Indefinite Quadratische Formen und Eulerprodukte

HANS MAASS
Universität Heidelberg

In der vorliegenden Note werde ich an einfachen Beispielen zeigen, daß die Maße der Darstellungen von binären Formen durch gegebene indefinite quadratische Formen multiplikative Eigenschaften besitzen, die in Eulerproduktdarstellungen zugeordneter Zetafunktionen ihren Ausdruck finden. Es handelt sich dabei um das Pendant zu dem elementaren Teil der Theorie Andrianovs [1] über die Eulerprodukte, die den Modulformen zweiten Grades entsprechen, dem Teil nämlich, der sich auf die Eisensteinreihen bezieht, die im Sinne der Siegelschen Theorie ([7], Vol. II, p. 421–466) als Geschlechtsinvarianten quadratischer Formen anzusehen sind. Diese Invarianten sind komplex- oder reell analytische periodische Funktionen vom Typus

$$\sum_{\{C,D\}} \gamma(C, D)\,|CZ+D|^{-\alpha}\,|C\bar{Z}+D|^{-\beta}, \tag{1}$$

je nachdem, ob die zugrunde liegende quadratische Form mit der Signatur $(2\alpha, 2\beta)$ definit oder indefinit ist. $Z = Z^{(n)}$ bezeichnet eine n-reihige symmetrische komplexe Matrix mit positivem Imaginärteil und C, D durchläuft ein volles System nicht-assoziierter teilerfremder symmetrischer Paare von n-reihigen Matrizen. Das genaue Transformationsverhalten der analytischen Geschlechtsinvarianten wurde von M. Koecher [4] und H. Klingen [3] ermittelt.

Nunmehr wende ich mich den indefiniten quadratischen Formen zu, deren Geschlechtsinvarianten (1) Modulformen zur vollen Siegelschen Modulgruppe sind. Diese quadratischen Formen werden durch gerade unimodulare symmetrische Matrizen $S = S^{(m)}$ dargestellt. Es sei

$$x_1^2+\cdots+x_\mu^2-x_{\mu+1}^2-\cdots-x_m^2$$

die reelle Normalform der mit S gebildeten quadratischen Form, also $(2\alpha, 2\beta) = (\mu, m-\mu)$ mit $0<\mu<m$ die Signatur von S. Es ist bekannt, daß Matrizen S der angegebenen Art genau dann existieren, wenn

$$2\mu \equiv m \pmod 8 \tag{2}$$

ist, und daß die Äquivalenzklasse von S durch die Signatur eindeutig bestimmt ist. Ferner weiß man seit Minkowski, daß zu jeder natürlichen Zahl q eine unimodulare Matrix U existiert, die der Kongruenz

$$U'SU \equiv \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \pmod{q} \tag{3}$$

genügt. Hierin ist $E = E^{(g)}$ $(m = 2g)$ die g-reihige Einheitsmatrix und U' die aus U durch Transposition entstehende Matrix.

In der Bezeichnung Siegels ([7], Vol. II, p. 422) sei $\mu(S, T)$ das Maß der Darstellungen von $T = T^{(n)}$ durch S. Die Matrix T ist hier gerade vorauszusetzen. Der Siegelsche Hauptsatz über indefinite quadratische Formen ([7], Vol. II, p. 423) besagt, daß $\mu(S, T)$ mit dem Produkt der p-adischen Darstellungsdichten identisch und daher

$$\mu(S, T) = \lim_{q\to\infty} q^{n(n+1)/2-mn} A_q(S, T) \tag{4}$$

ist, wenn $A_q(S, T)$ die Anzahl der modulo q verschiedenen ganzen Lösungen $G = G^{(m,n)}$ der Kongruenz $G'SG \equiv T \pmod{q}$ bezeichnet und q etwa über die Folge der Fakultäten nach ∞ läuft. Dabei sind die Fälle

$$m = 2 \quad \text{und} \quad m - n = 2, \qquad -|S|\,|T| = \text{Quadratzahl} \tag{5}$$

von vornherein auszuschließen und es ist vorauszusetzen, daß

$$\begin{gathered} \text{Signatur } S = (\mu, m-\mu), \qquad \text{Signatur } T = (\nu, n-\nu), \\ \nu \leqq \mu, \qquad n - \nu \leqq m - \mu, \qquad n + 1 < m. \end{gathered} \tag{6}$$

