Math. Ann. 226, 275–284 (1977)

38

Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen

Hans Maaß

Hirtenaue 50, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Hans Petersson zum 75. Geburtstag gewidmet

In einer bemerkenswerten Arbeit [1] haben Andrianov und Maloletkin kürzlich mit Hilfe von Thetareihen und sogenannten sphärischen Funktionen Modulformen zur Gruppe

$$\Gamma_0(q)=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in Sp_n(\mathbb{Z}), \quad C\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, q)\right\},$$

zum Gewicht $\frac{m}{2}+\nu$ und einem gewissen Multiplikatorsystem χ_F konstruiert. Die Formen haben folgende Gestalt:

$$\Theta_F(Z,\phi_\nu)=\sum_{N\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)} \phi_\nu(N)\exp\{\pi i\sigma((ZF[N])\} \quad (\nu \text{ ganz} \geqq 0)\,. \tag{1}$$

Hierin bezeichnet:

$F=F^{(m)}$ eine m-reihige positive gerade symmetrische Matrix,

$q=q(F)=\min\{h\in\mathbb{N}, hF^{-1} \text{ ganz}\}$ die Stufe von F,

$Z=Z^{(n)}$ eine variable Matrix im Siegelschen Halbraum,

ϕ_ν im einfachsten Fall eine sphärische Funktion vom Typus

$$\phi_\nu(N)=|V'F^{\frac{1}{2}}N|^\nu \quad \text{mit } V'V=0 \text{ im Falle } \nu>0\,, \tag{2}$$

ϕ_0 eine Konstante,

V' die durch Transposition aus der komplexen Matrix $V=V^{(m,n)}$ entstandene Matrix,

$\sigma(X)$ allgemein die Spur einer quadratischen Matrix X.

Zur Abkürzung ist $N'FN=F[N]$ gesetzt worden. N durchläuft in (1) alle ganzen Matrizen vom Typus $N^{(m,n)}$. Wie man leicht erkennt, ist $\phi_\nu \neq 0$ im Falle $\nu>0$ nur dann zu realisieren, wenn $m\geqq 2n$ ist. Für $\chi_F(M)$, $M\in\Gamma_0(q)$, ergab sich in [1] für gerade m ein expliziter Ausdruck. Insbesondere wurde $\chi_F(M)=1$ unter der Voraussetzung $m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ und

$$M\in\Gamma(q)=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in Sp_n(\mathbb{Z}),\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}(\mathrm{mod}\, q)\right\}$$

bewiesen. E bezeichnet die n-reihige Einheitsmatrix.

Im folgenden sei $(\Gamma_0, r, \chi)_0$ für eine Untergruppe Γ_0 der Siegelschen Modulgruppe $\Gamma = \Gamma(1)$ und eine rationale Zahl $r > 0$ der lineare Raum der Modulformen f zur Gruppe Γ_0, zum Gewicht r und zum Multiplikatorsystem χ, so daß

$$f|M = \chi(M) f \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0$$

ist, wenn

$$(f|M)(Z) = |CZ + D|^{-r} f(M\langle Z\rangle), \qquad M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

gesetzt wird. Unter der Voraussetzung $\Gamma(q) \subset \Gamma_0 \subset \Gamma$ heißt eine Form $f \in (\Gamma_0, r, \chi)_0$ Spitzenform, wenn in der Fourierentwicklung

$$(f|L)(Z) = \sum_{T \geqq 0} a_L(T) \exp\{2\pi i \sigma(ZT)\} \quad \text{für alle} \quad L \in \Gamma$$

ein Koeffizient $a_L(T)$ nur im Falle $T > 0$ von Null verschieden sein kann. Der lineare Unterraum von $(\Gamma_0, r, \chi)_0$, der von allen Spitzenformen gebildet wird, werde mit $(\Gamma_0, r, \chi)_1$ bezeichnet.

Nun zur Sache: Die in [1] angestellten Überlegungen bedürfen der folgenden Ergänzungen.

