Math. Ann. 232, 163—175 (1978) © by Springer-Verlag 1978

Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Im vorliegenden Aufsatz werden für die Koeffizienten $a(T)$ in der Fourierentwicklung

$$\varphi(Z)=\sum_{T\geqq 0} a(T)\exp(2\pi i\sigma(TZ)) \qquad (\sigma=\mathrm{Spur}) \tag{1}$$

gewisser Modulformen φ zur Modulgruppe zweiten Grades Γ_2, zum Gewicht k und zum Multiplikatorsystem 1 lineare Relationen angegeben, die eine elementare rekursive Berechnung der $a(T)$ für gewisse, unter Umständen sogar alle primitiven Matrizen T gestatten. (Γ_2, k) bezeichne den linearen Raum der Formen φ des angegebenen Typus. Wir vereinbaren $a(T)=0$ zu setzen, wenn T nicht halbganz oder nicht semipositiv ist

Die angezeigten linearen Relationen kommen in folgender Weise zustande. Unter der Voraussetzung $\varphi\in(\Gamma_2, k)$ wird

$$\varepsilon_\nu A_\nu(\varphi;j,h)=\sum_{t\in\mathbb{Z}} a\begin{pmatrix} j & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix} t^\nu \tag{2}$$

mit $\varepsilon_0=1$ und $\varepsilon_\nu=2$ für $\nu>0$ gesetzt. Diese Bildung ist nur für $\nu\equiv k(\mathrm{mod}\,2)$ von Interesse, weil das allgemeine Summenglied nur dann eine gerade Funktion von t ist, während $A_\nu(\varphi;j,h)$ im Falle $\nu\not\equiv k(\mathrm{mod}\,2)$ in trivialer Weise verschwindet. Da im Fall $k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ die Koeffizienten $a(T)$ nur von der unimodularen Äquivalenzklasse von T abhängen, so erkennt man leicht, daß

$$A_\nu(\varphi;1,h) = \begin{cases} a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix} + 2\sum_{t>0} a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h-t^2\end{pmatrix} + 2\sum_{t\geqq 0} a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & h-t(t+1)\end{pmatrix} \\ \quad \text{für} \quad \nu=0\,, \\ \sum_{t>0} a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h-t^2\end{pmatrix}(2t)^\nu + \sum_{t\geqq 0} a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & h-t(t+1)\end{pmatrix}(2t+1)^\nu \\ \quad \text{für} \quad \nu\equiv 0(\mathrm{mod}\,2), \quad \nu>0 \end{cases} \tag{3}$$

0025-5831/78/0232/0163/$02.60

unter der Voraussetzung $k \equiv 0 \pmod 2$ gilt. Offenbar sind die Koeffizienten $a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}$ und $a\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & h\end{pmatrix}$ $(h \geqq 0)$ sukzessive zu berechnen, wenn das Zahlsystem $A_\nu(\varphi; 1, h)$ $(\nu = 0, 2; h \geqq 0)$ bekannt ist. Die Ermittlung von $A_0(\varphi; 1, h)$ bereitet in gegebenen Fällen keine Mühe, da

$$\varphi\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix} = \sum_{t_1, t_2 = 0}^{\infty} A_0(\varphi; t_1, t_2) \exp(2\pi i(t_1 z_1 + t_2 z_2)), \tag{4}$$

wie Witt [10] gezeigt hat, in jeder Variablen eine Modulform zur elliptischen Modulgruppe Γ_1 und zum Gewicht k darstellt. Es bleibt das Problem, $A_2(\varphi; 1, h)$ zu bestimmen. Zwei allgemeine Verfahren bieten sich zu seiner Lösung an. Das eine beruht auf der Verwendung des von Resnikoff eingeführten Differentialoperators D^1, der jede Modulform $\varphi \in (\Gamma_2, k)$ in eine Spitzenform $D^1\varphi \in (\Gamma_2, 2k+2)$ überführt. D^1 ist durch

$$D^1\varphi = \varphi^{2 - \frac{1}{2k}} \partial \varphi^{\frac{1}{2k}}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}, \quad Z = \begin{pmatrix}z_1 & z_3\\ z_3 & z_2\end{pmatrix}$$

definiert, abweichend von dem in [8] angegebenen Ausdruck, der einer Korrektur bedarf. Das zweite Verfahren beruht auf einer Verallgemeinerung des genannten Wittschen Satzes. Wir formulieren den Sachverhalt in folgendem

Hilfssatz. *Es sei $\varphi \neq 0$ eine Modulform zur Gruppe Γ_2, zum Gewicht k und zum Multiplikatorsystem w. Ferner sei $m = m(\varphi)$ die größte ganze Zahl derart, daß $z_3^{-m}\varphi(Z)$ im Siegelschen Halbraum holomorph ist. Dann ist $k + m \equiv 0 \pmod 2$ und*

$$\varphi^{(m)}(z_1, z_2) := (\pi z_3)^{-m} \varphi(Z)|_{z_3 = 0} \tag{5}$$

in jeder Variablen eine Modulform zur Gruppe Γ_1, zum Gewicht $k+m$ und zum Multiplikatorsystem

$$v\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = w\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_1 .$$

