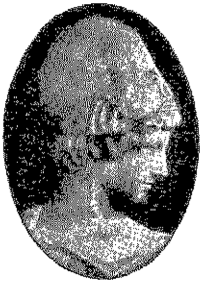
Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1940. 2. Abhandlung

Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen

Von
Hans Maaß
in Heidelberg

Eingegangen am 1. November 1939
und vorgelegt von August Becker
am 27. Januar 1940



HEIDELBERG 1940
Kommissionsverlag der Weiß'schen Universitätsbuchhandlung Heidelberg

Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen.

Von
Hans Maaß in **Heidelberg.**

Eine Begründung der Theorie der automorphen Formen von n Veränderlichen, wie sie durch die PETERSSON'schen Untersuchungen [1]) nahegelegt wird, erscheint umso aussichtsreicher, als sich die Methoden, die Herr SIEGEL beim Aufbau der Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades entwickelt hat [2]), mit dem gleichen Erfolg anwenden lassen auf eine umfassende Klasse von Gruppen simultaner linear gebrochener Substitutionen, d. h. hyperabelscher Transformationen, welche den Teilraum $\mathfrak{T}$ der komplexen Veränderlichen $\tau^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, definiert durch

$$(1) \qquad \mathfrak{Im}\, \tau^{(\nu)} > 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

in sich überführen. Zu diesen Gruppen gehört die einem total reellen Zahlkörper endlichen Absolutgrades zugeordnete HILBERTsche Modulgruppe, die nebst den zugehörigen Funktionen von Herrn BLUMENTHAL [3]) ausführlich untersucht worden ist. Als Hauptresultat dieser Untersuchung ergab sich, daß der Körper der HILBERT'schen Modulfunktionen mit einer endlichen Erweiterung einer rein transzendenten Erweiterung des Körpers der komplexen Zahlen von endlichem Transzendenzgrad isomorph ist. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf diffizile Betrachtungen über die Natur der Singularitäten analytischer Funktionen in mehreren

[1]) H. PETERSSON, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, Teil I—IV (Math. Annalen **115** (1938), S. 23—67, 175—204, 518—572, 670—709), Teil V (Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 127—156), im folgenden zitiert mit P I—V.

[2]) C. L. SIEGEL, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades (Math. Annalen **116** (1939), S. 617—657).

[3]) O. BLUMENTHAL, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen (erste Hälfte: Math. Annalen **56** (1903), S. 509—548; zweite Hälfte: Math. Annalen **58** (1904), S. 497—527), zitiert mit B I bzw. B II.

Veränderlichen. Es ist daher bemerkenswert, daß man nunmehr imstande ist, das oben genannte Theorem mit Hilfe der neuen SIEGEL'schen Methoden mit geringerem Aufwand in verständlicher Weise für alle Gruppen vom Typus der HILBERT'schen Modulgruppe herzuleiten. Dabei hat man allerdings zu beachten, daß der Begriff der automorphen Funktion enger als bisher üblich begrenzt werden muß. Während nämlich in B II[3]) als automorphe Funktion eine solche Funktion über dem Fundamentalbereich angesprochen wird, die sich — kurz gesagt — an jeder Stelle des Fundamentalbereiches meromorph verhält, wird jetzt eine automorphe Funktion als Quotient (ganzer) automorpher Formen beliebiger reeller Dimension erklärt. Insofern bleibt die Bedeutung der BLUMENTHAL'schen Untersuchungen, die auch für allgemeinere Gruppen Gültigkeit besitzen, in vollem Umfang erhalten.

Die vorliegende Arbeit dient einerseits dem Zweck, allgemeine Sätze von elementarem Charakter über Grenzkreisgruppen auf mehrere Veränderliche zu übertragen, andererseits der Konstruktion von brauchbaren Fundamentalbereichen. Insbesondere wird dabei folgendes ausgeführt: Eine beliebige Gruppe **G** von n simultanen Substitutionen

$$S = \{S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}\},$$

(2) $$S^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} & \beta^{(\nu)} \\ \gamma^{(\nu)} & \delta^{(\nu)} \end{pmatrix}, \quad |S^{(\nu)}| = 1, \; \alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}, \gamma^{(\nu)}, \delta^{(\nu)} \text{ reell}^{4)},$$

welche auf $\mathfrak{T}$ die Wirkung haben, einen beliebigen Punkt $\tau = \{\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}\}$ von $\mathfrak{T}$ in

(3) $$S\tau = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = \left\{\frac{\alpha^{(1)}\tau^{(1)} + \beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}\tau^{(1)} + \delta^{(1)}}, \ldots, \frac{\alpha^{(n)}\tau^{(n)} + \beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}\tau^{(n)} + \delta^{(n)}}\right\}$$

überzuführen, erweist sich genau dann als in $\mathfrak{T}$ diskontinuierlich, wenn **G** keine infinitesimalen Substitutionen enthält, d. h. wenn es in **G** keine Folge von Substitutionen gibt, die gegen die Identität konvergiert, außer wenn fast alle Substitutionen mit der Identität übereinstimmen[5]). Daraus erhellt sofort, daß z. B. die HILBERT'sche Modulgruppe diskontinuierlich ist. Außerdem gestattet dieses Kriterium, die wichtigen Sätze 1 und 2 in P I, S. 33 sinngemäß zu verallgemeinern. Setzt man

[4]) Die Gruppenkomposition ist die gewöhnliche Matrizenmultiplikation.

[5]) Vergl. H. WEYL, Die Idee der Riemannschen Fläche (Berlin 1923), im folgenden zitiert mit W —, S. 159.

(4) $$z^{(\nu)} = x^{(\nu)} + i\, y^{(\nu)}, \quad y^{(\nu)} = x^{(n+\nu)} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so kann man leicht zeigen, daß eine quadratische Differentialform

$$ds^2 = \sum_{\nu,\mu=1}^{2n} a_{\nu\mu}\, dx^{(\nu)}\, dx^{(\mu)}$$

$$(a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}\,(z))$$

durch die Forderung der Invarianz bei sämtlichen Substitutionen (2) und beliebiger Permutation der Veränderlichen $z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. ds^2 hat notwendig die Gestalt

(5) $$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(dx^{(\nu)})^2 + (dy^{(\nu)})^2}{(y^{(\nu)})^2}.$$

Da sich bekanntlich aus den soeben genannten Abbildungen alle Automorphismen von $\mathfrak{T}$, d. h. alle eineindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{T}$ auf sich zusammensetzen lassen, so ist also die dem Bereich $\mathfrak{T}$ zugeordnete, durch (5) erklärte nichteuklidische Metrik durch $\mathfrak{T}$ in natürlicher Weise eindeutig bestimmt. Die Tatsache, daß es zwischen zwei beliebigen Punkten von $\mathfrak{T}$ genau eine Verbindung kürzester nichteuklidischer Länge gibt, ermöglicht es, in $\mathfrak{T}$ in bescheidenem Umfange eine Geometrie zu betreiben. Dabei liegt die Schwerfälligkeit in der Behandlung auch schon einfacher geometrischer Fragen darin begründet, daß $\mathfrak{T}$ im Falle $n > 1$ relativ starr ist, d. h. eine Automorphismengruppe von nur geringer Parameterzahl besitzt. Es ist z. B. im allgemeinen unmöglich, zwei Punkte von $\mathfrak{T}$, die von einem dritten gleichen nichteuklidischen Abstand haben, durch einen Automorphismus von $\mathfrak{T}$, der den dritten Punkt festläßt, zur Deckung zu bringen. Die durch (5) definierte Maßbestimmung kann man zur Konstruktion eines Fundamentalbereiches für eine vorgelegte diskontinuierliche Gruppe $\mathbf{G}$ nutzbar machen, indem man nach bekanntem Vorbild (vergl. W, S. 154) alle Punkte von $\mathfrak{T}$, die einem festen Punkt aus einer geeigneten vollen Serie nach $\mathbf{G}$ äquivalenter Punkte im Sinne dieser Maßbestimmung am nächsten liegen, zu einer Menge zusammenfaßt. Diese Punktmenge, die einen Fundamentalbereich für $\mathbf{G}$ darstellt, zeigt im Innern von $\mathfrak{T}$ ein befriedigendes Verhalten, dagegen werden die Verhältnisse bei Annäherung an den Rand von $\mathfrak{T}$, sofern der Fundamentalbereich Punkte beliebig großer nichteuklidischer Entfernung besitzt, auch schon für $n = 1$ etwas undurchsichtig. Für funktionentheoretische Untersuchungen ist es aber wichtig zu wissen, wie sich, wenn überhaupt, ein Fundamentalbereich für $\mathbf{G}$ an den Rand von $\mathfrak{T}$ annähert. Bei allen bekannten Gruppen hat sich nun das BLUMENTHAL'sche Verfahren zur Konstruktion eines Fundamentalbereiches als zweckmäßig erwiesen (vergl. B I). Um auch für allgemeinere Gruppen, deren Existenz noch nicht gesichert ist, Aussagen machen zu können, wird man zunächst solche Gruppen $\mathbf{G}$ ins Auge fassen, deren Fundamentalbereich vom Typus der bekannten ist. Auf die in B I auseinander gesetzte, für die HILBERT'sche Modulgruppe durchgeführte Konstruktion eines brauchbaren Fundamentalbereiches komme ich im letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit zurück, um den in B I, S. 527, Teil Ie formulierten Satz, der in der angegebenen Allgemeinheit nicht behauptet werden kann, durch eine sinngemäße Betrachtung zu ersetzen [6]).