Diese Annahmen werden im folgenden beibehalten. Die Kongruenz (3) impliziert die Unabhängigkeit der Kongruenzlösungsanzahl $A_q(S, T)$ von der Signatur von S. Nach E. Witt (vergl. hierzu [7], Vol. III, p. 443–445) ist daher

$$\mu(S, T) = 2^n b\left(T, \frac{m}{2}\right), \tag{7}$$

wenn zur Abkürzung

$$b(T, s) = \sum_{R \,(\mathrm{mod}\, 1)} (\nu(R))^{-s} e^{\pi i \sigma(RT)} \qquad (T \text{ gerade}) \tag{8}$$

gesetzt wird. Hierin durchläuft R ein volles System modulo 1 verschiedener symmetrischer n-reihiger rationaler Matrizen; $\nu(R)$ bezeichnet das Produkt der gekürzten Nenner aller Elementarteiler von R und σ die Spurbildung. Da die Berechnung von $\mu(S, T)$ für beliebige n mit vertretbarem Aufwand zur Zeit nicht möglich erscheint, beschränke ich mich nun auf den Fall

$$n = 2\,.$$

Hier vereinfacht sich die Situation freilich entscheidend, da die Funktion $b(T, s)$ von G. Kaufhold [2] vollständig berechnet worden ist. Es scheint, daß nicht nur mir entgangen ist, um wieviel einfacher ich 1972 die zahlentheoretische Natur der Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe zweiten Grades zum Gewicht g mit den Ergebnissen der von Siegel angeregten Dissertation [2] hätte analysieren können. Ist doch $b(T, g)$ für $T > 0$ bis auf elementare Faktoren der allgemeine Fourierkoeffizient dieser Eisensteinreihe.

Im folgenden sei N eine vorgegebene Matrix mit den Eigenschaften

$$N = N^{(2)} = N', \quad |N| \neq 0, \quad \tfrac{1}{2}N \text{ primitiv}, \quad \text{also } N \text{ gerade}\,.$$

Mit d wird die Diskriminante des (rationalen oder quadratischen) Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-|N|})$ bezeichnet, so daß $-|N| = df^2$ mit einer natürlichen Zahl f gilt. Es soll nun gezeigt werden, daß die Dirichletreihe in zwei Variablen

$$R(N; s, z) = f^{s-3/2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{b(hN, s)}{h^{z+3-2s}} \tag{9}$$

und damit auch

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(S, hN)}{h^{z+3-m}} = 4f^{(3-m)/2} R\left(N; \frac{m}{2}, z\right) \tag{10}$$

eine Eulersche Produktdarstellung besitzt. Das ist das eigentliche Ziel der Ausführungen. Nach (5) sind die Fälle $m = 2$ und $m = 4$, $d = 1$ auszuschließen. Benötigt werden im folgenden die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$, die Dirichletsche Reihe $L(s, \chi)$ zum Charakter $\chi(l) = (d/l)$ für $l \geqq 1$ sowie

$$\xi_D(s) = \zeta(s) L(s, \chi) \prod_{p/f} (1 - p^{-s})(1 - \chi(p) p^{-s}) \quad \text{mit} \quad D = df^2\,.$$