Ist $w \neq 1$, so ist v das Multiplikatorsystem von $\sqrt{\Delta(z)}$. Die Funktion $\varphi^{(m)}(z_1, z_2)$ ist symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, je nachdem

$$k \equiv 0 \pmod 2, w = 1 \quad \textit{oder} \quad k \equiv 1 \pmod 2, w \neq 1 \quad \textit{bzw.}$$
$$k \equiv 0 \pmod 2, w \neq 1 \quad \textit{oder} \quad k \equiv 1 \pmod 2, w = 1 \quad \textit{ist}.$$

Hier bezeichnet

$$\Delta(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \tau(h) \exp(2\pi i h z) \quad (\tau(1) = 1) \tag{6}$$

die Diskriminante der elliptischen Funktionen. Zum Beweis des Hilfssatzes führe ich in Analogie zum Wittschen Fall ($m = 0$, $k \equiv 0 \pmod 2$) folgendes aus: Unter den

Voraussetzungen des Hilfssatzes ist

$$\varphi((AZ+B)(CZ+D)^{-1})|CZ+D|^{-k}=w(M)\varphi(Z) \text{ für } M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in\Gamma_2 .$$

Wir wählen speziell

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad M^*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_1 ,$$

so daß

$$M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=\begin{pmatrix} z_1-\dfrac{cz^2}{cz_2+d} & \dfrac{z}{cz_2+d} \\ \dfrac{z}{cz_2+d} & M^*\langle z_2\rangle \end{pmatrix},$$

$$M^*\langle z_2\rangle=\frac{az_2+b}{cz_2+d}, \; |CZ+D|=cz_2+d \text{ mit } Z=\begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2 \end{pmatrix}$$

und daher in der Bezeichnung des Hilfssatzes

$$\frac{\varphi(M\langle Z\rangle)}{\left(\pi\dfrac{z}{cz_2+d}\right)^m}=v(M^*)(cz_2+d)^{k+m}\frac{\varphi(Z)}{(\pi z)^m}$$

wird. Für $z\to 0$ resultiert

$$\varphi^{(m)}(z_1, M^*\langle z_2\rangle)=v(M^*)(cz_2+d)^{k+m}\varphi^{(m)}(z_1,z_2) .$$

Die Symmetrieverhältnisse von $\varphi^{(m)}$ ergeben sich leicht aus der Transformationsformel für φ bezüglich der Substitution $Z\to Z[V]$ mit $V=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dieselbe Formel für $V=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liefert $k+m\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. q.e.d.

Übrigens wurde der im Hilfssatz beschriebene Sachverhalt für die Spitzenform $\varphi=\chi_{35}$ mit $m=1$ bereits von A. Selberg festgestellt (s. [9], p. 79). Die Fourierentwicklung (1) ergibt sofort

$$\varphi^{(m)}(z_1,z_2)=\frac{(2i)^m}{m!}\varepsilon_m\sum_{t_1,t_2=0}^{\infty}A_m(\varphi;t_1,t_2)\exp(2\pi i(t_1z_1+t_2z_2)) \tag{7}$$

und damit eine Möglichkeit, $A_m(\varphi;1,h)$ zu bestimmen. Ist $k\equiv 0(mod 2)$ und $m>2$, so kann in obiger Betrachtung $A_m(\varphi;1,h)$ an Stelle von $A_2(\varphi;1,h)$ treten.

Zum Fall $k\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$ ist folgendes zu bemerken. Der Fourierkoeffizient $a(T)$ von $\varphi\in(\Gamma_2,k)$ verschwindet, wenn in der Einheitengruppe von T Matrizen mit der Determinante -1 liegen. Demnach ist (vgl. [7], Satz 3 nebst Beweis)

$$a\begin{pmatrix} j & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & h \end{pmatrix}=0, \text{ wenn } j=1 \text{ oder } j=2,\ t\equiv 0(\mathrm{mod}\, 2) \text{ oder } j=h .$$

Ein erstes Interesse bietet demnach

$$A_1(\varphi;2,h)$$
$$=\sum_{t\geqq 0} a\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h-2t^2-t\end{pmatrix}(4t+1)-\sum_{t>0} a\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h-2t^2+t\end{pmatrix}(4t-1) \tag{8}$$

für $h\geqq 3$. Offenbar sind alle $a\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h\end{pmatrix}$ $(h\geqq 3)$ durch das Zahlsystem $A_1(\varphi;2,h)\,(h\geqq 3)$ eindeutig bestimmt.