Die Aufstellung und Diskussion der Reihen, die analog zu den POINCARÉ'schen Reihen für Grenzkreisgruppen mit parabolischen Spitzen [7]) gebildet werden, sowie die neue Begründung der oben besprochenen, in B II bewiesenen Sätze werden zum Gegenstand einer weiteren Abhandlung gemacht.

§ 1. **Diskontinuierliche Substitutionsgruppen.**

Bezeichnung: Wir betrachten Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

von der Art (2) und verabreden, $S^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$, ... als die ν-ten Konjugierten von S, α, ... zu bezeichnen. Die Zeichen $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}$ für Spur- und Normbildung sollen dann in üblicher Weise Verwendung finden; so ist z. B.:

$$\mathbf{N}\gamma = \gamma^{(1)}\,\gamma^{(2)}\,\ldots\,\gamma^{(n)}, \quad \mathbf{S}\mu\iota = \mu^{(1)}\,\iota^{(1)} + \mu^{(2)}\,\iota^{(2)} + \cdots + \mu^{(n)}\,\iota^{(n)}.$$

Eine Relation, in welcher der Konjugiertenindex fehlt, soll für alle Konjugierten in gleicher Weise gelten.

Eine Gruppe $\mathbf{G}$ von Substitutionen heißt in $\mathfrak{T}$ diskontinuier-

[6]) Wie mir Herr BLUMENTHAL im Verlauf eines Briefwechsels mitteilte, genügt dann ein entsprechender einfacher Hinweis, um die Gültigkeit der Ergebnisse von B II auch weiterhin zu sichern.

[7]) H. PETERSSON, Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art POINCARÉ'scher Reihen (Math. Annalen **103** (1930), S. 369–436).

lich, wenn eine volle Serie nach **G** äquivalenter Punkte von $\mathfrak{T}$ sich im Innern von $\mathfrak{T}$ nicht häuft; dabei heißen zwei Punkte $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ aus $\mathfrak{T}$ nach **G** äquivalent, wenn es ein $S \subset \mathbf{G}$ gibt, sodaß $S\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$. Unter der Konvergenz einer Substitutionsfolge $S_1, S_2, \ldots$ soll Konvergenz sämtlicher Koeffizientenfolgen verstanden werden. Konvergiert die Folge $S_1, S_2, \ldots$ aus **G** gegen die Identität, d. h. ist

$$\lim_{m \to \infty} S_m = E,$$

und ist dabei $S_m \neq E$ für unendlich viele m, so sagt man, **G** enthält infinitesimale Substitutionen. Wir beweisen

Satz 1: *Eine Substitutionsgruppe* **G** *ist in* $\mathfrak{T}$ *genau dann diskontinuierlich, wenn* **G** *keine infinitesimalen Substitutionen enthält.*

Die Behauptung ist invariant gegenüber Transformation von $\mathfrak{T}$ mit einer beliebigen simultanen linear gebrochenen Substitution. Wir können und wollen uns daher zur Vereinfachung des Beweises $\mathfrak{T}$ in den Bereich

$$|\mathfrak{r}^{(\nu)}| < 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

übergeführt denken.

Wir zeigen zunächst, daß **G** in $\mathfrak{T}$ nicht diskontinuierlich ist, wenn **G** infinitesimale Substitutionen enthält. Dann gibt es nämlich eine Folge von Substitutionen $S_k \subset \mathbf{G}$, sodaß

$$\lim_{k \to \infty} S_k = E, \; S_k \neq E \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Wird $\mathfrak{r}_0 = \{0, \ldots, 0\}$ gesetzt, so ist

$$\lim_{k \to \infty} S_k\,\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0.$$

Daraus ergibt sich, daß **G** nicht diskontinuierlich ist; wenn unter den Punkten $S_k\,\mathfrak{r}_0$ unendlich viele verschiedene vorkommen, folgt dies sofort. Man braucht also nur noch den Fall zu untersuchen, daß für alle k

$$S_k\,\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0$$

gilt. Da S_k den Polyzylinder $\mathfrak{T}$ in sich überführt, hat S_k die Gestalt

$$S_k = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqq \varphi_k < 2\pi,$$

wobei φ_k nicht für alle Konjugierten verschwinden kann. Wählt man $\mathfrak{r}^{(\nu)} \neq 0$, $|\mathfrak{r}| < 1$, so ist $\mathfrak{r}$ Häufungspunkt der äquivalenten Punkte $S_k\,\mathfrak{r} = e^{2i\varphi_k}\,\mathfrak{r} \neq \mathfrak{r}$, q. e. d.

Jetzt wird **G** als nicht diskontinuierlich angenommen und daraus auf die Existenz von infinitesimalen Substitutionen geschlossen. Nach Voraussetzung gibt es nun in $\mathfrak{T}$ zwei Punktfolgen $t_k, t^*_k\ (k=1,2,\ldots)$ derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t^*_k = t_0, \quad |t_0| < 1$$

$$(6) \qquad t_k \neq t^*_k, \qquad t_k \neq t_l \qquad (k \neq l,\ k, l = 1, 2, \ldots),$$

$$S_k\, t_k = t^*_k, \quad S_k \subset \mathbf{G} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Wir diskutieren zunächst den Fall, daß in der Folge S_k nur endlich viele verschiedene Substitutionen vorkommen. Es darf dann auch noch angenommen werden, wovon bei den späteren Überlegungen kein Gebrauch mehr gemacht wird, daß $t^*_k = t_{k+1}$ und $t_0 = \{0, \ldots, 0\}$. Letzteres kann durch Transformation von $\mathbf{G}$ erreicht werden. Da man nötigenfalls aus der Folge S_k die ersten Substitutionen fortlassen kann, bedeutet es keine Einschränkung anzunehmen, daß jede Substitution S_k in der Folge unendlich oft vorkommt. Dann erschließt man aus (6):

$$S_k\, t_0 = t_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

also, da S_k den Bereich $\mathfrak{T}$ in sich überführt,

$$S_k = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$S_k\, t_k = e^{i\,2\varphi_k}\, t_k = t_{k+1}$$

kann aber dann die in (6) ausgesprochene Konvergenz nicht stattfinden. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß es in der Folge S_k unendlich viele verschiedene Substitutionen gibt. Wir können dann annehmen, daß sie alle untereinander verschieden sind, da man eine Teilfolge aussondern kann. Durch sukzessive Auswahl von Teilfolgen der Folge S_k erreichen wir die Konvergenz in jeder Komponente. Es genügt die Angabe der Teilfolge S_{k_m}, für welche $S^{(1)}_{k_m}$ konvergiert. Bei der genauen Durchführung ist eine Unterscheidung nach den möglichen Typen für $S^{(1)}_k$ erforderlich (vergl. W, S. 159ff). $\tau^{(\nu)}_{k1}, \tau^{(\nu)}_{k2}$ seien die Fixpunkte von $S^{(\nu)}_k$, die zusammenfallen, wenn $S^{(\nu)}_k$ parabolisch ist. Die Bezeichnung sei so vollzogen, daß stets

$$|\tau^{(\nu)}_{k1}| \leq 1;$$

ferner sei

$$\tau^* = S_k\, \tau.$$

Liegen alle $\tau_{k1}^{(1)}$ außerhalb einer vollen Umgebung von $t_0^{(1)}$, dann konvergiert $\pm S_k^{(1)}$ bei geeigneter Vorzeichenverteilung, wie die Betrachtungen in W, S. 160 lehren, gegen die Identität $E^{(1)}$. Eine gewisse Teilfolge der $S_k^{(1)}$ konvergiert somit gegen $E^{(1)}$ oder $-E^{(1)}$. Wenn aber $t_0^{(1)}$ Häufungspunkt der Fixpunkte $\tau_{k1}^{(1)}$, also etwa

$$\lim_{k\to\infty} \tau_{k1}^{(1)} = t_0^{(1)} \quad \text{und} \quad |\tau_{k1}^{(1)}| < 1,$$

dann folgt aus der Darstellung

$$\frac{1}{\tau^{*(1)} - \tau_{k1}^{(1)}} = \lambda_k^{(1)} + \mu_k^{(1)} \frac{1}{\tau^{(1)} - \tau_{k1}^{(1)}},$$

$$\mu_k^{(1)} = e^{i\,2\varphi_k^{(1)}}, \quad \lambda_k^{(1)} = \frac{\mu_k^{(1)} - 1}{\tau_{k1}^{(1)} - \tau_{k2}^{(1)}},$$

die auch für $\tau_{k2}^{(1)} = \infty$ gilt, daß

$$S_k^{(1)} = \pm \begin{pmatrix} \tau_{k1}^{(1)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_k^{(1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_k^{(1)}} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_k^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau_{k1}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Wegen der Beschränktheit von $\lambda_k^{(1)}$ läßt sich aus $S_k^{(1)}$ offenbar eine konvergente Teilfolge auswählen. Man kann daher in (6) annehmen, daß schon die erste Konjugierte von S_k konvergiert, und nach wiederholt angewendetem Verfahren, daß S_k überhaupt konvergiert. In $S_k\, S_{k+1}^{-1}$ hat man dann eine Folge von infinitesimalen Substitutionen, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