1. Die Formen $\Theta_F(Z, \phi_v)$ sind im Falle $v > 0$ durchweg Spitzenformen. Zum Beweis werden die Reihen

$$\Theta_v(Z, F, V, Y) = \sum_{N \equiv Y (\mathrm{mod}\, 1)} |V' F^{\frac{1}{2}} N|^v \exp\{\pi i \sigma(ZF[N])\} \qquad (v \geqq 0) \tag{3}$$

eingeführt mit rationalen Matrizen $Y = Y^{(m,n)}$, die der Bedingung $FY \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)$ genügen. Die Reihen (3) sind selbst Modulformen:

$$\Theta_v(Z, F, V, Y) \in \left(\Gamma(q), \frac{m}{2} + v, \chi_F\right)_0 \quad \text{für} \quad v \geqq 0\,. \tag{4}$$

Der von ihnen bei festgehaltenen v, F, V erzeugte lineare Raum erweist sich als Darstellungsraum der Siegelschen Modulgruppe, wenn die Wirkung von $M \in \Gamma$ auf eine Form f durch $f \to f|M$ erklärt und das Gewicht $\frac{m}{2} + v$ zugrunde gelegt wird. Insbesondere ergibt sich damit

$$\Theta_v(Z, F, V, Y) \in \left(\Gamma(q), \frac{m}{2} + v, \chi_F\right)_1 \quad \text{für} \quad v > 0\,. \tag{5}$$

Entscheidend bleibt natürlich die Frage, wann $\Theta_v \neq 0$ $(v > 0)$ ist. Der Nachweis von nicht identisch verschwindenden Spitzenformen dieses Typus gelang Raghavan [5] im Fall $n = 2$, $m = 4$, $v = 1$ mit speziell gewähltem F. Seine, dem Spezialfall angepaßten Überlegungen lassen kaum Hoffnung, mit Hilfe des obigen Ansatzes nicht identisch verschwindende Spitzenformen kleinen Gewichts, etwa mit der oberen Schranke $n + 1$, und beliebigen Grades n zu bekommen. Um so wichtiger erscheint mir, daß (5) im Falle $v = 1$ ohne die in (2) angegebene Beschränkung für V

gültig ist, was im Falle $n=1$ übrigens schon von Petersson [4] bemerkt wurde. In [1] ist einfach übersehen worden, daß der Beweis von Lemma 3, hier zitiert in der Form

$$\left|V' \frac{\partial}{\partial W}\right|^{v} \exp\{\pi i \sigma(PW'W+2Q'W+R)\}$$
$$=|2\pi i(PW'+Q')V|^{v} \exp\{\pi i \sigma(PW'W+2Q'W+R)\} \qquad (v>0)\,, \tag{6}$$

im Fall $v=1$ die Voraussetzung $V'V=0$ nicht benötigt. In dieser Identität sind

$$V=V^{(m,n)},\ W=W^{(m,n)},\ Q=Q^{(m,n)},\ P=P^{(n)},\ R=R^{(n)}$$

komplexe Matrizen. P ist symmetrisch vorauszusetzen.

2. Es kann also $v\leqq 1$, $m=n$, $V=F^{-\frac{1}{2}}$ gewählt werden. Man erhält mit dieser Spezialisierung die Formen

$$\vartheta_v(Z,F,Y)=\Theta_v(Z,F,F^{-\frac{1}{2}},Y)=\sum_{N\equiv Y(\mathrm{mod}\,1)} |N|^{v} \exp\{\pi i \sigma(ZF[N])\}\,, \tag{7}$$

an Stelle von (4) und (5) also

$$\vartheta_v(Z,F,Y)\in\left(\Gamma(q),\frac{n}{2}+v,\chi_F\right)_v \quad \text{für} \quad m=n,\ FY\equiv 0(\mathrm{mod}\,1),\ v\leqq 1\,. \tag{8}$$

Für die Spitzenformen ϑ_1 lassen sich einfache Bedingungen formulieren, die $\vartheta_1\not\equiv 0$ bei spezieller Wahl von F und Y garantieren. Zum Beispiel ist $\vartheta_1(Z,F,0)\not\equiv 0$, wenn die Einheitengruppe von F:

$$\Gamma(F)=\{U\in GL_n(\mathbb{Z}), F[U]=F\}$$

in $SL_n(\mathbb{Z})$ liegt. Mit Hilfe dieser und ähnlicher Überlegungen beweise ich unter anderem