Die Formen, die hier besonders interessieren, sind die Eisensteinreihen

$$\varphi_k(Z)=\sum_{T\geqq 0} a_k(T)\exp(2\pi i\sigma(TZ)) \quad \text{mit} \quad a_k(0)=1 \tag{9}$$

für $k\geqq 4$, $k\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ und die Spitzenformen

$$\chi_k(Z)=\sum_{T>0} c_k(T)\exp(2\pi i\sigma(TZ)) \tag{10}$$

für $k=10, 12, 35$ in der von Igusa gewählten Bezeichnung und Normierung. k bezeichnet jeweils das Gewicht der betreffenden Form.

Etwas außerhalb der Betrachtung liegt die Spitenform

$$\chi_5(Z)=\sum_{T>0} c_5(T)\exp(\pi i\sigma(TZ)), \tag{11}$$

die als einzige der speziellen Formen zum nicht-trivialen Multiplikatorsystem gehört. Bei der Summation können wir uns auf die

$$T=\begin{pmatrix}t_1 & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & t_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t_1\equiv t_2\equiv t\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$$

beschränken. Damit wird dem Verhalten von χ_5 bezüglich der Translationen $Z\to Z+S$ (S symmetrisch und ganz) Rechnung getragen. Mit

$$A_1(\chi_5;j,h)=\sum_{\substack{t\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)\\ t>0}} c_5\begin{pmatrix}j & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix}t \quad \text{für} \quad j\equiv h\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$$

gilt nun einerseits

$$\chi_5^{(1)}(z_1,z_2)=2i\sum_{\substack{t_1\equiv t_2\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)\\ t_1,t_2>0}} A_1(\chi_5;t_1,t_2)\exp(\pi i(t_1z_1+t_2z_2)); \tag{12}$$

andererseits ist, wie man mit Hilfe der Multiplikatorwerte in [5] feststellt,

$$A_1(\chi_5;1,h)=\sum_{g\geqq 0}(-1)^g c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h-g(g+1)\end{pmatrix}(2g+1) \tag{13}$$

für $h\equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$, so daß auch hier sämtliche $c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & h\end{pmatrix}$ $(h\geqq 1)$ berechnet werden können, wenn die $A_1(\chi_5;1,h)$ $(h\geqq 1)$ bekannt sind.

Die angegebenen Überlegungen führen zu folgenden Ergebnissen.

Satz 1. *Zu jeder Eisensteinreihe $\varphi_k \in (\Gamma_2, k)$ gibt es ein Paar von Spitzenformen*

$$u_k(z) = \sum_{h=0}^{\infty} b_k(h) \exp(2\pi i h z) \in (\Gamma_1, k), \tag{14}$$

$$v_{k+2}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} d_{k+2}(h) \exp(2\pi i h z) \in (\Gamma_1, k+2)$$

derart, daß

$$\left.\begin{aligned} A_0(\varphi_k; 1, h) &= a_k(1)(a_k(h) + b_k(h)) \\ A_2(\varphi_k; 1, h) &= \frac{a_k(1)}{k}\{h(a_k(h)+b_k(h)) + d_{k+2}(h)\} \end{aligned}\right\} \quad \textit{für} \quad h \geqq 0 \tag{15}$$

gilt. Hierin ist $a_k(h) = a_k\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *also*

$$g_k(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_k(h) \exp(2\pi i h z) \tag{16}$$

die normierte Eisensteinreihe in (Γ_1, k).

Es ist klar, daß

$$\begin{aligned} u_k &= 0 \quad \text{für} \quad k = 4, 6, 8, 10; \quad u_{12} = \beta\Delta \\ v_{k+2} &= 0 \quad \text{für} \quad k = 4, 6, 8, 12; \quad v_{12} = \delta\Delta \end{aligned} \tag{17}$$

mit gewissen Konstanten β, δ gilt. Mit Hilfe der von Igusa [1, p. 191] berechneten Fourierkoeffizienten stellt man fest, daß

$$\beta = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 131^{-1} \cdot 593^{-1} \cdot 691^{-1}, \quad \delta = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 19 \cdot 43867^{-1} \tag{18}$$

ist.

Jeder halbganzen Matrix $T = \begin{pmatrix} t_1 & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & t_2 \end{pmatrix}$ werde vermöge $\langle T \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & t_1 t_2 \end{pmatrix}$ eine primitive Matrix zugeordnet. Ferner sei $e = e(T) =$ g.g.T. (t_1, t_2, t). Dann ist

$$a_k(T) = \sum_{d/e, d>0} d^{k-1} a_k\left(\left\langle \frac{1}{d} T \right\rangle\right) \quad \text{für} \quad T > 0. \tag{19}$$

Die Gültigkeit solcher Relationen wurde von Resnikoff und Saldaña [8] aufgrund umfangreicher Koeffiziententabellen nicht nur für φ_k vermutet. Ein Beweis für φ_k wurde in [6] erbracht. Jedenfalls ergibt sich damit die bemerkenswerte Tatsache, daß *alle Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe φ_k durch die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe g_k und zweier Spitzenformen u_k, v_{k-2} eindeutig bestimmt sind und berechnet werden können.* Im Fall φ_4 sind Resnikoff und Saldaña [8] auf anderem Wege zu einer ähnlichen Lösung dieser Aufgabe gekommen.