$\mathfrak{T}$ sei von jetzt an wieder der durch (1) definierte Bereich. Wir nennen eine Substitution S parabolisch bzw. elliptisch, wenn alle Komponenten von S parabolisch bzw. elliptisch sind; in jedem anderen Fall soll S hyperbolisch heißen. τ ist elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Fixpunkt einer Substitutionsgruppe $\mathbf{G}$, wenn $\mathbf{G}$ eine gleichnamige Substitution enthält, die τ als Fixpunkt hat. Die Untergruppe $\mathbf{A}$ der Substitutionen von $\mathbf{G}$, die den Punkt $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ als Fixpunkt haben, wird die affine Gruppe in $\mathbf{G}$ genannt; $\mathbf{A}$ enthält keine elliptischen Substitutionen. Die Substitutionen von $\mathbf{A}$ haben die Gestalt

(7) $$S = \begin{pmatrix} \lambda & \beta\,\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

$\lambda^2 = \{\lambda^{(1)\,2}, \ldots, \lambda^{(n)\,2}\}$ heißt der Multiplikator von S. Multiplikatoren $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn die Vektoren $\log \lambda_1^2$,

$\log \lambda_2^{\,2}, \ldots$ linear unabhängig sind. Durch $\lambda^2 = 1$ ist die Untergruppe **T** der (euklidischen) Translationen von **A** erklärt. Die Faktorgruppe **A** mod **T** ist abelsch und isomorph der Gruppe der Multiplikatoren. Bezeichnen wir generell:

$$U^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

so wird also

$$S = U^\beta D_\lambda. \tag{8}$$

Transformation einer Translation

$$S_1 = U^\alpha D_{\lambda_1}, \quad \lambda_1^{\,2} = 1 \tag{9}$$

mit S liefert das Resultat

$$S^{-1} S_1 S = D_{\lambda^{-1}} \; U^\alpha D_\lambda D_{\lambda_1} = U^{\alpha \lambda^{-2}} D_{\lambda_1}.$$

Damit ist gezeigt: Mit α ist auch $\alpha \lambda^2$ eine Translation von **A** (im Sinne von (9)), wenn λ^2 ein beliebiger Multiplikator von **A**. Die Substitutionen D_{λ_1} mit $\lambda_1^{\,2} = 1$, welche mit allen anderen vertauschbar sind, werden erzeugt von den n Substitutionen E_k $(k = 1, \ldots, n)$, die wie folgt definiert sind:

$$E_k^{(k)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_k^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\nu \neq k).$$

Wir können und wollen voraussetzen, daß jede diskontinuierliche Gruppe **G** die Substitutionen E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ enthält. Ist dann α eine Translation von **A**, so gilt also

$$U^\alpha \subset \mathbf{T}.$$

Sämtliche Translationen von **A** bilden einen Modul; es handelt sich dabei wegen der Diskontinuität von **G** um ein diskretes Gitter, welches, wie jetzt zusätzlich gefordert wird, von n unabhängigen Translationen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ erzeugt werden soll. $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ bezeichne allgemein den von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ erzeugten Modul. Ist λ^2 ein Multiplikator von **A**, so folgt wegen

$$\alpha_i \lambda^2 \subset [\alpha_1, \ldots, \alpha_n],$$

daß

$$\alpha_i \lambda^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda^2)\, \alpha_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

mit ganz rationalen $a_{ik}(\lambda^2)$. Durch

$$\lambda^2 \to (a_{ik}(\lambda^2))$$

ist eine isomorphe Abbildung der Multiplikatorengruppe gegeben; $(a_{ik}(\lambda^2))$ ist daher eine unimodulare Matrix. Aus den Gleichungen (10), die ja für alle Konjugierten gelten, folgt die Matrizengleichung

$$(\alpha_i^{(k)}\,\lambda^{(k)\,2}) = (a_{ik}(\lambda^2))\;(\alpha_i^{(k)}),$$

woraus erhellt, daß

$$\text{(11)}\qquad \mathsf{N}\,\lambda^2 = \prod_{k=1}^{n} \lambda^{(k)\,2} = |\,a_{ik}(\lambda^2)\,| = +1\,.$$

Wegen der Unabhängigkeit der α_i $(i = 1, \ldots, n)$ ergibt sich aus (10) für λ^2 eine algebraische Gleichung der Gestalt

$$\text{(12)}\qquad |\,a_{ik}(\lambda^2) - \delta_{ik}\,\lambda^2\,| = 0\,,$$

wobei δ_{ik} das KRONECKERsymbol bedeutet.

Die $\lambda^{(\nu)\,2}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sind demnach algebraische Einheiten vom absoluten Grad höchstens n. Es kann nach (11) nicht mehr als $n-1$ unabhängige Multiplikatoren von $\mathbf{A}$ geben. Wird diese Höchstzahl erreicht, so heißt $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ eine parabolische Spitze von $\mathbf{G}$. Durchläuft λ^2 alle Multiplikatoren von $\mathbf{A}$, so bilden die Vektoren $\log \lambda^2$ ein diskretes Gitter, da andernfalls $\mathbf{G}$ infinitesimale Substitutionen enthält; mithin besitzt die Gruppe der Multiplikatoren eine Basis $\lambda^2_1, \ldots, \lambda^2_{n-1}$. Allgemein heißt $s = \{s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}\}$ eine parabolische Spitze von $\mathbf{G}$, wenn für eine gewisse Substitution A, welche $\mathfrak{T}$ in sich überführt,

$$A\,s = \infty$$

gilt und ∞ für die transformierte Gruppe $A\,\mathbf{G}\,A^{-1}$ parabolische Spitze ist.

Für Gruppen mit parabolischen Spitzen beweisen wir jetzt einige wichtige Sätze (vergl. P I, S. 33). Sei fortan ∞ parabolische Spitze von $\mathbf{G}$, α eine Translation aus $\mathbf{A}$, die nicht identisch verschwindet, dann ist

$$\alpha^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Wenn nämlich etwa $\alpha^{(1)} = 0$ wäre, so würde man in $\mathbf{A}$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Substitution mit dem Multiplikator λ^2 derart bestimmen können, daß

$$\lambda^{(\nu)\,2} < \varepsilon \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)\,,$$

und hätte für $\varepsilon \to 0$ in $\alpha\,\lambda^2$ eine Folge von infinitesimalen Translationen. Außer ∞ sei auch noch $A^{-1}\,\infty = s$ parabolische Spitze von $\mathbf{G}$. Wenn dann $S_0 \in A\,\mathbf{G}$ und $\underline{S_0} = (c_0, d_0)$ die zweite Zeile der Substitution S_0, so gilt $c_0^{(\nu)} \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, außer wenn alle Konjugierten von c_0 verschwinden. Zum Beweise bezeichnen wir mit

(13) $$\mathfrak{t}_\infty = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{t}_s = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$$

die Translationsmoduln aus den affinen Gruppen von $\mathbf{G}$ bzw. $A\,\mathbf{G}\,A^{-1}$ und beachten, daß für $\alpha \in \mathfrak{t}_\infty$ und $\beta \in \mathfrak{t}_s$ wegen

$$S_0 = A\,L, \quad L \in \mathbf{G}$$

auch

(14) $$S = U^\beta S_0 U^\alpha = A\,(A^{-1} U^\beta A)\,L\,U^\alpha \in A\,\mathbf{G}$$

gilt. Mit

$$S_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

(15) $$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \beta c_0 & b_0 + \beta d_0 + \alpha a_0 + \beta a_0 c_0 \\ c_0 & d_0 + \alpha c_0 \end{pmatrix}.$$

