\frac{\pi i}{4}}g, & g^*|U&=e^{-\frac{\pi i}{4}}g^* \\ g|T&=\frac{i}{\sqrt{2}}(g+g^*), & g^*|T&=\frac{i}{\sqrt{2}}(g-g^*) \end{aligned} \tag{29}$$

vollständig beschrieben.

Es bezeichne F einen Fundamentalbereich von $\Gamma_0[4]$ mit den inäquivalenten parabolischen Spitzen ∞, 0, $\frac{1}{2}$. Da die Spitzenbreiten in F entsprechend 1, 4, 1 sind, so sind ∞, 0, $\frac{1}{2}$ Nullstellen von η^3 der Ordnungen $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$. Die Nullstellenordnungen ganzer Formen g, g^*, die den Transformationsformeln (24) genügen, sind in den Spitzen ∞, 0, $\frac{1}{2}$ entsprechend mindestens $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$. Das geht aus (27) unmittelbar hervor. $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\eta^3$ ist also genau dann ganz, wenn $\mathfrak{c}$ ganz ist.

Wir definieren nun g^* durch die erste Gleichung in der zweiten Zeile von (29). Für g ergibt sich dann nur eine zusätzliche Bedingung; sie lautet

$$0=g^*|U-e^{-\frac{\pi i}{4}}g^*=-i\sqrt{2}g|V-g|U+i\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}g|T+e^{-\frac{\pi i}{4}}g$$
$$=-i\sqrt{2}(g|V+g|V^{-1}+g)=-i\sqrt{2}g|(V+V^{-1}+E),$$

so daß der lineare Raum $\mathfrak{F}_h$ $(h=k+1)$ aller ganzen Formen g, die zu einer Lösung $\mathfrak{g}$ von (24) führen, wegen $V^3=E$ auch durch

$$\mathfrak{F}_h\colon g\in(\Gamma_0[4],h,v),\qquad g|(V^2+V+E)=0 \tag{30}$$

gekennzeichnet werden kann. Da die lineare Abbildung $\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}\to\mathfrak{F}_{k+1}$, definiert durch $\mathfrak{c}\to\mathfrak{g}\to g$, bijektiv, also $\dim\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}=\dim\mathfrak{F}_{k+1}$ ist, so braucht nur noch die Dimension von $\mathfrak{F}_h$ bestimmt zu werden.

Die Verzweigungsordnungen von v in den Spitzen ∞, 0, $\frac{1}{2}$ im Sinne der Peterssonschen Theorie [5] sind $\kappa_\infty=\frac{1}{8}$, $\kappa_0=\frac{1}{2}$, $\kappa_{\frac{1}{2}}=\frac{7}{8}$. Die Ordnung des Divisors (g_h) einer von Null verschiedenen Form $g_h\in\mathfrak{F}_h$ hat den Wert $\operatorname{ord}(g_h)=\frac{h}{2}$; denn $g_h^{24}\cdot\eta^{-48h}$ ist eine invariante Funktion zur Gruppe $\Gamma_0[4]$, so daß $24\operatorname{ord}(g_h)=48h\operatorname{ord}(\eta)=12h$ gilt. Es gibt also ein System von Punkten $\tau_\nu\in F$ $\left(\nu=1,2,\dots,\frac{h-3}{2}\right)$, so daß

$$(g_h)=(\infty)^{\frac{1}{8}}(0)^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2})^{\frac{7}{8}}(\tau_1)(\tau_2)\dots(\tau_{\frac{1}{2}(h-3)})\qquad\text{für } g_h\in\mathfrak{F}_h,\ g_h\neq 0. \tag{31}$$