Satz 1. a) *Es sei entweder $n=2$, $q\equiv -1(\mathrm{mod}\,8)$, $q\geqq 23$ oder $n=24$, $q=1$. Dann ist*

$$\dim\left(\Gamma_0(q),\frac{n}{2}+1,\chi_F\right)_1>0, \qquad q=q(F)$$

für mindestens eine gerade Matrix $F=F^{(n)}>0$.

b) *Es sei $n\geqq 1$, $h\geqq 3$ und $F=F^{(n)}>0$ eine gerade Matrix. Dann ist*

$$\dim\left(\Gamma(hq),\frac{n}{2}+1,\chi_{hF}\right)_1>0 \quad \textit{mit} \quad q=q(F)\,.$$

Die Behauptung a) für $n=24$, $q=1$ mit $\chi_F=1$ folgt aus der Existenz gerader unimodularer $F=F^{(24)}$ mit $\Gamma(F)\subset SL_{24}(\mathbb{Z})$. Die dem Leech'schen Gitter der Dimension 24 zugeordneten Matrizen F haben, wie Conway [3] bemerkt hat, diese Eigenschaft.

Besonderes Interesse beanspruchen die mit einem primitiven Charakter χ mod h gebildeten Reihen

$$\vartheta_v^*(Z,F,\chi)=\sum_{N\equiv 0(\mathrm{mod}\,1)} \chi(|N|)|N|^{v} \exp\{\pi i \sigma(ZF[N])\} \qquad (v=0,1)\,, \tag{9}$$

die aus Reihen vom Typus (7) zusammengesetzt werden können. Sie sind Modulformen, im Fall $v=1$ sogar Spitzenformen:

$$\vartheta_v^*(Z, F, \chi) \in \left(\Gamma_0(h^2 q), \frac{n}{2}+v, \hat{\chi}\right)_v \qquad (v=0,1) \tag{10}$$

mit

$$\hat{\chi}(M) = \chi(|D|)\chi_{hF}(M) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(h^2 q)\,. \tag{11}$$

Die Transformationseigenschaften der Formen (9) wurden im Fall $n=1$ bereits von Shimura [6] festgestellt, im Fall $n>1$, $v=0$ von Andrianov. Die auffälligen Analogien, die zwischen [6] und [2] zu bemerken sind, lassen vermuten, daß die Thetareihen (9) in der von Andrianov [2] begründeten Theorie der Dirichletreihen zu Modulformen zweiten Grades und ihrer Verallgemeinerung eine wichtige Rolle spielen werden.

Eine Rechtfertigung für die Publikation des vorliegenden Aufsatzes, der in methodischer Hinsicht über Klassisches kaum hinausgeht, sehe ich vor allem in der Anwendung, die E. Freitag auf Strukturfragen der algebraischen Funktionenkörper zu Untergruppen $\Gamma_0 \subset \Gamma$ von endlichem Index vornehmen wird.

Im Hinblick auf diese Anwendungen erhebt sich die Frage, wie klein q als Stufe einer positiven geraden Matrix $F^{(n)}$ bei gegebenem n gewählt werden kann. Die Wahl $F^{(n)} = 2E^{(n)}$ zeigt, daß $q=4$ in jedem Fall möglich ist. Ein besseres Resultat gibt

Satz 2. *Es gibt für jedes $n \geqq 1$ eine positive gerade n-reihige Matrix F_n mit der Stufe*

$$q_n = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad n \equiv 0 \pmod 8 \\ 2 & \textit{für} \quad n \equiv 4 \pmod 8 \\ 3 & \textit{für} \quad n \equiv 2 \pmod 4 \\ 4 & \textit{für} \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Zum Beweis setzen wir

$$F_n = \begin{pmatrix} F_{8g} & 0 \\ 0 & F_h \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad n = 8g+h,\ 0 \leqq h < 8$$

und beachten, daß $q_{8g}=1$ realisierbar ist. Es folgt $q_n = q_h$ für $n \equiv h \pmod 8$. Die notierten Stufenzahlen q_h für $h=2,4,6$ kommen den Matrizen

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 2 & \\ & & & 2 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zu. In nicht ausgefüllte Stellen dieser Matrizen sind Nullen einzutragen.