Beiläufig sei erwähnt, daß (19) für die Fourierkoeffizienten der Formen φ_4^3 und φ_6^2 und mindestens eine Form in (Γ_2, k) nicht gilt, sofern $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $k \geqq 20$ ist. Im

Falle $k \equiv 1 (\bmod 2)$ genügen die Fourierkoeffizienten keiner Form in (Γ_2, k) der Bedingung (19).

Satz 2. *Es bestehen die Relationen*

$$\begin{aligned} A_0(\chi_{10}; 1, h) &= 0, & A_0(\chi_{12}; 1, h) &= \tau(h), \\ -4A_2(\chi_{10}; 1, h) &= \tau(h), & 12A_2(\chi_{12}; 1, h) &= h\tau(h), \\ 2iA_1(\chi_5; 1, 2h+1) &= \varrho(2h+1), & 4iA_1(\chi_{35}; 2, h) &= \alpha(h). \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^{\infty} \varrho(2h+1)\exp(\pi i(2h+1)z) = \sqrt{\Delta(z)}, \qquad \varrho(1) = 1, \\ &\sum_{h=3}^{\infty} \alpha(h)\exp(2\pi i h z) = -\Delta^3(z). \end{aligned} \tag{21}$$

Für die Berechnung von $A_2(\chi_{12}; 1, h)$ ist, wie sich zeigen wird, eine gewisse „Fourier-Jacobi-Reihenentwicklung" von χ_{12} nützlich, deren Terme in dem erforderlichen Umfang von Igusa in [3] durch Thetafunktionen und Thetanullwerte dargestellt sind.

§ 1. Die Spitzenformen

Aufgrund des eingangs formulierten Hilfssatzes ist

$$\chi_5^{(1)}(z_1, z_2) = \sqrt{\Delta(z_1)\Delta(z_2)}, \quad \chi_{10}^{(2)}(z_1, z_2) = \chi_{12}^{(0)}(z_1, z_2) = \Delta(z_1)\Delta(z_2) \tag{22}$$

und

$$\chi_{35}^{(1)}(z_1, z_2) = \Delta^2(z_1)\Delta^2(z_2)(g_6^2(z_2)\Delta(z_1) - g_6^2(z_1)\Delta(z_2)) \tag{23}$$

festzustellen. Die Normierung der Formen befindet sich in Übereinstimmung mit [2], Theorem 3. Die Formel für $\chi_{35}^{(1)}$ wird übrigens schon in [9] genannt; man gewinnt sie aufgrund allgemeiner Überlegungen oder aber direkt aus der von Igusa in [4, pp. 849—850] angegebenen Darstellung für $(\chi_{35})^2$. Es ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} 2i\sum_{h=0}^{\infty} A_1(\chi_5; 1, 2h+1)\exp(\pi i(2h+1)z) &= \sqrt{\Delta(z)}, \\ -4\sum_{h=0}^{\infty} A_2(\chi_{10}; 1, h)\exp(2\pi i h z) &= \Delta(z), \\ \sum_{h=0}^{\infty} A_0(\chi_{12}; 1, h)\exp(2\pi i h z) &= \Delta(z), \\ 4i\sum_{h=0}^{\infty} A_1(\chi_{35}; 2, h)\exp(2\pi i h z) &= -\Delta^3(z). \end{aligned} \tag{24}$$

Ferner ist

$$\chi_{10}\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \equiv 0, \text{ insbesondere also } A_0(\chi_{10}; 1, h) = 0 \text{ für } h \geqq 0.$$

Mit Ausnahme von $A_2(\chi_{12}; 1, h)$ sind damit alle Ausdrücke in Satz 2 bestimmt.

Die Entwicklung von $\chi_{12}(Z)$ mit $Z=\begin{pmatrix} z_1 & z \\ z & z_2 \end{pmatrix}$ nach Potenzen von $q=\exp(2\pi i z_2)$ beginnt nach Igusa [3, p. 257] mit dem linearen Glied

$$\begin{aligned}\chi_{12}(Z)=2^{-8}\cdot 3^{-1}\cdot(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})^4(z_1)\{&\vartheta_{00}^{10}(z_1)\vartheta_{00}^2(z_1,z)\\ &-\vartheta_{01}^{10}(z_1)\vartheta_{01}^2(z_1,z)-\vartheta_{10}^{10}(z_1)\vartheta_{10}^2(z_1,z)\}q+\dots\,. \end{aligned}\tag{25}$$