Im Fall $d \neq 1$ ist dies die Zetafunktion zu der Ordnung in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit dem Führer f. Für eine vorgegebene Primzahl p seien p^a und p^b die p-Beiträge zu

h beziehungsweise f. Wie Kaufhold [2] zeigen konnte, ist

$$b(hN, s) = \frac{L(s-1, \chi)}{\zeta(s)\zeta(2s-2)} F(hN, s) \tag{11}$$

mit

$$F(hN, s) = \prod_p \sum_{l=0}^{a} p^{l(2-s)} \left\{ \sum_{k=0}^{c-l} p^{k(3-2s)} - \chi(p) \sum_{k=0}^{c-l-1} p^{k(3-2s)+1-s} \right\}, \tag{12}$$

wobei $a+b=c$ gesetzt ist. Das Produkt ist endlich, da nur die Primteiler p von $|hN|$ einen von 1 verschiedenen Beitrag liefern. Ferner ist

$$|b(hN, s)| \leqq b(0, s) = \frac{\zeta(s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(s)\zeta(2s-2)} \quad \text{für} \quad s > 3\,, \tag{13}$$

so daß die Reihe (9) für $\mathcal{Re}\, z > 2\mathcal{Re}\,(s-1) > 4$ absolut konvergiert. Die Rechnung nimmt nun folgenden Gang:

$$\sum_{h=1}^{\infty} F(hN, s) h^{2s-3-z} = \prod_p \sum_{a=0}^{\infty} p^{a(2s-3-z)} F_p(a, b, s)\,. \tag{14}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} F_p(a, b, s) &= \sum_{l=0}^{a} p^{l(2-s)} \left\{ \sum_{k=0}^{c-l} p^{k(3-2s)} - \chi(p) \sum_{k=0}^{c-l-1} p^{k(3-2s)+1-s} \right\} \\ &= \frac{1-\chi(p)p^{1-s}}{1-p^{3-2s}} \left\{ \frac{1-p^{(a+1)(2-s)}}{1-p^{2-s}} - p^{c(3-2s)} \frac{1-p^{(a+1)(s-1)}}{1-p^{s-1}} \right\} \\ &\quad + p^{c(3-2s)} \frac{1-p^{(a+1)(s-1)}}{1-p^{s-1}}\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} & p^{b(s-3/2)} \sum_{a=0}^{\infty} p^{a(2s-3-z)} F_p(a, b, s) \\ & = \frac{p^{b(s-3/2)}(1-\chi(p)p^{1-s})}{(1-p^{3-2s})(1-p^{s-1-z})(1-p^{2s-3-z})} + \frac{p^{-b(s-3/2)}(\chi(p)p^{1-s}-p^{3-2s})}{(1-p^{3-2s})(1-p^{-z})(1-p^{s-1-z})} \end{aligned} \tag{15}$$

erhellt. Diese beiden Terme sind im Falle $b=0$, d.h. $p \nmid f$, in

$$\frac{(1-p^{s-2-z})(1-\chi(p)p^{s-2-z})}{(1-p^{-z})(1-p^{s-1-z})(1-p^{s-2-z})(1-p^{2s-3-z})} \tag{16}$$

zusammenzufassen. Im Falle p/f hingegen nimmt (15) die Gestalt

$$\{(1-p^{-z})(1-p^{s-1-z})(1-p^{s-2-z})(1-p^{2s-3-z})\}^{-1} K_p(s, z, f) \tag{17}$$

mit

$$\begin{aligned} K_p(s, z, f) &= (1-p^{s-2-z})(1-p^{3-2s})^{-1} \\ &\times \{p^{b(s-3/2)}(1-\chi(p)p^{1-s})(1-p^{-z}) + p^{-b(s-3/2)}(\chi(p)p^{1-s}-p^{3-2s})(1-p^{2s-3-z})\} \end{aligned} \tag{18}$$

an. Auf Grund der Formeln (9), (11), (14), (17) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} &\zeta_D(z+2-s)R(N; s, z) \\ &= \frac{L(s-1, \chi)}{\zeta(s)\zeta(2s-2)} \zeta(z)\zeta(z+1-s)\zeta(z+2-s)\zeta(z+3-2s) \prod_{p/f} K_p(s, z, f) . \end{aligned} \tag{19}$$

