ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

26

Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades

von

HANS MAASS (Heidelberg)

Carl Ludwig Siegel gewidmet

Einleitung. Es bezeichne $M_n(R)$ die Algebra der n-reihigen Matrizen über einem Ring R. Die Matrix V' entstehe aus V durch Transposition. Ist V eine Matrix über $\boldsymbol{C}$, so kann die konjugiert komplexe Matrix $\bar{V}$ gebildet werden. Für $V = (v_{\mu\nu}) \in M_n(R)$ ist die Spur $\sigma(V) = \sum_{\nu=1}^{n} v_{\nu\nu}$ definiert. Zur Abkürzung wird

$$F[G] = G'FG \quad \text{und} \quad F\{G\} = \bar{G}'FG$$

gesetzt. Es sei

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit der } n\text{-reihigen Einheitsmatrix } E = E^{(n)}.$$

Dann stellt

$$\Omega_n = \{M \in M_{2n}(\boldsymbol{R}) \mid I[M] = I\}$$

die reelle symplektische Gruppe und

$$\Gamma_n = \Omega_n \cap M_{2n}(\boldsymbol{Z})$$

die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades dar. Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ die Zerlegung von $M \in \Omega_n$ in n-reihige Teilmatrizen A, B, C, D, so definiert

$$A_n = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n\right\}$$

eine Untergruppe von Γ_n. Mit Δ_n werde die von A_n und I erzeugte Gruppe bezeichnet. Analog sind die Gruppen $\Omega_n^*, \Gamma_n^*, A_n^*, \Delta_n^*$, mit $I^* = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ an Stelle von I zu definieren. Bekanntlich ist $\Delta_n = \Gamma_n$. Hingegen ist Δ_n^* zumindest für gerade n eine echte Untergruppe von Γ_n^*. Die Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ aus Ω_n bzw. Ω_n^* haben auf

$$\mathfrak{H}_n = \{Z \in M_n(\boldsymbol{C}) \mid Z' = Z = X + iY, \bar{Z} = X - iY, Y > 0\}$$

bzw.

$$\mathfrak{H}_n^* = \{W \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid W = S+T,\ W' = -S+T,\ T > 0\}$$

die Wirkung birationaler Transformationen gemäß

$$Z \to M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

bzw.

$$W \to M\langle W\rangle = (AW+B)(CW+D)^{-1}.$$

Gegenstand des ersten Teiles der vorliegenden Untersuchung sind die Eisensteinreihen

$$G_n(Z, s) = |Y|^s \sum_{M:\Delta_n\setminus\Delta_n} \|CZ+D\|^{-2s} \quad (\Re s > (n+1)/2), \tag{1}$$

$$G_n^*(W, s) = |T|^s \sum_{M:\Delta_n^*\setminus\Delta_n^*} \|CW+D\|^{-2s} \quad (\Re s > (n+1)/2) \tag{2}$$

zwischen denen, wie A. Selberg in gemeinsamen Gesprächen im Frühjahr 1970 ausführte, ein methodisch interessanter Zusammenhang besteht, der die analytische Fortsetzung der einen Reihe als Funktion von s auf die der anderen Reihe zurückzuführen gestattet. Viele wichtige Einzelfragen blieben damals unbeantwortet und auch heute gelingt mir eine vollständige Erhellung der Situation nur im Falle $n = 2$. Führt man in $\mathfrak{H}_2^*$ geeignete komplexe Koordinaten ein, so läßt sich $G_2^*(W, s)$ in überraschend einfacher Weise auf eine Eisensteinreihe zur Gruppe Γ_1 umschreiben. Der meromorphe Charakter und die Funktionalgleichung von $G_2^*(W, s)$ werden damit evident und es ergibt sich erneut ein auf G. Kaufhold [1] zurückgehendes Resultat: die analytische Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Eisensteinreihe $G_2(Z, s)$, die hier unter Vermeidung der komplizierten Analyse der singulären Reihen mit angemessenen funktionentheoretischen Methoden bewiesen werden.

Ein Zusammenhang zwischen den Reihen (1) und (2) wird in einer Richtung vermittelt durch die Thetareihe

$$\vartheta(Z, W) = \sum_{C, D \in M_n(\boldsymbol{Z})} e^{-\pi\sigma(Y^{-1}\{ZC'+D'\}W)}. \tag{3}$$