Die Thetafunktionen und Thetanullwerte sind durch die Reihen

$$\begin{aligned}\vartheta_{gh}(\tau,z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{\pi i\tau(n+\tfrac{1}{2}g)^2+2\pi i(z+\tfrac{1}{2}h)(n+\tfrac{1}{2}g)\}\\ \vartheta_{gh}(\tau)&=\vartheta_{gh}(\tau,0)\end{aligned}\tag{26}$$

definiert; sie gehören zum klassischen Bestand der Analysis. Für die Funktion

$$\begin{aligned}\omega(z_1,z):&=\lim_{q\to 0}q^{-1}\chi_{12}(Z)\\ &=\sum_{\substack{T>0\\ t_2=1}}c_{12}(T)\exp(2\pi i(t_1z_1+tz))\left(T=\begin{pmatrix} t_1 & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & t_2\end{pmatrix}\right)\end{aligned}\tag{27}$$

ergibt sich gemäß (25) die Darstellung

$$\begin{aligned}\omega(z_1,z)=2^{-8}\cdot 3^{-1}\cdot&(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})^4(z_1)\\ &\cdot\{\vartheta_{00}^{10}(z_1)\vartheta_{00}^2(z_1,z)-\vartheta_{01}^{10}(z_1)\vartheta_{01}^2(z_1,z)-\vartheta_{10}^{10}(z_1)\vartheta_{10}^2(z_1,z)\}\,.\end{aligned}\tag{28}$$

Nun wird die zweite Ableitung dieser Funktion nach z an der Stelle $z=0$ gebildet, indem man die Differentiation der Thetafunktionen mit Hilfe der bekannten Beziehungen

$$\frac{\partial^2\vartheta_{gh}}{\partial z^2}(z_1,z)=4\pi i\frac{\partial\vartheta_{gh}}{\partial z_1}(z_1,z),\qquad \frac{\partial\vartheta_{gh}}{\partial z}(z_1,0)=0\,,$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_{gh}^2}{\partial z^2}(z_1,0)=2\vartheta_{gh}(z_1)\frac{\partial^2\vartheta_{gh}}{\partial z^2}(z_1,0)=8\pi i\vartheta_{gh}(z_1)\vartheta'_{gh}(z_1)\,,$$

wobei $gh=0$ vorauszusetzen ist, von z nach z_1 verschiebt. Es folgt

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}(z_1,0)\\ &\quad=2^{-5}\cdot 3^{-1}\cdot\pi i(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})^4(z_1)(\vartheta_{00}^{11}\vartheta'_{00}-\vartheta_{01}^{11}\vartheta'_{01}-\vartheta_{10}^{11}\vartheta'_{10})(z_1)\\ &\quad=2^{-7}\cdot 3^{-2}\cdot\pi i(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})^4(\vartheta_{00}^{12}-\vartheta_{01}^{12}-\vartheta_{10}^{12})'(z_1)\,.\end{aligned}$$

Schließlich ergeben die Beziehungen

$$(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})^4(z_1)=2^4\sqrt{\Delta(z_1)},\quad(\vartheta_{00}^{12}-\vartheta_{10}^{12}-\vartheta_{01}^{12})(z_1)=2^4\cdot 3\sqrt{\Delta(z_1)}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}(z_1,0)=3^{-1}\cdot\pi i\Delta'(z_1)\,.\tag{29}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}(z_1,0)=-4\pi^2\sum_{h=1}^{\infty}\left\{\sum_{t\in\mathbb{Z}}c_{12}\begin{pmatrix}h & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & 1\end{pmatrix}t^2\right\}\exp(2\pi ihz_1)$$

$$=-8\pi^2\sum_{h=1}^{\infty}A_2(\chi_{12};1,h)\exp(2\pi ihz_1)\,, \tag{30}$$

mithin

$$12\sum_{h=1}^{\infty}A_2(\chi_{12};1,h)\exp(2\pi ihz)=\frac{1}{2\pi i}\Delta'(z)\,. \tag{31}$$

Daraus ergibt sich der behauptete Wert für $A_2(\chi_{12};1,h)$.

§ 2. Die Eisensteinreihen

Im folgenden sei stets $k\geqq 4$, $k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$. Die Formen $g_{k-12\nu}\Delta^\nu$, $0\leqq\nu\leqq\frac{k}{12}$, $k-12\nu\neq 2$ bilden eine Basis für (Γ_1,k), wenn $g_0=1$ gesetzt wird. Mit diesen Beschränkungen für ν und ebenso für μ ist also

$$\varphi_k\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}=\sum_{\mu,\nu\geqq 0}\alpha_{\mu\nu}g_{k-12\mu}(z_1)g_{k-12\nu}(z_2)\Delta^\mu(z_1)\Delta^\nu(z_2)\quad(\alpha_{\mu\nu}=\alpha_{\nu\mu})\,.$$