Die Invarianz von

$$\begin{aligned} &\pi^{2z+3-2s}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+3-2s}{2}\right) \\ &\qquad \times \zeta_D(z+2-s)R(N; s, z)\left\{\prod_{p/f} K_p(s, z, f)\right\}^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

bezüglich der Substitution $z \to 2s-2-z$ ist eine unmittelbare Folge der Funktionalgleichung für die Riemannsche Zetafunktion. Das endliche Produkt in (20) ist in gleichem Sinne als elementar zu bezeichnen wie der Korrekturfaktor in der Funktionalgleichung der L-Reihen zu uneigentlichen Charakteren. Im übrigen bestätigt man

$$K_p(3-s, z+3-2s, f) = K_p(s, z, f)$$

und damit die Invarianz von

$$\frac{\zeta(s)\zeta(2s-2)}{L(s-1, \chi)} R(N; s, z) \tag{21}$$

bezüglich der Substitution $s \to 3-s$, $z \to z+3-2s$.

Es sei erlaubt, noch einige Bemerkungen über die Wirkung der verallgemeinerten Heckeschen Operatoren T_h, $h \geqq 1$, auf die reell-analytischen

Eisensteinreihen n-ten Grades

$$G_{\alpha,\beta}(Z,\bar{Z})=\sum_{\{C,D\}}|CZ+D|^{-\alpha}\,|C\bar{Z}+D|^{-\beta}\,,\qquad s=\alpha+\beta\,,\tag{22}$$

anzufügen, in deren Fourierentwicklung $b(T,s)$ als Koeffizient auftritt (s. [6]). Die Summationsvorschrift sei dieselbe wie in (1). Im übrigen ist $\alpha\equiv\beta\pmod 2$ und $\mathscr{R}e\, s>n+1$ vorauszusetzen. Es sei $\mathfrak{O}_h$ die Menge der ganzen Matrizen $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, die nach Multiplikation mit $h^{-1/2}$ in symplektische Matrizen n-ten Grades übergehen, V_h ein Vertretersystem der Linksklassen $\mathfrak{O}_1\backslash\mathfrak{O}_h$. Wird

$$(\varphi\mid M)(Z,\bar{Z})=\varphi(M\langle Z\rangle, M\langle\bar{Z}\rangle)\,|CZ+D|^{-\alpha}\,|C\bar{Z}+D|^{-\beta}$$

gesetzt, so ist

$$G_{\alpha,\beta}\mid T_h=h^{ns-n(n+1)/2}\sum_{M\in V_h}G_{\alpha,\beta}\mid M\tag{23}$$

eine Reihe vom Typus (1), die wegen $G_{\alpha,\beta}\mid L=G_{\alpha,\beta}$ für $L\in\mathfrak{O}_1$ von der Auswahl des Vertretersystems V_h nicht abhängt und daher selbst gegenüber der Siegelschen Modulgruppe $\mathfrak{O}_1$ invariant ist. Das ist aber nur dann möglich, wenn in der die Funktion $G_{\alpha,\beta}\mid T_h$ darstellenden Reihe (1) alle Koeffizienten $\gamma(C,D)$ ein und denselben Wert haben, woraus schließlich

$$G_{\alpha,\beta}\mid T_h=\lambda(h,s)G_{\alpha,\beta}\tag{24}$$

folgt. Der Eigenwert $\lambda(h,s)$ hängt, wie sich gleich zeigen wird, de facto nur von s ab. Wählt man ein spezielles Vertretersystem der Art

$$V_h=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\right\},$$

so wird zufolge (24)

$$1\mid T_h=\lambda(h,s)\cdot 1\,.$$

Mit dem speziellen Vertretersystem in [5], Satz 6, ergibt sich daher

$$\lambda(h,s)=h^{ns-n(n+1)/2}\sum_{D}d_1^{n-s}\,d_2^{n-1-s}\cdots d_n^{1-s}i(D)\,.\tag{25}$$

Die Summation ist über alle n-Tupel natürlicher Zahlen $d_1,d_2,\cdots,d_n$ mit $d_1/d_2/\cdots/d_n/\,h$ zu erstrecken. D bezeichnet die Diagonalmatrix mit den

Elementen $d_1, d_2, \cdots, d_n$ und $i(D)$ den Gruppenindex

$$i(D) = (GL(n, \mathbb{Z}) : GL(n, \mathbb{Z}) \cap DGL(n, \mathbb{Z})D^{-1}). \tag{26}$$