Zur Motivierung des Ansatzes sei folgendes bemerkt: Bildet man $Z^* = X^* + iY^* = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ mit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \in \Gamma_n$, so erhält man $Y^{*-1} = Y^{-1}\{ZC'+D'\}$, wobei hier im Gegensatz zu (3) nur teilerfremde symmetrische Paare C, D auftreten. Um mit Hilfe der Mellintransformation, angewendet auf $\vartheta(Z, W)$, zu der Eisensteinreihe $G_n(Z, s)$ zu gelangen, ist es erforderlich, aus der Thetareihe diejenigen Glieder zu eliminieren, für die entweder

$$\operatorname{Rang}(C, D) < n \quad \text{oder} \quad CD' - DC' \neq 0$$

ist. Das geschieht mit Hilfe eines Differentialoperators R^* im W-Raum und einer Integration über den Einheitswürfel $\mathfrak{W}^*$ im S-Raum, wobei zu beachten ist, daß für die Glieder in (3) die Beziehungen

$$Y^{-1}\{ZC'+D'\} = (P+iI)\begin{bmatrix}C'\\D'\end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad P = \begin{pmatrix}Y & 0\\0 & Y^{-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E & 0\\X & E\end{bmatrix}$$

und

$$\sigma(Y^{-1}\{ZC'+D'\}W) = \sigma\left(P\begin{bmatrix}C'\\D'\end{bmatrix}T\right) + i\sigma\big((CD'-DC')S\big)$$

gelten. Schließlich müssen die Transformationseigenschaften des gesuchten Operators R^* der Invarianz von $|T|^{n/2}\vartheta(Z, W)$ bezüglich Δ_n^* angepaßt werden. Insgesamt ergeben sich für R^* die folgenden Forderungen:

$$|T|^{n/2}R^*|T|^{-n/2} \text{ ist invariant bezüglich } \Omega_n^*,$$

(4) $$R^*\vartheta(Z, W) = \sum_{\mathrm{Rang}\,(C,D)=n} R^* e^{-\pi\sigma(Y^{-1}\{ZC'+D'\}W)},$$

$$\int_{\mathfrak{W}^*} R^*\vartheta(Z, W)[dS] = R_0^*\vartheta_0(Z, T) \quad \text{mit} \quad [dS] = \prod_{\mu<\nu} ds_{\mu\nu},\ S = (s_{\mu\nu})$$

und

(5) $$\vartheta_0(Z, T) = \sum_{\substack{CD'=DC'\\ \mathrm{Rang}\,(C,D)=n}} e^{-\pi\sigma\left(P\left[\begin{smallmatrix}C'\\D'\end{smallmatrix}\right]T\right)}$$

sowie einem Differentialoperator R_0^* im T-Raum, der bezüglich der Transformationen $T \to T[V]$, $V \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ invariant ist.

Es bezeichne $\mathfrak{R}$ den Bereich der im Sinne Minkowskis reduzierten n-reihigen positiven Matrizen, $\mathfrak{F}^*$ einen Fundamentalbereich der Gruppe Δ_n^* und schließlich $d\omega^*$ das bezüglich Ω_n^* invariante Volumenelement $|T|^{-n}[dT][dS]$, wobei $[dT] = \prod_{\mu\leq\nu} dt_{\mu\nu}$, $T = (t_{\mu\nu})$ ist.

Der Ansatz

(6) $$\xi_n(Z, s) = \int_{\mathfrak{R}} |T|^{s-\frac{n+1}{2}} R_0^*\vartheta_0(Z, T)[dT]$$

führt mit einer von R. A. Rankin [4] angegebenen Schlußweise einerseits zu

(7) $$\xi_n(Z, s) = \int_{\mathfrak{F}^*} G_n^*(W, s-\tfrac{1}{2})|T|^{n/2}R^*\vartheta(Z, W)\,d\omega^*.$$

Durch direkte Berechnung (vergl. hierzu [3], § 15) ist andererseits zu zeigen, daß $\xi_n(Z, s)$ bis auf einen elementaren Faktor mit $G_n(Z, s)$ identisch ist.

Im Falle $n = 2$ erweist sich die Parameterdarstellung

$$(8)\qquad T = \frac{v}{y}\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}, \qquad y, v > 0$$

und die Einführung der komplexen Koordinaten $z = x+iy$, $w = u+iv$, die eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\mathfrak{H}_2^* \leftrightarrow \mathfrak{H}_1^2$ vermitteln, als zweckmäßig. Es zeigt sich nun, daß

$$\Gamma_2^* = \Delta_2^* \cup \Delta_2^* M_0$$

mit

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Die durch Δ_2^* definierte Transformationsgruppe wird von den Abbildungen

$$\begin{cases} z \to U\langle z\rangle \\ w \to V\langle w\rangle, \end{cases} \qquad \begin{cases} z \to -\bar{z} \\ w \to -\bar{w} \end{cases} \qquad (U,\ V \in \Gamma_1)$$

erzeugt; M_0 bewirkt die Vertauschung der Variablen: $z \to w$, $w \to z$. Ein brauchbarer Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*$ wird demnach durch

$$\mathfrak{F}^*\colon\ |z| \geqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2},\ y > 0;\ |w| \geqslant 1,\ |u| \leqslant \tfrac{1}{2},\ v > 0$$

beschrieben. Ferner ist

$$d\omega^* = 2y^{-2}v^{-2}\,dx\,dy\,du\,dv\,.$$

Es ergibt sich nun unmittelbar

$$(9)\qquad G_2^*(W, s) = G_1(w, 2s).$$

Die analytischen Eigenschaften von $G_2^*(W, s)$ sind daher aus der bekannten Darstellung (s. etwa [2])

$$(10)\qquad \eta(2s)G_1(w, s) = \eta(2s)v^s + \eta(2-2s)v^{1-s} + \\ + v^{1/2}\sum_{m\neq 0}\left\{\sum_{ab=m}\left|\frac{b}{a}\right|^{s-1/2}\right\} K_{s-1/2}(2\pi|m|v)\,e^{2\pi imu}$$

mit

$$\eta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \qquad \zeta(s) = \text{Riemannsche Zetafunktion}$$

vollständig ersichtlich.