Wir führen die Annahme $c_0^{(1)} = 0$ und etwa $c_0^{(2)} \neq 0$ zu einem Widerspruch. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ lassen sich α und β nicht beide verschwindend so bestimmen, daß

$$|\beta^{(1)} d_0^{(1)} + \alpha^{(1)} a_0^{(1)}| < \varepsilon,$$
$$|\beta^{(\nu)}| < \varepsilon, \; |\alpha^{(\nu)}| < \varepsilon \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Das geht nach einem bekannten Satz von MINKOWSKI. Macht man nämlich den Ansatz

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\alpha_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\beta_k,$$

so sind die x_k, y_k $(k = 1, \ldots, n)$ nicht sämtlich verschwindend ganzzahlig so zu bestimmen, daß die Ungleichungen

$$\left| a_0^{(1)} \sum_{k=1}^{n} x_k\,\alpha_k^{(1)} + d_0^{(1)} \sum_{k=1}^{n} y_k\,\beta_k^{(1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k\,\alpha_k^{(\nu)} \right| < \varepsilon, \; \left| \sum_{k=1}^{n} y_k\,\beta_k^{(\nu)} \right| < \varepsilon \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Das geht in der Tat, weil die Zahl der Variablen die Zahl der Ungleichungen um eins übertrifft. Da α und β Translationen zu parabolischen Spitzen sind, ist also entweder $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$ (für alle Konjugierten!). Zu jedem $\varepsilon_k > 0$ einer vorgelegten Nullfolge bestimme man in der angegebenen Weise

α, β und dazu nach (15) die Substitution $S = S_k$. Nach Konstruktion ist entweder $a_0^{(2)} \neq a^{(2)}$ oder $d_0^{(2)} \neq d^{(2)}$, also $S_k \neq S_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Es ist aber

$$\lim_{k \to \infty} S_k = S_0 ,$$

woraus nach (14), wenn man nur $l = l\,(k)$ groß genug wählt, für $\mathbf{G}$ eine Folge $S_k^{-1}\, S_l$ infinitesimaler Substitutionen resultiert, was nicht sein darf. Damit ist festgestellt, daß $c_0^{(\nu)} \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Darüber hinaus beweisen wir jetzt

Satz 2: *Sind* $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ *und* $A^{-1}\,\infty = s$ *parabolische Spitzen einer diskontinuierlichen Substitutionsgruppe* $\mathbf{G}$ *und ist*

$$S \subset A\,\mathbf{G}, \quad \underline{S} = (c, d),$$

so gilt entweder $c = 0$ *oder* $|\mathbf{N}\, c| > \varrho > 0$ *mit einer nur von* A *und* $\mathbf{G}$ *abhängigen positiven Konstanten* ϱ.

Wir führen den Beweis indirekt. Sei also

$$S_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \subset A\,\mathbf{G} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

eine Folge mit $c_k \neq 0$ und

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{N}\, c_k = 0 .$$

Es kann dann angenommen werden, daß auch

$$\lim_{k \to \infty} c_k^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt; denn S_k kann linksseitig mit einer Substitution $U^\alpha\, D_\lambda$ aus der affinen Gruppe von $A\,\mathbf{G}\,A^{-1}$ multipliziert werden; dabei geht c_k in $c_k\,\lambda^{-1}$ über und über λ^{-1} kann geeignet verfügt werden (vergl. B I, S. 535, Teil Ig). Wir setzen mit $\alpha \subset \mathfrak{t}_\infty$ und $\beta \subset \mathfrak{t}_s$:

$$\begin{aligned} S_k^* = \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \\ c_k^* & d_k^* \end{pmatrix} &= U^\beta\, S_k\, U^\alpha \\ &= \begin{pmatrix} a_k + \beta\, c_k & b_k + \beta\, d_k + \alpha\, a_k + \beta\, a_k\, c_k \\ c_k & d_k + \alpha\, c_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bestimmen zu jedem k die Translationen α, β derart, daß sämtliche Ungleichungen

$$|a_k^* - 1| = \left|\frac{a_k - 1}{c_k} + \beta\right| \cdot |c_k| \leqq \varkappa_1\, |c_k|$$

$$|d_k^* - 1| = \left|\frac{d_k - 1}{c_k} + \alpha\right| \cdot |c_k| \leqq \varkappa_2\, |c_k|$$

mit nur von A und $\mathbf{G}$ abhängigen Konstanten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ erfüllt werden. Es ist dann

$$|b_k^* c_k^*| = |a_k^* d_k^* - 1| = |(a_k^* - 1)(d_k^* - 1) + (a_k^* - 1) + (d_k^* - 1)|$$
$$\leqq \varkappa_1 \varkappa_2 |c_k|^2 + \varkappa_1 |c_k| + \varkappa_2 |c_k|,$$

also

$$|b_k^*| \leqq \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 |c_k|,$$

d. h. b_k^* beschränkt. Indem wir uns nötigenfalls eine konvergente Teilfolge ausgewählt denken, kann bereits die Konvergenz von b_k^* und damit auch von S_k^* angenommen werden. Setzt man

$$a_k^* = 1 + \varepsilon_k, \quad \text{wobei also } |\varepsilon_k| \leqq \varkappa_1 |c_k|,$$

so konvergiert

$$S_k^{*-1} S_l^* = \begin{pmatrix} a_{kl} & b_{kl} \\ c_{kl} & d_{kl} \end{pmatrix} \quad (\in \mathbf{G})$$

mit

$$c_{kl} = -c_k^* (1 + \varepsilon_l) + c_l^* (1 + \varepsilon_k)$$

für $l \geqq k$, $k \to \infty$ gegen die Identität. Für $k \geqq k_0$ sei $|\varepsilon_k| < \frac{1}{2}$ und damit

$$|c_{kl}| > \tfrac{1}{2} |c_k^*| - \tfrac{3}{2} |c_l^*|.$$

Wählt man $l = l(k)$ so, daß

$$|c_k^*| > 3 |c_l^*|,$$

dann erhält man eine Folge infinitesimaler Substitutionen, was mit der Diskontinuität von $\mathbf{G}$ im Widerspruch steht. Satz 2 ist damit bewiesen.

§ 2. Maßbestimmung. Fundamentalbereiche.

Wir versuchen, die Koeffizienten $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}(\mathfrak{z})$ der Differentialform

$$ds^2 = \sum_{\nu, \mu = 1}^{2n} a_{\nu\mu}\, dx^{(\nu)}\, dx^{(\mu)}$$
$$(z^{(\nu)} = x^{(\nu)} + i y^{(\nu)},\; y^{(\nu)} = x^{(n+\nu)},\; \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in Abhängigkeit von $\mathfrak{z}$ so zu bestimmen, daß ds bei allen Automorphismen von $\mathfrak{T}$ invariant bleibt, d. h. daß

$$ds(\mathfrak{z}, d\mathfrak{z}) = ds\left(S\mathfrak{z}, \frac{dS\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}\right)$$

gilt. Wir wählen insbesondere

1. $S\tau = \tau + \alpha$, α beliebig reell,
2. $S\tau = \lambda^2\tau$, λ beliebig reell und positiv,
3. $S = S_\tau$ als „nichteuklidische Drehung“ um den Winkel $\varphi = \{\varphi^{(\nu)}\}$ mit τ als Fixpunkt, d. h. es gilt $S\tau = \tau$ und $\frac{dS(\tau)}{d\tau} = e^{i\varphi}$, φ beliebig reell.

Entsprechend ist also zu fordern:

$$\begin{aligned} &1.\ ds\,(\tau, d\tau) = ds\,(\tau - \alpha, d\tau) \\ &2.\ ds\,(\tau, d\tau) = ds\,(\lambda^2\tau, \lambda^2 d\tau) \\ &3.\ ds\,(\tau, d\tau) = ds\,(\tau, e^{i\varphi}\, d\tau), \end{aligned}$$

also

$$ds\,(\tau, d\tau) = ds\,(iy, \ |d\tau|) = ds\left(i, \frac{|d\tau|}{y}\right).$$

Es gilt demnach:

$$ds^2 = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\,(i)\,\frac{|d\tau^{(\nu)}|\,|d\tau^{(\mu)}|}{y^{(\nu)}\,y^{(\mu)}}.$$

Damit ds^2 eine quadratische Differentialform wird, muß notwendig $a_{\nu\mu}(i) = 0$ für $\nu \neq \mu$ gelten. Die Invarianz von ds bei beliebigen Permutationen der Veränderlichen $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ hat zur Folge

$$a_{11}\,(i) = a_{\nu\nu}\,(i) \qquad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Die so gefundene normierte Form

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\tau^{(\nu)}\ \overline{d\tau^{(\nu)}}}{y^{(\nu)2}} \tag{16}$$

hat auch wirklich die geforderte Invarianzeigenschaft.