Der ausführlichen Darstellung [1] ist nur noch weniges hinzuzufügen, um die eingangs formulierten Aussagen zu begründen. Die Betrachtungen nehmen ihren Ausgang von der Thetareihe

$$\Theta_F(Z,X,Y) = \sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} \exp\{\pi i \sigma(ZF[N+Y] + 2X'N + X'Y)\}, \tag{12}$$

die für

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$$

der Transformationsformel

$$\Theta_F(M\langle z\rangle, XA' - FYB', -F^{-1}XC' + YD') = \chi_F(M)|CZ+D|^{\frac{m}{2}} \Theta_F(Z,X,Y) \tag{13}$$

genügt. Hierin sind

$$X = X^{(m,n)}, \qquad Y = Y^{(m,n)}$$

zunächst beliebige komplexe Matrizen des angegebenen Typus. Wir setzen $X=0$, $Y = F^{\frac{1}{2}}W$ und wenden auf beide Seiten von (9) den Operator $\left|V' \frac{\partial}{\partial W}\right|^{\nu}$ an, wobei $V'V = 0$ im Falle $\nu > 1$ vorauszusetzen ist. Mit Hilfe von (6) ergibt sich mit den in [1] angestellten Überlegungen, aber weiterhin variablem Y die Transformationsformel

$$\sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} |V'F^{\frac{1}{2}}(N+YD')|^{\nu} \exp\{\pi i \sigma(M\langle Z\rangle F[N+YD'] - 2N'FYB' - BY'FYD')\}$$

$$= \chi_F(M)|CZ+D|^{\frac{m}{2}+\nu} \sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} |V'F^{\frac{1}{2}}(N+Y)|^{\nu} \exp\{\pi i \sigma(ZF[N+Y])\}. \tag{14}$$

Nunmehr sei Y eine rationale Lösung von

$$FY \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1) \quad \text{und} \quad M \in \Gamma(q).$$

Beachtet man, daß

$$B \equiv 0, \qquad D \equiv E (\mathrm{mod}\, q), \qquad qY \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1), \qquad qF^{-1} \text{ gerade}$$

ist, so bestätigt man leicht

$$\sigma(N'FYB') \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1), \quad \sigma(BY'FYD') \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2), \quad YD' \equiv Y (\mathrm{mod}\, 1).$$

Die Thetareihen (3) erweisen sich damit als Modulformen:

$$\Theta_\nu(Z,F,V,Y) \in \left(\Gamma(q), \frac{m}{2} + \nu, \chi_F\right)_0 \quad \text{für} \quad FY \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1). \tag{15}$$

Um die allgemeine Transformationsformel

$$(\Theta_\nu|M)(Z,F,V,Y) = \sum_{\substack{X \bmod 1 \\ FX \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)}} \lambda(Y,X) \Theta_\nu(Z,F,V,X) \tag{16}$$

für beliebige Substitutionen $M \in \Gamma$ mit gewissen $\lambda(Y, X) \in \mathbb{C}$ zu beweisen, genügt es, wenn wir uns auf das Erzeugendensystem

$$\begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} (T' = T \text{ ganz}), \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

von Γ beschränken. Das Verhalten gegenüber den Translationen wird durch die Formel

$$\Theta_\nu(Z + T, F, V, Y) = \exp\{\pi i \sigma(TF[Y])\} \Theta_\nu(Z, F, V, Y) \tag{17}$$

beschrieben, die sofort einzusehen ist. Im verbleibenden Fall bedienen wir uns der Transformationsformel (s. [1], Lemma 2)

$$\Theta_F(-Z^{-1}, X, Y) = |F|^{-\frac{n}{2}} |-iZ|^{\frac{m}{2}} \Theta_{F^{-1}}(Z, -Y, X), \tag{18}$$