Im folgenden seien g_5 und g_7 von Null verschieden fest gewählt. Eine solche Wahl ist wegen $1\leqq\dim\mathfrak{C}_{k-\frac{1}{2}}=\dim\mathfrak{F}_{k+1}$ sicher möglich. g sei eine beliebige Form $\in\mathfrak{F}_h$. Entwickelt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_5 & g_7 & g\\ g_5|T & g_7|T & g|T\\ g_5 & g_7 & g\end{vmatrix}=0$$

nach der letzten Zeile, so ergibt sich

$$f_0 g=f_1 g_5+f_2 g_7, \tag{32}$$

wobei f_ν $(\nu=0,1,2)$, vom Vorzeichen abgesehen, die zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\Omega=\begin{pmatrix} g_5 & g_7 & g\\ g_5|T & g_7|T & g|T\end{pmatrix} \tag{33}$$

sind. Da alle Formen in der ersten Zeile in Ω von $U-e^{\frac{\pi i}{4}}E$, $V+E+V^{-1}$, also auch $V+E-e^{-\frac{\pi i}{4}}T$ annulliert werden, so folgt

$$\Omega|T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\Omega,\qquad \Omega|U=\begin{pmatrix}e^{\frac{\pi i}{4}}&0\\-1&e^{-\frac{\pi i}{4}}\end{pmatrix}\Omega,$$

mithin $f_\nu|T=f_\nu|U=f_\nu$ für $\nu=0,1,2$. D.h. f_0, f_1, f_2 sind Modulformen zu den Gewichten 12, $h+7$, $h+5$. Alle drei Formen verschwinden in ∞ in mindestens erster Ordnung. Die Form $f_0=g_7|T\cdot g_5-g_5|T\cdot g_7$ kann nicht verschwinden; denn sonst wäre

$$\left.\frac{g_7}{g_5}\right|T=\frac{g_7}{g_5}, \quad \left.\frac{g_7}{g_5}\right|U=\frac{g_7}{g_5}, \tag{34}$$

also g_7/g_5 eine meromorphe Form zur Modulgruppe Γ und zum Gewicht 2, die im Fundamentalbereich F der Gruppe $\Gamma_0[4]$ nach (31) höchstens einen Pol erster Ordnung hat. Ein solcher Pol kann aber nicht auftreten, da g_7/g_5 wegen der Formeninvarianz bezüglich Γ sonst mindestens zwei verschiedene Pole in F hätte. Mithin wäre g_7/g_5 eine ganze von Null verschiedene Form in $(\Gamma, 2, 1)$. Eine solche Form gibt es jedoch nicht. Demnach ist $f_0=c\Delta$, wobei Δ die Diskriminante der elliptischen Funktionen und c eine von Null verschiedene Konstante bezeichnet. Die Nullstelle von Δ kürzt sich aus den Quotienten $q_{h-5}=f_1/f_0$ und $q_{h-7}=f_2/f_0$ heraus; d.h. es ist

$$g=q_{h-5}g_5+q_{h-7}g_7, \qquad q_a\in(\Gamma,a,1) \qquad \text{für } a=h-5,\ h-7.$$

Daß umgekehrt jede solche Form in $\mathfrak{F}_h$ liegt, ist evident. Die Darstellung ist im übrigen eindeutig, da sonst wieder (34) gelten würde, was nicht möglich ist. Damit ist

$$\mathfrak{F}_h=g_5(\Gamma,h-5,1)\oplus g_7(\Gamma,h-7,1) \tag{35}$$

bewiesen. Die bekannte Formel für $\dim(\Gamma,k,1)$ ergibt schließlich

$$\dim\mathfrak{F}_h=\left[\frac{h+1}{6}\right]=\left[\frac{k+2}{6}\right], \quad \text{q.e.d.}$$