Wir deuten ds als Bogenelement in $\mathfrak{T}$ und beschäftigen uns mit der durch (16) erklärten nichteuklidischen Metrik. Die der Form (16) zugeordnete, gegenüber Automorphismen von $\mathfrak{T}$ invariante bilineare Differentialform

$$d\tau_1 \circ d\tau_2 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\tau_1^{(\nu)}\ \overline{d\tau_2^{(\nu)}} + d\tau_2^{(\nu)}\ \overline{d\tau_1^{(\nu)}}}{2\,y^{(\nu)2}} \tag{17}$$

gestattet, vermöge

$$\frac{d\tau_1 \circ d\tau_2}{\sqrt{d\tau_1 \circ d\tau_1}\ \sqrt{d\tau_2 \circ d\tau_2}} = \cos\,(d\tau_1, d\tau_2) \tag{18}$$

in $\mathfrak{T}$ ein invariantes Winkelmaß zu definieren. Beim Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Verbindungskurve zweier Punkte τ_0, τ_1 von $\mathfrak{T}$ von kürzester nichteuklidischer Länge können τ_0, τ_1 in der speziellen Lage

$$\tau_0 = i, \quad \tau_1 = iy_1, \quad y_1 \geqq 1$$

angenommen werden. $\tau = \tau(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ sei die noch hypothetische geodätische Verbindung. Bezeichnet man generell mit $s(\tau_0, \tau_1)$ die nichteuklidische Länge dieser Kurve, so gilt also

$$s(\tau_0, \tau_1) = \int_0^1 \sqrt{\mathsf{S}\,\frac{\dot{\tau}\,\dot{\bar{\tau}}}{y^2}}\,dt \geqq \int_0^1 \sqrt{\mathsf{S}\,\frac{\dot{y}^2}{y^2}}\,dt.$$

($\dot{}$ bedeutet Differentiation nach t.)

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\dot{x} = 0$, also auch $x = 0$ für $0 \leqq t \leqq 1$; diese Gleichungen müssen für die Geodätische erfüllt sein, da man sonst in $iy(t)$ eine kürzere Verbindung als in $\tau(t)$ hätte. Die Funktionen $Y(t) = \log y(t)$ mit den Anfangs- und Endwerten $Y(0) = 0$, $Y(1) = \log y_1$ sind dadurch eindeutig bestimmt, daß sie

$$s(\tau_0, \tau_1) = \int_0^1 \sqrt{\mathsf{S}\,\dot{Y}^2}\,dt$$

zum (absoluten) Minimum machen. Als Lösung ergibt sich im Y-Raum eine Strecke durch den Nullpunkt mit den Richtungskosinus

$$c^{(\nu)} = \frac{\log y_1^{(\nu)}}{\sqrt{\mathsf{S}\,(\log y_1)^2}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

und der Länge

$$s(\tau_0, \tau_1) = \sqrt{\mathsf{S}\,(\log y_1)^2}.$$

Die Kurve

$$x = 0, \quad y^{(\nu)} = \left(y^{(1)}\right)^{\frac{c^{(\nu)}}{c^{(1)}}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

$c^{(1)} \neq 0$ vorausgesetzt, stellt auch wirklich die gesuchte Geodätische dar. $\log y_1^{(\nu)}$ ist der Wert des Abstandes der Punkte i und $iy_1^{(\nu)}$, berechnet in der bekannten hyperbolischen Maßbestimmung für die obere $\tau^{(\nu)}$-Halbebene, den wir allgemein mit $s^{(\nu)}(\tau_0^{(\nu)}, \tau_1^{(\nu)})$ bezeichnen. Wegen der Invarianz dieser Abstände ist also

$$s(\tau_0, \tau_1)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} s^{(\nu)}(\tau_0^{(\nu)}, \tau_1^{(\nu)})^2 \tag{21}$$

für zwei beliebige Punkte τ_0, τ_1 von $\mathfrak{T}$. Wählt man wieder $\tau_0 = i$ und berechnet die partiellen Ableitungen von

$$s^{(\nu)}(\tau_0^{(\nu)}, \tau^{(\nu)}) = \log \frac{|\tau^{(\nu)} + i| + |\tau^{(\nu)} - i|}{|\tau^{(\nu)} + i| - |\tau^{(\nu)} - i|}$$

nach $x^{(\nu)}$ und $y^{(\nu)}$ im Punkte $\tau_1^{(\nu)} = i y_1^{(\nu)}$, $y_1^{(\nu)} \geqq 1$, so erhellt, daß

$$(22) \qquad s(\tau_0, \tau_1 + d\tau) - s(\tau_0, \tau_1) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{s^{(\nu)}(\tau_0^{(\nu)}, \tau_1^{(\nu)})}{s(\tau_0, \tau_1)} \cdot \frac{dy^{(\nu)}}{y_1^{(\nu)}}.$$

Andererseits gilt für das Differential $d\tau_1 = dx_1 + i\,dy_1$ der Geodätischen von τ_0 nach τ_1 im Punkte τ_1 nach (20) und (19):

$$dx_1 = 0, \quad \frac{dy_1^{(\nu)}}{y_1^{(\nu)}} = \frac{c^{(\nu)}}{c^{(1)}} \frac{dy_1^{(1)}}{y_1^{(1)}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(23) \quad d\tau \circ d\tau_1 = \frac{1}{c^{(1)}} \frac{dy_1^{(1)}}{y_1^{(1)}} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} c^{(\nu)} \frac{dy^{(\nu)}}{y_1^{(\nu)}}, \quad \sqrt{d\tau_1 \circ d\tau_1} = \frac{1}{c^{(1)}} \cdot \frac{dy_1^{(1)}}{y_1^{(1)}}.$$

Beachtet man noch, daß

$$c^{(\nu)} = \frac{s^{(\nu)}(\tau_0^{(\nu)}, \tau_1^{(\nu)})}{s(\tau_0, \tau_1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so folgt aus (22), (23)

$$(24) \qquad s(\tau_0, \tau_1 + d\tau) - s(\tau_0, \tau_1) = \sqrt{d\tau \circ d\tau} \cdot \cos(d\tau, d\tau_1).$$

Wegen beiderseitiger Invarianz bei den Automorphismen von $\mathfrak{T}$ gilt (24) für zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{T}$.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{h}$ der Punkte τ von $\mathfrak{T}$, welche von zwei gegebenen Punkten τ_1, τ_2 gleichen Abstand haben, für welche also

$$(25) \qquad s(\tau_1, \tau) = s(\tau_2, \tau) \qquad (\tau_1 \neq \tau_2)$$

gilt, hat in jedem ihrer Punkte τ_0 eine Tangentialhyperebene. Ist nämlich $\tau_0 + d\tau$ ein auf $\mathfrak{h}$ gelegener Nachbarpunkt von τ_0, so gilt nach (24)

$$(26) \qquad \cos(d\tau_1, d\tau) = \cos(d\tau_2, d\tau),$$

wobei $d\tau_k$ das Differential der Geodätischen $\mathfrak{g}_k$ von τ_k nach τ_0 $(k = 1, 2)$ im Punkte τ_0; das ist aber für $d\tau$ eine lineare Gleichung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten; denn die Geodätischen von τ_0 nach τ_1 und τ_2 genügen Differentialgleichungen 2. Ordnung, sind also durch Anfangspunkt und -richtung eindeutig bestimmt und können daher nicht in gleicher Richtung durch τ_0 gehen. $\mathfrak{h}$ wird von den beiden Geodätischen $\mathfrak{g}_k$ im Punkt

τ_0 unter einem von 0 verschiedenen Winkel durchsetzt. Entsprechend der Tatsache, daß

$$\varDelta = s(\tau_1, \tau) - s(\tau_2, \tau)$$

größer oder kleiner als 0 ist, zerfallen die nicht auf $\mathfrak{h}$ gelegenen Punkte von $\mathfrak{T}$ in zwei Klassen $\mathfrak{K}_+$ und $\mathfrak{K}_-$. Die Punkte jeder dieser Klassen sind innerhalb der betreffenden Klasse verbindbar. Die „Dreiecksungleichung" hat nämlich zur Folge, daß eine Geodätische durch τ_1 oder τ_2 höchstens einen Punkt mit $\mathfrak{h}$ gemeinsam hat. Andererseits kann auf einer Geodätischen $\mathfrak{g}$ durch τ_2 und einen Punkt τ, der näher an τ_2 als an τ_1 liegt, zwischen τ_2 und τ nur eine gerade Anzahl von Punkten von $\mathfrak{h}$ liegen, da in jedem solchen Punkt $\varDelta$ das Vorzeichen wechselt und $\varDelta$ in τ und τ_2 positiv ist. Es kann also auf $\mathfrak{g}$ zwischen τ_2 und τ Punkte von $\mathfrak{h}$ garnicht geben; folglich gehören mit τ auch alle Punkte von $\mathfrak{g}$ zwischen τ und τ_2 zu $\mathfrak{K}_+$, woraus die Behauptung über den Zusammenhang von $\mathfrak{K}_+$ und $\mathfrak{K}_-$ erhellt. Ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{K}_+$ kann mit einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{K}_-$ nicht verbunden werden, ohne daß man dabei $\mathfrak{h}$ trifft: auf einer beliebigen Verbindungskurve wechselt nämlich $\varDelta$ mindestens einmal das Vorzeichen.