Durch Grenzübergang $\mathrm{Im}\,z_2\to\infty$ erhalten wir

$$g_k(z_1)=\sum_{\mu\geqq 0}\alpha_{\mu 0}g_{k-12\mu}(z_1)\Delta^\mu(z_1)\,,$$

also $\alpha_{00}=1$, $\alpha_{\mu 0}=0$ für $\mu>0$. Die Reihenentwicklung (4) ergibt nun

$$\sum_{h=0}^{\infty}A_0(\varphi_k;1,h)\exp(2\pi ihz)=a_k(1)(g_k(z)+u_k(z))$$

mit der durch

$$a_k(1)u_k(z)=\sum_{\nu>0}\alpha_{1\nu}g_{k-12\nu}(z)\Delta^\nu(z)\in(\Gamma_1,k) \tag{32}$$

definierten Spitzenform u_k. Das ist die erste Aussage von Satz 1. Resnikoffs Operator D^1 führt φ_k in eine Spitzenform vom Gewicht $2k+2$ über, so daß

$$D^1\varphi_k=\psi_{2k-8}\chi_{10}+\psi_{2k-10}\chi_{12}\ \text{mit}\ \psi_h\in(\Gamma_2,h)\ \text{für}\ h=2k-8,2k-10 \tag{33}$$

gilt. Trägt man in

$$D^1\varphi_k=\frac{1-2k}{4k^2}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_2}-\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_3}\right)+\frac{1}{2k}\varphi_k\partial\varphi_k$$

die Fourierreihe der Eisensteinreihe ein, so resultiert

$$\begin{aligned} &D^1\varphi_k(Z)\\ &=\frac{\pi^2}{k^2}\sum_T\left\{\sum_{T=T_1+T_2}((2k-1)|T|-(4k-1)(|T_1|+|T_2|))a_k(T_1)a_k(T_2)\right\}\\ &\quad\cdot\exp(2\pi i\sigma(TZ))\,, \end{aligned}\tag{34}$$

also

$$\frac{\pi^2}{k^2}\sum_{T=T_1+T_2}\{(2k-1)|T|-(4k-1)(|T_1|+|T_2|)\}a_k(T_1)a_k(T_2)=a(D^1\varphi_k,T)\,,$$

wenn allgemein mit $a(\varphi, T)$ die Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe φ bezeichnet werden.

$$T=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix}=T_1+T_2 \quad\text{mit}\quad T_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & j\end{pmatrix},\ T_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h-j\end{pmatrix}\ (0\leqq j\leqq h)$$

stellen bis auf Vertauschung von T_1 und T_2 alle in Frage kommenden Zerlegungen der speziellen Matrix T dar. Es wird demnach

$$\frac{\pi^2}{k^2}\sum_{j=0}^{h}\{-4kh+(8k-2)j+kt^2\}a_k(j)a_k\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h-j\end{pmatrix}=a\left(D^1\varphi_k,\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix}\right).\tag{35}$$

Summation über $t\in\mathbb{Z}$ ergibt mit dem bereits bewiesenen Teil von Satz 1

$$\begin{aligned} &a_k(1)\sum_{j=0}^{h}\{-4kh+(8k-2)j\}a_k(j)\{a_k(h-j)+b_k(h-j)\}\\ &\quad+2k\sum_{j=0}^{h}a_k(j)A_2(\varphi_k;1,h-j)=\frac{k^2}{\pi^2}A_0(D^1\varphi_k;1,h)\,. \end{aligned}\tag{36}$$

Mit Unbekannten $d_{k+2}(h)$ wird

$$A_2(\varphi_k;1,k)=\frac{a_k(1)}{k}\{h(a_k(h)+b_k(h))+d_{k+2}(h)\}$$

angesetzt. Bekannte Abschätzungen der Koeffizienten von Modulformen sowohl ersten als auch zweiten Grades zeigen, daß $d_{k+2}(h)$ gemäß Ansatz für $h\to\infty$ höchstens wie eine feste Potenz von h wächst, so daß die Funktion

$$v_{k+2}(z)=\sum_{h=0}^{\infty}d_{k+2}(h)\exp(2\pi ihz)$$

jedenfalls in der oberen Halbebene holomorph ist. (36) geht nun über in

$$\begin{aligned} &a_k(1)\sum_{j=0}^{h}\{-(4k-2)(h-j)+(4k-2)j\}a_k(j)\{a_k(h-j)+b_k(h-j)\}\\ &\quad+2a_k(1)\sum_{j=0}^{h}a_k(j)d_{k+2}(h-j)=\frac{k^2}{\pi^2}A_0(D^1\varphi_k;1,h)\,, \end{aligned}$$

was sich zu

$$\frac{(4k-2)a_k(1)}{2\pi i}a(g_k'u_k-g_ku_k',h)+2a_k(1)a(g_kv_{k+2},h)$$
$$=\frac{k^2}{\pi^2}A_0(D^1\varphi_k;1,h) \tag{37}$$

vereinfacht. Wir formen die rechte Seite dieser Relation um, indem wir von der Zerlegung (33) ausgehen.