vorläufig mit variablen X, Y. Setzt man jetzt $X = 0$ und $Y = F^{-\frac{1}{2}} W$ und wendet man auf die entstehende Identität wieder den Operator $\left| V' \frac{\partial}{\partial W} \right|^\nu$ an, so ergibt sich mit Hilfe von (6) identisch in Y die Transformationsformel

$$\sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} |V' F^{\frac{1}{2}}(N + Y)|^\nu \exp\{\pi i \sigma(-Z^{-1} F[N + Y])\}$$
$$= i^{n\nu} |F|^{-\frac{n}{2}} |-iZ|^{\frac{m}{2} + \nu} \sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} |V' F^{-\frac{1}{2}} N|^\nu \exp\{\pi i \sigma(Z F^{-1}[N] - 2Y'N)\}. \tag{19}$$

Im folgenden sei wieder $FY \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)$. Setzt man $N = FN_1$ und beachtet

$$\sum_{N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)} = \sum_{\substack{X \,\mathrm{mod}\, 1 \\ FX \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)}} \sum_{N_1 \equiv X (\mathrm{mod}\, 1)},$$

so resultiert schließlich

$$|-iZ|^{-\frac{m}{2} - \nu} \Theta_\nu(-Z^{-1}, F, V, Y)$$
$$= i^{n\nu} |F|^{-\frac{n}{2}} \sum_{\substack{X \,\mathrm{mod}\, 1 \\ FX \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)}} \exp\{2\pi i \sigma(Y'FX)\} \Theta_\nu(Z, F, V, X). \tag{20}$$

Damit ist (16), insbesondere auch (5) bewiesen.

Um das Transformationsverhalten der Reihen (9) zu ermitteln, führen wir in (14) die Substitution $F \to hF$, $Y \to \frac{1}{h} G$ mit $h \in \mathbb{N}$, $G \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)$ aus. Da q in hq übergeht, so ergibt sich

$$\sum_{N \equiv GD' (\mathrm{mod}\, h)} |V' F^{\frac{1}{2}} N|^\nu \exp\left\{\frac{\pi i}{h} \sigma(M\langle Z \rangle F[N])\right\}$$
$$= \chi_{hF}(M) |CZ + D|^{\frac{m}{2} + \nu} \sum_{N \equiv G (\mathrm{mod}\, h)} |V' F^{\frac{1}{2}} N|^\nu \exp\left\{\frac{\pi i}{h} \sigma(ZF[N])\right\} \tag{21}$$

unter der Voraussetzung

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(hq), \qquad B \equiv 0 \pmod h. \tag{22}$$

Schließlich bringt die Substitution

$$Z \to hZ, \qquad M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & hB \\ \frac{1}{h}C & D \end{pmatrix},$$

die χ_{hF} invariant läßt, den Nenner h in den Exponentialfunktionen in (21) zum Verschwinden, während

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(h^2 q)$$

an Stelle von (22) tritt. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich im Fall $m=n$, $\nu \leqq 1$, wenn $V=F^{-\frac{1}{2}}$ gewählt wird:

$$\sum_{N \equiv GD' (\bmod h)} |N|^{\nu} \exp\{\pi i \sigma(M\langle Z\rangle F[N])\}$$
$$= \chi_{hF}(M)|CZ+D|^{\frac{m}{2}+\nu} \sum_{N \equiv G (\bmod h)} |N|^{\nu} \exp\{\pi i \sigma(ZF[N])\} \quad (\nu=0,1). \tag{24}$$

Multiplikation mit dem Charakterwert

$$\chi(|GD'|)=\chi(|G|)\chi(|D|)$$

und Summation über $G \bmod h$ führt (24) in die behauptete Transformationsformel der Thetareihe (9) über. (10) ist somit bewiesen.