Wir geben jetzt für eine diskontinuierliche Gruppe $\mathbf{G}$ die eingangs erwähnte Konstruktion eines Fundamentalbereiches an. Vorweg zeigen wir noch, daß kein Punkt von $\mathfrak{T}$ Häufungspunkt von Fixpunkten von $\mathbf{G}$ sein kann. Nehmen wir nämlich an, es gelte für die Folge τ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ von verschiedenen Punkten aus $\mathfrak{T}$:

$$\lim_{k \to \infty} \tau_k = \tau_0 \in \mathfrak{T}, \; S_k \tau_k = \tau_k, \; S_k \neq E, \; S_k \in \mathbf{G}.$$

Dann ist

$$S_k = A_k^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix} A_k, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & -\tau_k \\ 1 & -\bar{\tau}_k \end{pmatrix},$$

und man kann eine konvergente Teilfolge, die wieder mit S_k bezeichnet werde, auswählen. Die Existenz der Folge $S_k S_{k+1}^{-1}$ steht dann im Widerspruch zur Diskontinuität von $\mathbf{G}$; also können sich die Fixpunkte von $\mathbf{G}$ im Innern von $\mathfrak{T}$ nicht häufen. Nun sei $\tau_0 \in \mathfrak{T}$ kein Fixpunkt von $\mathbf{G}$ und fest gewählt. Die Gesamtheit aller mit τ_0 nach $\mathbf{G}$ äquivalenten Punkte sei in irgend eine Reihenfolge $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots$ gebracht. Mit $\mathfrak{h}_k$ werde die Menge der Punkte aus $\mathfrak{T}$ bezeichnet, die von τ_0 und τ_k gleichen (nichteuklidischen) Abstand haben. Jede Mannigfaltigkeit $\mathfrak{h}_k$ zerlegt, wie oben erörtert, $\mathfrak{T}$ in zwei Halbräume. Vom Durchschnitt $\mathfrak{F}_0$ aller Halbräume, die τ_0 enthalten, ist dann leicht zu sehen, daß er die Eigenschaften eines Fundamentalbereiches aufweist (vergl. W, S. 155): $\mathfrak{F}_0$ enthält zu jedem Punkt von $\mathfrak{T}$ einen äquivalenten, und kein innerer Punkt von $\mathfrak{F}_0$ ist mit einem andern Punkt des Innern oder des Randes von $\mathfrak{F}_0$ äquivalent. $\mathfrak{F}_0$ ist zusammenhängend, da mit τ auch alle Punkte der nichteuklidischen kürzesten Verbindung von τ und τ_0 zu $\mathfrak{F}_0$ gehören. An der Zusammensetzung des Randes von $\mathfrak{F}_0$, soweit er in einem abgeschlossenen Bereich von $\mathfrak{T}$ liegt, sind nur endlich viele $\mathfrak{h}_k$ beteiligt; denn ist $2R$ der nichteuklidische Abstand der Punkte τ_k und τ_0, so hat τ_0 von $\mathfrak{h}_k$ den Abstand R, und in einem abgeschlossenen Bereich von $\mathfrak{T}$ liegen nur endlich viele τ_k.

§ 3. Konstruktion eines Fundamentalbereiches für die Hilbert'sche Modulgruppe.

Wir betrachten die (engere) Hilbert'sche Modulgruppe **M** zu einem total reellen algebraischen Zahlkörper Z vom absoluten Grad n und verabreden folgende Bezeichnung: Es sei h die Anzahl der absoluten Idealklassen in Z, $\mathfrak{o}$ der Bereich der ganzen Zahlen aus Z, $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{a}_i = (\gamma_i, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots h)$ ein volles Repräsentantensystem der absoluten Idealklassen (γ_i und δ_i erzeugen $\mathfrak{a}_i$, insbesondere $\gamma_1, \delta_1 = 0, 1$), $\alpha_i, \beta_i \subset Z$ so ausgewählt, daß

$$S_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}, \quad |S_i| = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, h), \quad S_1 = E.$$

Die Modulgruppe **M** besteht aus der Gesamtheit der Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad |S| = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \subset \mathfrak{o}.$$

Die Konjugierten $S^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ von S sind jetzt im gewöhnlichen Sinn der algebraischen Zahlentheorie zu S konjugiert. Im Verlauf dieser Untersuchung spielt der Komplex

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{h} S_i \mathbf{M}$$

eine wichtige Rolle. Der Konstruktion eines Fundamentalbereiches für **M** liegt folgender Gedankengang zugrunde: Man verschafft sich in $\mathfrak{T}$ eine Punktmenge $\mathfrak{B}$, welche zu jedem Punkt von $\mathfrak{T}$ einen nach **K** äquivalenten enthält; $\mathfrak{B}$ kann so ausgewählt werden, daß der Rand von $\mathfrak{B}$ mit dem Rand von $\mathfrak{T}$ nur *einen* gemeinsamen

Punkt hat. Es wird dann der Einfluß, den die Substitutionen S_i $(i=1, 2, \ldots, h)$ bei dieser Reduktion haben, in der Weise rückgängig gemacht, daß man aus $\mathfrak{B}$ die h Punktmengen $S_i^{-1}\mathfrak{B}$ ableitet und aus deren Vereinigungsmenge einen Fundamentalbereich für **M** aussondert. Wir stellen einige Hilfsbetrachtungen voran.

Hilfssatz 1 [8]**:** *Wenn* $\gamma, \delta \subset \mathfrak{o}$, $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, *dann gibt es eine Substitution* $S_0 \subset \mathbf{K}$ *derart, daß*

$$\underline{S_0} = (\gamma_0, \delta_0), \ \gamma_0 = \varrho\,\gamma, \ \delta_0 = \varrho\,\delta, \ |\varrho| < \varkappa_1$$

mit einer nur von Z abhängigen positiven Konstanten $\varkappa_1$.

Beweis: Das von γ, δ erzeugte Ideal liege in der Klasse von $\mathfrak{a}_k$, d. h. es soll zwei ganze von 0 verschiedene Zahlen ω_1, Ω_2 geben, sodaß die Idealgleichung

$$(\omega_1\,\gamma, \omega_1\,\delta) = (\Omega_2\,\gamma_k, \Omega_2\,\delta_k) \tag{27}$$

besteht. Es ist also

$$\left|\mathbf{N}\,\frac{\omega_1}{\Omega_2}\right| = \frac{\mathbf{N}\,\mathfrak{a}_k}{\mathbf{N}\,(\gamma, \delta)} \leqq \mathbf{N}\,\mathfrak{a}_k,$$

und folglich läßt sich eine Einheit $\varepsilon \subset \mathfrak{o}$ derart bestimmen, daß

$$\varepsilon\,\omega_1 = \Omega_1, \ \left|\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right| < \varkappa_2 \sqrt[n]{\mathbf{N}\,\mathfrak{a}_k}, \ \varkappa_2 = \varkappa_2(Z) > 0.$$

Die Idealgleichung (27) gilt auch mit Ω_1 an Stelle von ω_1. Nach HURWITZ [9]) gibt es dann eine Substitution

$$S^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \subset \mathbf{M},$$

sodaß

$$\Omega_1\,\gamma = \alpha^*\,\Omega_2\,\gamma_k + \gamma^*\,\Omega_2\,\delta_k,$$
$$\Omega_1\,\delta = \beta^*\,\Omega_2\,\gamma_k + \delta^*\,\Omega_2\,\delta_k.$$

Für

$$S_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} = S_k \cdot S^*$$

gilt dann

$$\Omega_2\,\gamma_0 = \Omega_1\,\gamma, \ \Omega_2\,\delta_0 = \Omega_1\,\delta,$$

$$\gamma_0 = \varrho\,\gamma, \ \delta_0 = \varrho\,\delta, \ |\varrho| < \varkappa_2 \sqrt[n]{\mathbf{N}\,\mathfrak{a}_k} < \varkappa_1.$$

---

[8]) Es handelt sich um eine Verschärfung von Hilfssatz 1 in H. D. KLOOSTERMAN, Theorie der EISENSTEIN'schen Reihen von mehreren Veränderlichen (Hamburger Abhandlungen Bd. **6** (1928), S. 163—188).

[9]) A. HURWITZ, Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper (Math. Werke Bd. **2**, Basel 1933, S. 244—268).