Dabei ist $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Wegen

$$\lambda(hk, s) = \lambda(h, s)\lambda(k, s) \quad \text{für} \quad (h, k) = 1,$$

genügt es $\lambda(h, s)$ für Primzahlpotenzen $h = p^\nu$ zu berechnen. Man setzt zweckmäßig

$$d_i = p^{\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{i-1}}, \qquad 1 \leqq i \leqq n. \tag{27}$$

Die Summationsbedingungen in (25) lauten nun

$$\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{n-1} \geqq 0, \qquad \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{n-1} \leqq \nu.$$

Die Zahl $\nu_n \geqq 0$ werde durch $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = \nu$ erklärt. Zur Beschreibung von $i(D)$ werden die ν_i, $1 \leqq i \leqq n-1$, die von Null verschieden sind, in besonderer Weise ausgezeichnet: Es sei

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_{t-1} < \rho_t = n,$$

$$\nu_{\rho_i} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq t-1; \qquad \nu_i = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq n-1, \quad i \notin \{\rho_1, \cdots, \rho_{t-1}\};$$

ferner sei $a_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ für $1 \leqq i \leqq t$. Dann ist, was hier ohne Beweis mitgeteilt wird,

$$i(D) = j(a_1, a_2, \cdots, a_t) \prod_{k=1}^{n-1} p^{k(n-k)\nu_k},$$

$$j(a_1, a_2, \cdots, a_t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p^{-i}) \prod_{k=1}^{t} \left\{ \prod_{i=1}^{a_k} (1 - p^{-i}) \right\}^{-1} \tag{28}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\phi_k\left(\frac{1}{p}\right) \right)^{[n/k] - [a_1/k] - \cdots - [a_t/k]}.$$

$\phi_k(x)$ ist das k-te Kreisteilungspolynom, $x - 1 < [x] \leqq x$, $[x]$ ganz. Im Spezialfall $n = 3$ stimmt $i(D)$ mit dem von Kaufhold angegebenen Wert (s. [2], p. 470) überein. Die folgenden Rechnungen zielen auf eine Darstellung der Funktion

$$Z(z, s) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda(h, s)}{h^z} = \prod_p Z_p(z, s), \qquad Z_p(z, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda(p^\nu, s)}{p^{\nu s}}. \tag{29}$$

Nach Umschreibung von (25) mit Hilfe von (27) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
Z_p(z, s) &= \sum_{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n = 0}^{\infty} j(a_1, a_2, \cdots, a_t) \prod_{k=0}^{n} p^{\nu_k(-z+ks-k(k+1)/2)} \\
&= (1-p^{-z})^{-1}(1-p^{-z+ns-n(n+1)/2})^{-1} \\
&\qquad\qquad \times \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_{n-1}=0}^{\infty} j(a_1, \cdots, a_t) \prod_{k=1}^{n-1} p^{\nu_k(-z+ks-k(k+1)/2)} \\
&= (1-p^{-z})^{-1}(1-p^{-z+ns-n(n+1)/2})^{-1} \\
&\quad \times \Big\{ 1 + \sum_{t=2}^{n} \sum_{\substack{a_1, \cdots, a_t > 0 \\ a_1 + \cdots + a_t = n}} j(a_1, \cdots, a_t) \sum_{\nu_{\rho_1}, \cdots, \nu_{\rho_{t-1}} = 1}^{\infty} \prod_{i=1}^{t-1} p^{\nu_{\rho_i}(-z+\rho_i s-\rho_i(\rho_i+1)/2)} \Big\} \\
&= (1-p^{-z})^{-1}(1-p^{-z+ns-n(n+1)/2})^{-1} \\
&\quad \times \Big\{ 1 + \sum_{t=2}^{n} \sum_{a_1, \cdots, a_t} j(a_1, \cdots, a_t) \prod_{i=1}^{t-1} p^{-z+\rho_i s-\rho_i(\rho_i+1)/2}(1-p^{-z+\rho_i s-\rho_i(\rho_i+1)/2})^{-1} \Big\} \\
&= \prod_{k=0}^{n} (1-p^{-z+ks-k(k+1)/2})^{-1} \cdot H_p(p^{-z}, p^s) ,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