Eine abschließende Betrachtung ist der Frage nach dem Nichtverschwinden der Spitzenformen $\vartheta_1(Z,F,Y)$ und $\vartheta_1^*(Z,F,\chi)$ gewidmet. Die Koeffizienten in der Fourierentwicklung

$$\vartheta_1(Z,F,Y)=\sum_{T>0} \alpha(T,F,Y)\exp\{\pi i \sigma(ZT)\}, \tag{25}$$

haben nach (7) die Gestalt

$$\alpha(T,F,Y)=\sum_{\substack{N \equiv Y (\bmod 1) \\ F[N]=T}} |N|, \qquad FY \equiv 0 (\bmod 1). \tag{26}$$

Man bestätigt leicht

$$\alpha(T,F,Y)=|U|\alpha(T,F[U],U^{-1}Y) \quad \text{für} \quad U \in GL_n(\mathbb{Z}), \tag{27}$$

damit auch

$$\alpha(T,F,0)=|U|\alpha(T,F,0) \quad \text{für} \quad U \in \Gamma(F). \tag{28}$$

Ersichtlich ist

$$\alpha(F,F,0)>0, \quad \text{falls} \quad \Gamma(F)\subset SL_n(\mathbb{Z}). \tag{29}$$

Die letzten beiden Aussagen ergeben unmittelbar

$$\vartheta_\nu(Z,F,0)\not\equiv 0 \Leftrightarrow \Gamma(F)\subset SL_n(\mathbb{Z}). \tag{30}$$

Wegen $-E\in\Gamma(F)$ kann $\Gamma(F)\subset SL_n(\mathbb{Z})$ nur für gerade n zutreffen. Die auf $n=24$, $q=1$ bezogene Aussage von Satz 1, a) folgt aus (30). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}_n$ den Bereich der positiven symmetrischen Matrizen $P=P^{(n)}$, die im Sinne von Minkowski reduziert sind; $\mathring{\mathfrak{R}}_n$ sei das Innere und $\partial\mathfrak{R}_n$ der Rand von $\mathfrak{R}_n$. Wegen (27) kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $F\in\mathfrak{R}_n$ vorausgesetzt werden.

Satz 3. *Wenn die gerade Matrix F in $\mathring{\mathfrak{R}}_n$ liegt und n gerade ist, so ist*

$$\vartheta(Z,F,0)\not\equiv 0.$$

Im Fall $n=2$ gilt hiervon die Umkehrung, sofern F überhaupt reduziert ist.

Beweis. 1. $F\in\mathring{\mathfrak{R}}_n$, $n\equiv 0 \pmod 2$ hat zur Folge, daß $\Gamma(F)=\{\pm E\}\subset SL_n(\mathbb{Z})$ ist. Nunmehr ist (30) anzuwenden.

2. Bekanntlich ist

$$F=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}\in\mathfrak{R}_2 \Leftrightarrow 0\leqq b\leqq a\leqq c, \qquad 4ac-b^2>0.$$

Wenn $F\in\partial\mathfrak{R}_2$, so ist mindestens eine der Gleichungen

$$b=0,\ a=b,\ a=c$$

erfüllt. Entsprechend liegt mindestens eine der Matrizen

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

mit negativer Determinante in $\Gamma(F)$.

Der damit bewiesene Satz 3 gestattet beispielsweise

$$\vartheta\left(Z,\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2h\end{pmatrix},0\right)\not\equiv 0 \quad \text{für} \quad h\geqq 3 \tag{31}$$

zu schließen. Dies beweist die auf $n=2$ bezogene Aussage von Satz 1, a); denn die Reihe (31) gehört zur Stufe $q=8h-1$.

Die Bedingung $FY\equiv 0 \pmod 1$ wird nicht verletzt, wenn wir F durch $hF (h\in\mathbb{N})$ ersetzen und $Y=\frac{1}{h}E$ wählen. q bezeichne nach wie vor die Stufe von F, so daß hq die

Stufe von hF ist. Es ergibt sich

$$\alpha(\tfrac{1}{h}F, hF, \tfrac{1}{h}E) = \sum_{\substack{N \equiv \frac{1}{h}E (\mathrm{mod}\, 1) \\ hF[N] = \frac{1}{h}F}} |N| = h^{-n} \sum_{\substack{N \equiv E (\mathrm{mod}\, h) \\ F[N] = F}} |N| > 0,$$

sofern $h \geqq 3$ ist. Aus den Summationsbedingungen folgt nämlich $|N| = \pm 1$, $|N| \equiv 1 (\mathrm{mod}\, h)$, mithin $|N| = 1$. Wir formulieren das Ergebnis in

Satz 4. *Für $n \geqq 1$, $h \geqq 3$ und jede positive gerade Matrix $F^{(n)}$ ist $\vartheta_1(Z, hF, \frac{1}{h}E) \not\equiv 0$.*

Damit ist auch Satz 1, b) bewiesen.