Hilfssatz 2: *Zu* $\tau = x + iy \in \mathfrak{T}$ *gibt es ein Paar ganzer Zahlen* $\gamma, \delta \neq 0, 0$, *für welche die Ungleichungen*

$$(\gamma^{(\nu)} x^{(\nu)} + \delta^{(\nu)})^2 + \gamma^{(\nu)2} y^{(\nu)2} \leqq \frac{1}{c^{(\nu)}} y^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind, sobald $\mathsf{N}\, c = 2^{-n} \Delta^{-1}$ ($\Delta =$ *Diskriminante von* Z) *und* $c > 0$.

Beweis: s. B I, S. 528.

Hilfssatz 3: *Zu* $\tau \in \mathfrak{T}$ *gibt es eine Substitution* $S_0 \in \mathsf{K}$ *derart, daß*

$$\tau_1 = S_0 \tau = x_1 + i y_1, \quad \mathsf{N}\, y_1 > 2^{-n} \varkappa_1^{-2n} \Delta^{-1}.$$

Beweis: Zu $\tau = x + iy$ bestimme man nach Hilfssatz 1 und 2 sukzessive γ, δ und S_0; es gilt dann

$$y_1 = \frac{y}{(\gamma_0 x + \delta_0)^2 + \gamma_0^2 y^2} > \frac{1}{\varkappa_1^2} \cdot \frac{y}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \geqq \frac{c}{\varkappa_1^2}$$

und $\mathsf{N}\, y_1 > \varkappa_1^{-2n} \mathsf{N}\, c = 2^{-n} \varkappa_1^{-2n} \Delta^{-1}$, q. e. d.

Wir betrachten nun, um für spätere Zwecke die nötige Allgemeinheit zu wahren, eine beliebige diskontinuierliche affine Substitutionsgruppe A; sie enthalte n unabhängige Translationen und $n-1$ hyperbolische Transformationen mit unabhängigen Multiplikatoren; d. h. $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ soll für A parabolische Spitze sein. Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bzw. $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n-1}^2$ eine Basis für die Translationen bzw. die Multiplikatoren und setzen

$$(28) \qquad \begin{aligned} Y^{(\nu)} &= \log y^{(\nu)}, \\ \Lambda_k^{(\nu)} &= \log \lambda_k^{(\nu)2} \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n-1), \\ \Lambda_0^{(\nu)} &= \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dann gibt es für jeden Punkt $\tau = x + iy \in \mathfrak{T}$ eine eindeutige Darstellung

$$(29) \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \alpha_k, \quad Y = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \Lambda_k,$$

und ein Fundamentalbereich für A wird beschrieben durch die Ungleichungen

$$(30) \qquad \begin{aligned} -\tfrac{1}{2} &\leqq \xi_k < \tfrac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ -\tfrac{1}{2} &\leqq \eta_l < \tfrac{1}{2} \quad (l = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Der Beweis hierfür ist evident, wenn man erst y und dann x reduziert (s. B I, Teil Id). Die Koordinate

$$\eta_0 = \mathbf{S}\, Y = \log \mathbf{N}\, y \tag{31}$$

ist gegenüber den Substitutionen von $\mathbf{A}$ invariant.

Diese Resultate werden jetzt auf die affinen Gruppen $\mathbf{A}_k$ in $S_k \mathbf{M} S_k^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$ angewendet. Jede dieser Gruppen führt den Durchschnitt von $\mathfrak{T}$ mit

$$\mathbf{N}\, y > 2^{-n}\, \varkappa_1^{-2n}\, \Delta^{-1} \tag{32}$$

in sich über. Reduzieren wir diesen Durchschnitt in oben angegebener Weise nach $\mathbf{A}_k$, so erhalten wir eine Punktmenge $S_k \mathfrak{F}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$. Die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{B}_1 = \sum_{k=1}^{h} \mathfrak{F}_k$$

enthält zu jedem Punkt $\tau \subset \mathfrak{T}$ einen nach $\mathbf{M}$ äquivalenten. Man bestimme nämlich $S_0 = S_k L$ mit $L \subset \mathbf{M}$ nach Hilfssatz 3 derart, daß für $\tau_1 = S_0 \tau$ die Ungleichung (32) erfüllt ist, reduziere τ_1 nach $\mathbf{A}_k$, sodaß $\tau_2 = A_k \tau_1$ in $S_k \mathfrak{F}_k$, also $\tau_3 = S_k^{-1} A_k S_k L \tau$ in $\mathfrak{F}_k$ liegt; dabei ist $S_k^{-1} A_k S_k L \subset \mathbf{M}$, q. e. d. Um zu beweisen, daß die Punkte von $\mathfrak{B}_1$, die in der Nähe einer der h parabolischen Spitzen von $\mathfrak{B}_1$ liegen, nicht mehr reduziert zu werden brauchen, lösen wir diese Punkte von $\mathfrak{B}_1$ in folgender Weise ab. Mit $S_k \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}$ werde die Menge der Punkte τ aus $S_k \mathfrak{F}_k$ bezeichnet, für welche auch

$$\mathbf{N}\, y \geqq \varkappa > 0$$

gilt; ferner sei

$$\mathfrak{P}^{(\varkappa)} = \sum_{k=1}^{h} \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}.$$

Wir nehmen an, ein Punkt $\tau_1 \subset \mathfrak{P}_j^{(\varkappa)}$ sei mit einem andern Punkt $\tau_2 \subset \mathfrak{B}_1$, also etwa $\tau_2 \subset \mathfrak{F}_k$, nach $\mathbf{M}$ äquivalent:

$$\tau_2 = S \tau_1, \qquad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \mathbf{M}.$$

Wird

$$S_j \tau_1 = \sigma_1 = \xi_1 + i \eta_1, \; S_j \tau_2 = \sigma_2 = S_j S S_j^{-1} \sigma_1$$

gesetzt, so gilt

$$\sigma_1 \subset S_j \mathfrak{P}_j^{(\varkappa)}, \text{ d. h. } \mathbf{N}\, \eta_1 \geqq \varkappa,$$

und

$$S_k S S_j^{-1} \sigma_1 = S_k S_j^{-1} \sigma_2 = S_k \tau_2 \subset S_k \mathfrak{F}_k.$$

Bezeichnen wir noch

$$S_k S S_j^{-1} = (\omega_1, \omega_2),$$

wobei also

$$\omega_1 = (\alpha\,\delta_j - \beta\,\gamma_j)\,\gamma_k + (\gamma\,\delta_j - \delta\,\gamma_j)\,\delta_k\,,$$

so wird entsprechend den Fällen $\omega_1 = 0$ bzw. $\neq 0$, wie folgt, geschlossen:

1. Es sei $\omega_1 = 0$, d. h. die Ideale (γ_k, δ_k) und $(\alpha\,\delta_j - \beta\,\gamma_j, \gamma\,\delta_j - \delta\,\gamma_j) = (\gamma_j, \delta_j)$ gehören derselben Idealklasse an; also ist $j = k$, $\sigma_1, \sigma_2 = S_k\,S\,S_k^{-1}\,\sigma_1 \subset S_k\,\mathfrak{F}_k$ und $S_k\,S\,S_k^{-1} \subset \mathbf{A}_k$. Die Punktmenge $S_k\,\mathfrak{F}_k$ ist aber schon nach $\mathbf{A}_k$ reduziert. σ_1 und σ_2 sind also Randpunkte von $\mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}$.

2. Wenn $\omega_1 \neq 0$, so folgt wegen $S_k\,S\,S_j^{-1}\,\sigma_1 \subset S_k\,\mathfrak{F}_k$, daß

$$2^{-n}\,\varkappa_1^{-2n}\,\Delta^{-1} < \mathbf{N}\,\frac{\eta_1}{(\omega_1\,\xi_1 + \omega_2)^2 + \omega_1{}^2\,\eta_1{}^2} \leqq \mathbf{N}\,\frac{1}{\omega_1{}^2\,\eta_1} \leqq \mathbf{N}\,\eta_1{}^{-1}\,,$$

andererseits ist $\varkappa \leqq \mathbf{N}\,\eta_1$, also

$$\varkappa < 2^n\,\varkappa_1^{2n}\,\Delta\,.$$

Insgesamt ergibt sich folgender Sachverhalt:

Hilfssatz 4: *Es sei $\varkappa \geqq 2^n\,\varkappa_1^{2n}\,\Delta$. Wenn dann ein Punkt $\tau \subset \mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ mit einem Punkt $\tau^* \subset \mathfrak{B}_1$ nach $\mathbf{M}$ äquivalent ist, so kann das nur so stattfinden, daß τ und τ^* Randpunkte ein und derselben Punktmenge $\mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}$ und nach $S_k^{-1}\,\mathbf{A}_k\,S_k$ äquivalent sind.*