wobei $H_p(x, y)$ ein Polynom in x, y ist, welches in x den Grad $n-1$ hat. Damit wird

$$
Z_p(z, s) = L_p(z, s) P_p(p^{-z}, p^s) , \tag{31}
$$

wenn

$$
\begin{aligned}
L_p(z, s) &= Q_p^{-1}(p^{-z}, p^s) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \{(1-p^{-z+ks-k(k+1)/2})(1-p^{-z+(n-k)s-(n-k)(n+k+1)/2})\}^{-1}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

gesetzt wird. Hierin sind $P_p(x, y)$ und $Q_p(x, y)$ Polynome in x, y vom Grad $2n-2$ beziehungsweise $2n$ bezüglich der Variablen x. Mit

$$
\begin{aligned}
L(z, s) &= \prod_p L_p(z, s) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \zeta\left(z - ks + \frac{k(k+1)}{2}\right) \zeta\left(z - (n-k)s + \frac{(n-k)(n+k+1)}{2}\right) \right\}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

wird schließlich

$$Z(z, s) = L(z, s) \prod_p P_p(p^{-z}, p^s) . \tag{34}$$

Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion liefert sofort die Invarianz von

$$\begin{aligned}\pi^{(n/2)(2z-ns+n(n+1)/2)} \prod_{k=0}^{n-1} \Big\{ &\Gamma\Big(\frac{z-ks}{2}+\frac{k(k+1)}{4}\Big) \\ &\times \Gamma\Big(\frac{z-(n-k)s}{2}+\frac{(n-k)(n+k+1)}{4}\Big)\Big\} \cdot L(z, s)\end{aligned} \tag{35}$$

bezüglich der Substitution $z \to ns - n(n+1)/2 + 1 - z$. Das Ergebnis dürfte von Interesse sein, da es ein weitreichendes allgemeines Resultat von N. A. Zharkovskaya [8] im Spezialfall der Eisensteinreihe wesentlich verschärft. Direkte Rechnung ergibt noch

$$H_p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 , \\ 1 + xyp^{-2} & \text{für} \quad n = 2 , \\ 1 + xy(p^{-2} + p^{-3}) + xy^2(p^{-4} + p^{-5}) + x^2y^3p^{-7} & \text{für} \quad n = 3 . \end{cases} \tag{36}$$

Die analytische Fortsetzung von $Z(z, s)$ ist also bereits für $n = 3$ problematisch.

Einerseits sind die mit der Eisensteinreihe $G_{\alpha,\beta}$ im Zusammenhang stehenden Überlegungen an die Konvergenzbedingung $\mathcal{R}e\, s > n + 1$ gebunden. Andererseits hat sich herausgestellt, daß die Funktion $Z(z, s)$ zumindest für $n = 1, 2$ eine meromorphe Funktion in beiden Variablen ist. Die Frage nach der analytischen Fortsetzung von $G_{\alpha,\beta}$ als Funktion von $s = \alpha + \beta$ bei gegebenem $\alpha - \beta = 2g$, g ganz rational, liegt damit auf der Hand. Aus Gründen der Symmetrie darf $g \geqq 0$ angenommen werden. Mit

$$\alpha = \frac{s}{2} + g, \quad \beta = \frac{s}{2} - g, \quad g \geqq 0, \quad Y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0$$

wird nun

$$\varphi(s, g) = |Y|^{s/2} G_{\alpha,\beta}(Z, \bar{Z}) \tag{37}$$

gesetzt und mit Hilfe von Differentialoperatoren gezeigt, daß die analytische Fortsetzbarkeit von $\varphi(s, 0)$ die von $\varphi(s, g)$ nach sich zieht. Ebenso resultiert aus einer Funktionalgleichung vom Riemannschen Typus für $\varphi(s, 0)$ sofort eine solche für $\varphi(s, g)$. Im Falle $n=2$ kommt man mit den Ergebnissen von Kaufhold [2] zu einem echten Resultat. Das angedeutete Verfahren basiert auf der Verwendung des Differentialoperators