$$A_0(\psi_{2k-8}\chi_{10};1,h)=\sum_{t\in\mathbb{Z}}a\left(\psi_{2k-8}\chi_{10};\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix}\right)$$
$$=\sum_{t\in\mathbb{Z}}\sum_{T_1,T_2}a(\psi_{2k-8},T_1)a(\chi_{10},T_2)\,.$$

Summiert wird hier über alle Zerlegungen von $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h\end{pmatrix}$ in T_1+T_2. Da χ_{10} Spitzenform ist, ergeben höchstens die Matrizen $T_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & j\end{pmatrix}$ $(0\leqq j\leqq h)$ von Null verschiedene Terme. Mithin ist nach Satz 2

$$A_0(\psi_{2k-8}\chi_{10};1,h)=\sum_{t\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{h}a(\psi_{2k-8}|\phi,j)c_{10}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t & h-j\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{j=0}^{h}a(\psi_{2k-10}|\phi,j)A_0(\chi_{10};1,h-j)=0\,.$$

Hierin bezeichnet ϕ den Siegelschen Operator, der eine Form $\varphi\in(\Gamma_2,k)$ in eine Form $\varphi|\phi\in(\Gamma_1,k)$ abbildet. Analog ergibt sich mit Hilfe von Satz 2

$$A_0(\psi_{2k-10}\chi_{12};1,h)=\sum_{j=0}^{h}a(\psi_{2k-10}|\phi,j)A_0(\chi_{12};1,h-j)$$
$$=\sum_{j=0}^{h}a(\psi_{2k-10}|\phi,j)\tau(h-j)=a((\psi_{2k-10}|\phi)\Delta,h)\,,$$

also

$$\frac{k^2}{\pi^2}A_0(D^1\varphi_k;1,h)=\frac{k^2}{\pi^2}a((\psi_{2k-10}|\phi)\Delta,h)\,. \tag{38}$$

Das volle System (37) für $h\geqq 0$ ist demnach gleichwertig mit

$$(2k-1)(g_k'u_k-g_ku_k')+2\pi i a_k(1)g_kv_{k+2}=\frac{ik^2}{\pi}(\psi_{2k-10}|\phi)\Delta\,. \tag{39}$$

Da $g_k'u_k-g_ku_k'$ und $(\psi_{2k-10}|\phi)\Delta$ Spitzenformen in $(\Gamma_1,2k+2)$ sind, so ist nunmehr ersichtlich, daß die in der oberen Halbebene holomorphe Funktion v_{k+2} sich bezüglich Γ_1 wie eine Modulform vom Gewicht $k+2$ transformiert, in ∞ verschwindet, also eine Spitzenform in $(\Gamma_1,k+2)$ darstellt. Das ist die zweite Behauptung von Satz 1.

Die Anwendung des angegebenen Verfahrens auf eine beliebige Form $\varphi \in (\Gamma_2, k)$ an Stelle der Eisensteinreihe φ_k ergibt ein analoges Resultat, nämlich

Satz 3. *Zu jeder Form* $\varphi \in (\Gamma_2, k)$ $(k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2))$ *gibt es eine Form* $f \in (\Gamma_1, k)$ *und eine Spitzenform* $v \in (\Gamma_1, k+2)$, *so daß*

$$A_0(\varphi\,; 1, h) = a(f, h), \quad A_2(\varphi\,; 1, h) = \frac{h}{k} a(f, h) + a(v, h) \quad (h \geqq 0) \tag{40}$$

gilt. Ist φ *eine Spitzenform, dann auch* f.

Beweis. Es sei $q_1 = \exp(2\pi i z_1)$. Aufgrund des Wittschen Satzes ist

$$\sum_{h=0}^{\infty} A_0(\varphi\,; 1, h) \exp(2\pi i h z_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \Bigg|_{q_1 = 0} = f(z_2)$$

eine Modulform in (Γ_1, k). Daraus resultiert die erste der Relationen (40). Ist φ Spitzenform, so ist $A_0(\varphi\,; h, 0) = 0$ für $h \geqq 0$, insbesondere also f Spitzenform.

Die Bildung von $D^1 \varphi$ ergibt mit $g = \varphi | \phi$ die Beziehung

$$\sum_{j=0}^{h} \{-4kh + (8k-2)j\} a(g, j) a(f, h-j)$$
$$+ 2k \sum_{j=0}^{h} a(g, j) A_2(\varphi\,; 1, h-j) = \frac{k^2}{\pi^2} A_0(D^1 \varphi\,; 1, h)$$