Um aus $\mathfrak{B}_1$ einen Fundamentalbereich zu bestimmen, genügt es demnach, die Punktmenge $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa \geqq 2^n\,\varkappa_1^{2n}\,\Delta)$ weiter zu reduzieren. Das soll jetzt geschehen. Wir machen einen inneren Punkt τ_0 von $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{P}^{(\varkappa)}$, der nicht Fixpunkt von $\mathbf{M}$ ist, zum Ausgangspunkt der in § 2 angegebenen, auf den Eigenschaften der nichteuklidischen Metrik von $\mathfrak{T}$ beruhenden Konstruktion eines Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}_0$ für $\mathbf{M}$. Die Bereiche $T\,\mathfrak{F}_0$, $T \subset \mathbf{M}$ überdecken $\mathfrak{T}$ lückenlos, und nur endlich viele, etwa $T_j\,\mathfrak{F}_0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, haben mit $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{P}^{(\varkappa)}$ einen von der leeren Menge $\mathfrak{O}$ verschiedenen Durchschnitt

$$T_j\,\mathfrak{D}_j = [T_j\,\mathfrak{F}_0, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{P}^{(\varkappa)}] \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

sodaß also

$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{P}^{(\varkappa)} = \sum_{j=1}^{r} T_j\,\mathfrak{D}_j \qquad (\mathfrak{D}_j \subset \mathfrak{F}_0).$$

Ersetzen wir $T_j\,\mathfrak{D}_j$ durch die äquivalente Punktmenge $\mathfrak{D}_j$, so erhalten wir in

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{P}^{(\varkappa)} + \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{D}_j$$

einen Fundamentalbereich, der noch abgeändert werden soll, um ihn zusammenhängend zu machen. Wir erklären $\mathfrak{D}_1^* = \mathfrak{D}_1$ und sukzessiv $\mathfrak{D}_\nu^*$ als die maximale Punktmenge in $\mathfrak{D}_\nu$, die keine Punkte aus $\mathfrak{D}_\mu^*$, $\mu < \nu$ enthält, d. h. es gilt

$$\mathfrak{D}_\nu^* = \mathfrak{D}_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} [\mathfrak{D}_\nu, \mathfrak{D}_\mu^*] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r).$$

Da alle vorkommenden Punktmengen von nur endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten begrenzt werden, so zerfällt also $\mathfrak{D}_\nu^*$ in endlich viele zusammenhängende Punktmengen $\mathfrak{Z}_{\nu\mu}$:

$$\mathfrak{D}_\nu^* = \sum_{\mu=1}^{r_\nu} \mathfrak{Z}_{\nu\mu}.$$

Man hat also in

$$\mathfrak{B}_2 = \sum_{k=1}^{h} \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{r_j} \mathfrak{Z}_{jl} \tag{33}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{B}_2$ in punktfremde Mengen. In jedem Summanden zeichnen wir einen inneren Punkt aus:

$$\mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)} \; (k = 1, 2, \ldots, h), \quad \mathfrak{r}_{jl} \subset \mathfrak{Z}_{jl} \; (j = 1, \ldots, r; \; l = 1, \ldots, r_j)$$

und verbinden jeden dieser Punkte innerhalb von $\mathfrak{T}$ durch eine analytische Kurve mit $\mathfrak{r}_0$. Die Gesamtheit dieser Kurven werde mit $\mathfrak{w}$ bezeichnet; $\mathfrak{w}$ ist mit einer gewissen Menge $\mathfrak{w}^*$ von Kurvenzügen in $\mathfrak{B}_2$ äquivalent. Wir denken uns das Kurvensystem $\mathfrak{w}$ so beschaffen, daß

1. das System $\mathfrak{w}$ nur aus inäquivalenten Punkten besteht und
2. ein Randpunkt einer der Mengen unter den Summenzeichen von (33), der auf einer der Kurven von $\mathfrak{w}$ liegt, Randpunkt von genau einer weiteren dieser Mengen ist.

Durch sukzessive Abänderungen der Kurvenzüge in $\mathfrak{w}^*$ kann man das im Falle $n > 1$ stets erreichen, indem man darauf achtet, daß je zwei Kurvenzüge aus $\mathfrak{w}^*$ einander nicht treffen. Dann läßt sich aber auch jede Kurve von $\mathfrak{w}$ in einen Kanal (von $2n-1$ dimensionalem Querschnitt) einbetten, sodaß die Gesamtheit dieser Kanäle aus inäquivalenten Punkten besteht. Ergänzt man diejenigen Kanalstücke, die nicht in $\mathfrak{B}_2$ liegen, durch die entsprechenden äquivalenten Stücke in $\mathfrak{B}_2$, so werden die zusammenhängenden

Bestandteile von $\mathfrak{B}_2$ untereinander verbunden, ohne daß deren Zusammenhang verloren geht. Als Kanaloberflächen können natürlich analytische Mannigfaltigkeiten gewählt werden. Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 3: *Für die engere Hilbert'sche Modulgruppe* $\mathbf{M}$ *zu einem total reellen Zahlkörper Z mit der Klassenzahl h gibt es einen zusammenhängenden, von endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Fundamentalbereich, der mit dem Rand von* $\mathfrak{T}$ *genau h nach* $\mathbf{M}$ *inäquivalente Randpunkte (parabolische Spitzen) gemeinsam hat.*

Für eine Untergruppe $\mathbf{U}$ von $\mathbf{M}$ von endlichem Index ι läßt sich jetzt leicht ein Fundamentalbereich von gleicher Art angeben. Ist

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\iota} \mathbf{U} R_i = \sum_{i=1}^{\iota} R_i^{-1} \mathbf{U}$$

eine Zerlegung von $\mathbf{M}$ nach Links- und Rechtsnebenklassen bezüglich $\mathbf{U}$, dann ist

$$\sum_{i=1}^{\iota} R_i \mathfrak{B}_2 = \sum_{i=1}^{\iota} \sum_{k=1}^{h} R_i \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)} + \sum_{i=1}^{\iota} \sum_{j}^{r-1} \sum_{l=1}^{r_j} R_i \mathfrak{Z}_{jl} \tag{34}$$

ein Fundamentalbereich für $\mathbf{U}$. Aus jeder Schar nach $\mathbf{U}$ äquivalenter parabolischer Fixpunkte wähle man einen Repräsentanten aus und ersetze in (34) die Menge $R_i \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}$ durch eine nach $\mathbf{U}$ äquivalente, sodaß die parabolische Spitze von $R_i \mathfrak{P}_k^{(\varkappa)}$ in den Repräsentanten ihrer Schar übergeführt wird. Bei diesem Prozeß wird auch wirklich jeder Repräsentant besetzt. Nachdem diese Ersetzung vorgenommen ist, wird durch eine nochmalige Abänderung, wie sie oben für $\mathfrak{B}_2$ durchgeführt ist, der Zusammenhang des Fundamentalbereiches für $\mathbf{U}$ hergestellt. Es gilt also

Satz 4: *Zu jeder Untergruppe* $\mathbf{U}$ *der engeren Hilbert'schen Modulgruppe von endlichem Index gibt es einen zusammenhängenden, von endlich vielen analytischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Fundamentalbereich, der mit dem Rand von* $\mathfrak{T}$ *so viele Randpunkte (parabolische Spitzen) gemeinsam hat, wie es inäquivalente parabolische Fixpunkte von* $\mathbf{U}$ *gibt.*

Für die engere Hauptkongruenzuntergruppe $\mathbf{M}(\mathfrak{n})$ von $\mathbf{M}$ zur Idealstufe $\mathfrak{n}$ beträgt die Maximalzahl der inäquivalenten parabolischen Fixpunkte

$$h \cdot \frac{\mathsf{N}(\mathfrak{n})^2}{w(\mathfrak{n})} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{n}} \left(1 - \frac{1}{\mathsf{N}(\mathfrak{p})^2}\right),$$

wobei h die Idealklassenzahl von Z und $w(\mathfrak{n})$ die Maximalzahl der mod $\mathfrak{n}$ inkongruenten Einheiten aus Z (vergl. loc. cit. [9])).

Der Fehler, der sich, wie eingangs erwähnt, in B I, Teil Ie eingeschlichen hat, macht einen besonderen Hinweis notwendig, um auf Grund des in Satz 3 ausgesprochenen Ergebnisses die Anwendbarkeit der allgemeinen funktionstheoretischen Sätze (d. h. der Weierstrass'schen Sätze) auf die Hilbert'sche Modulgruppe in B II sicher zu stellen. Es genügt dafür, zu wissen, daß der rationale Charakter der Picard'schen Reihen (B I, Teil II) im Fundamentalbereich für M erhalten bleibt. Das ist in der Tat der Fall; denn an den einzig problematischen Punkten, den parabolischen Spitzen des Fundamentalbereiches, gelten für die Picard-schen Reihen die in B I, Teil IIc abgeleiteten Ergebnisse, wie man leicht sieht.

Heidelberg, 9. Oktober 1939.