Für $\vartheta_1^*(Z, F, \chi)$ läßt sich ein zu (30) analoges Kriterium formulieren. Es lautet:

$$\vartheta_1^*(Z, F, \chi) \not\equiv 0 \Leftrightarrow \chi(|U|)|U| = 1 \quad \text{für alle} \quad U \in \Gamma(F) \tag{32}$$

und folgt aus der Tatsache, daß einerseits $\vartheta_1^*(Z, F, \chi)$ den Faktor $\chi(|U|)|U|$ aufnimmt, wenn man in (9) die Matrix N, über die summiert wird, durch UN mit $U \in \Gamma(F)$ ersetzt, während sich die Reihe andererseits nicht ändert. Überdies ist zu beachten, daß

$$\sum_{U \in \Gamma(F)} \chi(|U|)|U|$$

ein Fourierkoeffizient der Spitzenform $\vartheta_1^*(Z, F, \chi)$ ist. Wenn $\Gamma(F) \subset SL_n(\mathbb{Z})$, so unterliegt χ ein (32) keiner Beschränkung. Im Falle $\Gamma(F) \not\subset SL_n(\mathbb{Z})$ indessen ist zu fordern, daß der eigentliche Charakter χ mod h ungerade ist. Ein solcher existiert nur für $h \geqq 3$.

Von Interesse wäre die Kenntnis des Minimums

$$q_n^* = \min\{q(F^{(n)}) | \Gamma(F^{(n)}) \subset SL_n(\mathbb{Z}), F^{(n)} \text{ gerade } > 0\} \text{ für } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2), \tag{33}$$

da wegen

$$\vartheta_1(Z, F, 0) = \vartheta_1^*(Z, F, 1) \qquad (h = 1)$$

nach (10) und (30) sofort

$$\dim(\Gamma_0(q_n^*), \tfrac{n}{2} + 1, \chi_F)_1 > 0$$

mit geeignetem F geschlossen werden kann. Aus dem Beweis von Satz 1, a) geht jedenfalls hervor, daß $q_2^* = 23$ und $q_{24}^* = 1$ ist.

Zusatz: Inzwischen konnte Herr Eichler mit Hilfe von Gitterpunktsbetrachtungen beweisen, daß die von n abhängige Minimalstufe

$$\min\{q(F) | F = F^{(n)} \text{ gerade } > 0\}$$

in Wirklichkeit nur von n mod 8 abhängt. Daraus ergibt sich die Minimalität der von mir in Satz 2 genannten Stufenzahlen q_n für alle n in einfacher Weise, wenn man benutzt, daß q_h für $h = 1, 2, 4, 8$ minimal ist.

Literatur

1. Andrianov, A. N., Maloletkin, G. N.: Behavior of theta series of degree *n* under modular substitutions. Math. USSR-Izvestija **39**, 227—241 (1975); Russian p. nos. 243—258
2. Andrianov, A. N.: Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2. Russian Math. Surveys **29**, 45—116 (1974); russ. Original: Uspekhi Mat. Nauk **29**, 43—110 (1974)
3. Conway, J. H.: A characterisation of Leech's lattice. Inv. math. **7**, 137—142 (1969)
4. Petersson, W. H. H.: Über Thetareihen zu großen Untergruppen der rationalen Modulgruppe. Sitzber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss. Kl., 1972, 1. Abh.
5. Raghavan, S.: Cusp forms of degree 2 and weight 3. Math. Ann. **224**, 149—156 (1976)
6. Shimura, G.: On modular forms of half integral weight. Ann. Math. **97**, 440—481 (1973)

Eingegangen am 3. November 1976