an Stelle von (36). Der Ansatz

$$A_2(\varphi\,; 1, h) = \frac{h}{k} a(f, h) + a(v, h)\,,$$

$$v(z) = \sum_{h=0}^{\infty} d(h) \exp(2\pi i h z)\,, \qquad a(v, h) = d(h)$$

führt in angegebener Weise schließlich auf

$$(2k-1)(g' f - g f') + 2\pi i k g v = \frac{i k^2}{\pi} (\psi | \phi) \Delta$$

mit einer gewissen Form $\psi \in (\Gamma_2, 2k-10)$. Ist $g(\infty) \neq 0$, so ist wie im Falle $\varphi = \varphi_k$ zu schließen, daß v eine Spitzenform in $(\Gamma_1, k+2)$ ist. Ist hingegen $g(\infty) = 0$, so ersetze man φ durch $\varphi_k + \varphi$. Dann tritt $g_k + g$ an Stelle von g, so daß der angegebene Schluß wegen $(g_k + g)(\infty) = 1$ für $\varphi_k + \varphi$ durchgeführt werden kann. Aus Gründen der Linearität gilt Satz 3 dann nicht nur für $\varphi_k + \varphi$, sondern im Hinblick auf Satz 1 auch für φ, d. h. in der angegebenen Allgemeinheit.

Zu den in Satz 2 für χ_{10} und χ_{12} formulierten Relationen ergibt sich nun ein zweiter Zugang.

Anhang

Hinsichtlich der "Conjecture I" in [8] sei folgendes bemerkt: Sie wurde im Hinblick auf die Formen ungeraden Gewichts zum nicht-trivialen Multiplikatorsystem hier in modifizierter Gestalt (19) wiedergegeben. Die Abänderung wird durch

$$c_5\begin{pmatrix}3 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}=c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 9\end{pmatrix}+3^4 c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{93}{2i},\quad c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 9\end{pmatrix}=-c_5\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 7\end{pmatrix}$$

motiviert.

Professor Igusa war so freundlich, mir eine explizite Darstellung von $\chi_{12}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$ durch Thetanullwerte mitzuteilen. Sie entspricht dem Ergebnis der Prozedur, der φ_4 in [8] unterworfen wurde, um dort die Identitäten (4) abzuleiten. Auf diesem Wege erhielt Igusa den Wert $c_{12}\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}=-670$ in Übereinstimmung mit $c_{12}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}=-670$.

In der mittleren Spalte der folgenden Tabelle wird eine in [8] begonnene Koeffizientenreihe bestätigt und fortgesetzt.

h	$2ic_5\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & h\end{pmatrix}$	$4h-\varepsilon$	$12c_{12}\begin{pmatrix}1 & \frac{\varepsilon}{2}\\ \frac{\varepsilon}{2} & h\end{pmatrix}$ [a]	h	$4ic_{35}\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & h\end{pmatrix}$
1	1	3	1	3	−1
3	−9	4	10	4	69
5	27	7	−88	5	−2277
7	−12	8	−132	6	47702
9	−90	11	1275	7	−709665
11	135	12	736	8	7937622
13	54	15	−8040	9	−68814827
15	−99	16	−2880	10	468406983
17	−189	19	24035	11	−2492666055
19	−85	20	13080		
21	657	23	−14136		
23	−162	24	−54120		
25	−135	27	−128844		
27	−171	28	115456		

[a] Hier ist $\varepsilon=0$ oder $\varepsilon=1$

Zusatz. Aus den Transformationseigenschaften der Jacobischen Formen $\theta_h(z_1,z)$, die durch die Entwicklung einer Modulform

$$\varphi\begin{pmatrix}z_1 & z\\ z & z_2\end{pmatrix}=\sum_{h=0}^{\infty}\theta_h(z_1,z)\exp(2\pi i h z_2)\in(\Gamma_2,k)$$

bestimmt sind, ergibt sich das Transformationsverhalten der Reihen

$$f_{h\nu}(z_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_\nu A_\nu(n,h)\exp(2\pi i n z_1)\quad \text{für}\quad \nu\geqq 0$$

bezüglich der Modulgruppe Γ_1, wenn man

$$\theta_h(z_1,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\pi z)^\nu}{\nu!}f_{h\nu}(z_1)$$

beachtet. Auf diesem Wege erhält man u.a. einen weiteren Beweis für Satz 3.

Literatur

1. Igusa, J.: On Siegel modular forms of genus two. Amer. J. Math. **84**, 175—200 (1962)
2. Igusa, J.: On Siegel modular forms of genus two (II). Amer. J. Math. **86**, 392—412 (1964)
3. Igusa, J.: A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. Math. Ann. **168**, 228—260 (1967)
4. Igusa, J.: Modular forms and projective invariants. Amer. J. Math. **89**, 817—855 (1967)
5. Maaß, H.: Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Klasse, 1964, Nr. 11
6. Maaß, H.: Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk **38**, (1972), Nr. 14
7. Maaß, H.: Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen. Math. Ann. **226**, 275—284 (1977)
8. Resnikoff, H. L., Saldaña, R. L.: Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. J. Reine Angew. Math. **265**, 90—109 (1974)
9. Resnikoff, H. L., Saldaña, R. L.: An analogue of a conjecture of Sato and Tate for a Hilbert modular form. Glasgow Math. J. **16**, 69—87 (1975)
10. Witt, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14**, 323—337 (1941)

Eingegangen am 13. Juni 1977