$$M_\alpha = |Z-\bar{Z}|^{(n+1)/2-\alpha} \left|\frac{\partial}{\partial Z}\right| |Z-\bar{Z}|^{\alpha-(n-1)/2}, \tag{38}$$

der, wie in [6], p. 313, bewiesen wurde, auf $G_{\alpha,\beta}$ die Wirkung

$$M_\alpha G_{\alpha,\beta}(Z, \bar{Z}) = \varepsilon_n(\alpha) G_{\alpha+1,\beta-1}(Z, \bar{Z}) \tag{39}$$

hat, wobei $\varepsilon_n(\alpha) = \alpha(\alpha-\frac{1}{2}) \cdots (\alpha-(n-1)/2)$ gesetzt ist. Sie

$$M = M_{s/2+g-1} M_{s/2+g-2} \cdots M_{s/2}.$$

Wiederholte Anwendung von (39) ergibt

$$MG_{s/2,s/2}(Z, \bar{Z}) = \prod_{h=0}^{g-1} \varepsilon_n\left(\frac{s}{2}+h\right) G_{s/2+g,s/2-g}(Z, \bar{Z}), \tag{40}$$

wegen

$$\begin{aligned} M &= |Y|^{-s/2} M^* |Y|^{s/2}, \\ M^* &= |Z-\bar{Z}|^{(n-1)/2-g} \left\{ |Z-\bar{Z}|^2 \left|\frac{\partial}{\partial Z}\right| \right\}^g |Z-\bar{Z}|^{-(n-1)/2}; \end{aligned} \tag{41}$$

schließlich

$$M^* \varphi(s, 0) = \prod_{h=0}^{g-1} \varepsilon_n\left(\frac{s}{2}+h\right) \cdot \varphi(s, g). \tag{42}$$

Entscheidend hierin ist, daß der Operator M^* von s unabhängig ist. Im Falle $n=2$ hat Kaufhold [2] mit $\rho(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ die Invarianz von

$$\omega(s) = \rho(s)\rho(2s-2)\varphi(s, 0).$$

bezüglich der Substitution $s \to 3-s$ bewiesen und gezeigt, daß

$$s(s-1)(s-2)(s-3)\omega(s)$$

eine ganze Funktion ist. Mithin ist auch

$$\omega_g(s) = \prod_{h=0}^{g-1} \left\{ \left(\frac{s}{2} + h \right) \left(\frac{s-1}{2} + h \right) \right\} \rho(s) \rho(2s-2) \varphi(s, g) \tag{43}$$

bezüglich $s \to 3-s$ invariant und

$$s(s-1)(s-2)(s-3)\omega_g(s) \tag{44}$$

eine ganze Funktion.

Literatur

[1] Andrianov, A. N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2,* Russian Math. Surveys, 29:3, 1974, pp. 45–116; Russ. Original: Uspekhi Mat. Nauk, 29:3, 1974, pp. 43–110.

[2] Kaufhold, G., *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades,* Math. Ann. 137, 1959, pp. 454–476.

[3] Klingen, H., *Zur Transformationstheorie von Thetareihen indefiniter quadratischer Formen,* Math. Ann. 140, 1960, pp. 76–86.

[4] Koecher, M., *Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen,* Math. Nachr. 9, 1953, pp. 51–85.

[5] Maaß, H., *Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen,* Math. Ann. 124, 1951, pp. 87–122.

[6] Maaß, H., *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series,* Lect. Notes in Math. 216, Springer Verlag, 1970.

[7] Siegel, C. L., *Gesammelte Abhandlungen,* Vol. I–III, Springer Verlag, 1966.

[8] Zharkovskaya, N. A., *The Siegel operator and Hecke operators,* Funct. Analysis and its Applic. 8(2), 1974, pp. 113–120; Russ. Original: 8(2), April–Juni 1974, pp. 30–38.

Received March, 1976.