Die der Eisensteinreihe φ_k zum Gewicht $k\in\{4,6,8\}$ entsprechende vektorielle Modulform c läßt sich explizit wie folgt bestimmen. Entwickelt man $\Theta_1(\tau,u)$ gemäß der Darstellung (7) in eine Potenzreihe nach u, so ergibt ein Vergleich der Koeffizienten mit denen in der Entwicklung (15), in der z_1, z durch τ, u zu ersetzen ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_0(\varphi_k;1,n)e^{2\pi in\tau}=\sum_{h=0}^{1}c_h(\tau)\,\vartheta_h(\tau),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_2(\varphi_k;1,n)e^{2\pi in\tau}=\frac{1}{\pi i}\sum_{h=0}^{1}c_h(\tau)\,\vartheta_h'(\tau)$$

mit den Thetanullwerten $\vartheta_h(\tau)=\vartheta(\tau,0,h)$, $h=0,1$. Nach Satz 1 in [4] folgt dann

$$c_0\vartheta_0+c_1\vartheta_1=a_k(1)E_k, \qquad c_0\vartheta_0'+c_1\vartheta_1'=\frac{a_k(1)}{2k}E_k',$$

wobei

$$E_k(\tau) = \varphi_k | \Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(n) e^{2\pi i n \tau}$$

die Eisensteinreihe ersten Grades bezeichnet. Beachtet man $\vartheta_0 \vartheta_1' - \vartheta_1 \vartheta_0' = \pi i \eta^6$, so ergibt sich schließlich

$$\mathfrak{c} = \frac{a_k(1)}{\pi i k} \eta^{-6} \begin{pmatrix} \vartheta_1' & -\frac{1}{2}\vartheta_1 \\ -\vartheta_0' & \frac{1}{2}\vartheta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k E_k \\ E_k' \end{pmatrix}.$$

Anhang

Im folgenden werden die Fourierkoeffizienten $a\begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix}$ einer Form φ abkürzend mit $a(n, m, t; \varphi)$ bezeichnet. Für $\varphi = 4\chi_{10}\varphi_4\varphi_6$, $12\chi_{12}\varphi_4^2$, $48\chi_{10}^2$ und $(n, m, t) = (1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(3, 3, 3)$, $(1, 7, 1)$ hat Kurokawa in [2] die Koeffizienten $a(n, m, t; \varphi)$ bestimmt. Seine Tabellen werden ergänzt durch

$$a(1, 4, 0; \varphi) = -5590464,\ 2679360,\ 0,$$

wobei entsprechend $\varphi = 4\chi_{10}\varphi_4\varphi_6$, $12\chi_{12}\varphi_4^2$, $16\chi_{10}^2$ ist. Mit unbestimmten x, y, z setzen wir

$$\chi = 12\chi_{12}\varphi_4^2 \cdot x + 4\chi_{10}\varphi_4\varphi_6 \cdot y + 16\chi_{10}^2 \cdot z, \qquad l = -1036800x + 725760y + z.$$

Es ergibt sich

$$a(2, 2, 0; \chi) - a(1, 4, 0; \chi) - 2^{19} a(1, 1, 0; \chi) = 6l$$

und, wie schon Kurokawa festgestellt hat,

$$a(2, 2, 2; \chi) - a(1, 3, 0; \chi) - 2^{19} a(1, 1, 1; \chi) = l,$$

$$a(3, 3, 3; \chi) - a(1, 7, 1; \chi) - 3^{19} a(1, 1, 1; \chi) = 672l.$$

Für $l = 0$ oder $z = 1036800x - 725760y$ erhalten wir den zweidimensionalen Raum der Spitzenformen

$$\chi = 12(\chi_{12}\varphi_4^2 + 1382400\chi_{10}^2)x + 4(\chi_{10}\varphi_4\varphi_6 - 2903040\chi_{10}^2)y$$

mit der Basis (6).

Literatur

1. Eichler, M.: Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht. Math. Ann. **213**, 281–291 (1975)
2. Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Inv. Math. **49**, 149–165 (1978)

3. Maaß, H.: Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **38**, no. 14 (1972)
4. Maaß, H.: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **232**, 163–175 (1978)
5. Petersson, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen II. Math. Ann. **115**, 175–204 (1938)
6. Petersson, H.: Über die Kongruenzgruppen der Stufe 4.J.f.d. reine und angew. Math. **212**, 63–72 (1963)
7. Resnikoff, H.L., Saldaña, R.L.: Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. J.f.d. reine und angew. Math. **265**, 90–109 (1974)

Eingegangen am 26. Januar 1979