Ist

$$T = T' = (t_{\mu\nu}), \qquad \frac{\partial}{\partial T} = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t_{\mu\nu}}\right)$$

mit $e_{\mu\nu} = 1$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist, so sind

$$R^* = R_0^* + \frac{1}{4}\left(|T|^2 \left|\frac{\partial}{\partial T}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial T}\right| |T|^2 - 2\,|T|\right) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{16}\,|T|^2 \frac{\partial^4}{\partial u^4} \tag{11}$$

und

$$R_0^* = \left|\frac{\partial}{\partial T}\right| |T|^2 \left|\frac{\partial}{\partial T}\right| \tag{12}$$

Differentialoperatoren mit den gewünschten Eigenschaften. Zufolge (9) und (10) erweist sich

$$\varphi(W, s) = (s - \tfrac{1}{2})(s-1)\,\eta(4s-2)\,G_2^*(W, s - \tfrac{1}{2})$$

als eine ganze Funktion mit der Invarianzeigenschaft

$$\varphi(W, \tfrac{3}{2} - s) = \varphi(W, s).$$

Nunmehr kann geschlossen werden, daß

$$(s - \tfrac{1}{2})(s-1)\,\eta(4s-2)\,\xi_2(Z, s) \tag{13}$$

eine ganze, bezüglich $s \to \frac{3}{2} - s$ invariante Funktion ist. Eine direkte Berechnung des Integrals (6) ergibt

$$\xi_2(Z, s) = s(s - \tfrac{1}{2})(s-1)(s - \tfrac{3}{2})\,\eta(2s)\,\eta(2s-1)\,G_2(Z, s). \tag{14}$$

Folglich ist

$$\{s(s - \tfrac{1}{2})^2 (s-1)^2 (s - \tfrac{3}{2})\,\eta(2s-1)\}\,\eta(2s)\,\eta(4s-2)\,G_2(Z, s) \tag{15}$$

eine ganze, bezüglich $s \to \frac{3}{2} - s$ invariante Funktion. Diese Eigenschaft kommt auch dem Produkt in der geschweiften Klammer zu, woraus die Invarianz der meromorphen Funktion

$$\eta(2s)\,\eta(4s-2)\,G_2(Z, s) \qquad \text{bezüglich} \qquad s \to \tfrac{3}{2} - s \tag{16}$$

erhellt. Offenbar ist $G_2(Z, s)$ in der Halbebene $\Re s > 1$ holomorph mit Ausnahme eines Poles erster Ordnung in $s = \frac{3}{2}$; denn $\Re s = \frac{3}{2}$ ist die Konvergenzabszisse von $G_2(Z, s)$, mithin ist $s = \frac{3}{2}$ eine singuläre Stelle. Es liegt in der Natur des Ansatzes, daß die Werte von Residuen nicht ermittelt werden können.

Die Rankinsche Methode [4] in Verbindung mit dem Selbergschen Trick, die Residuenterme zu eliminieren (s. [3]), erlaubt im Spezialfall $n = 2$ eine Anwendung auf die Dirichletsche Reihe

$$D(f, g; s) = \sum_{\{N\} > 0} \frac{a(N)\,\overline{b(N)}}{\varepsilon(T)\,|N|^s}, \tag{17}$$

die einem Paar von Modulformen n-ten Grades f und g vom Gewicht k zugeordnet werden kann, sofern die Modulformen durch ihre Fourierreihen

$$f(Z) = \sum_{N \geqslant 0} a(N)\, e^{2\pi i \sigma(NZ)}, \quad g(Z) = \sum_{N \geqslant 0} b(N)\, e^{2\pi i \sigma(NZ)} \tag{18}$$

gegeben sind. In (17) durchläuft N ein volles Repräsentantensystem aller Klassen $\{N\} = \{N[U] \mid U \text{ unimodular}\}$ halbganzer positiver Matrizen und $\varepsilon(N)$ bezeichnet die Anzahl der Einheiten von N.

Es sei R ein Differentialoperator im Z-Raum mit folgenden Eigenschaften:

$$|Y|^k R\, |Y|^{-k} \text{ ist invariant bezüglich } \Omega_n,$$

$$Rf(Z)\overline{g(Z)} = \sum_{\substack{N_1, N_2 \geqslant 0 \\ N_1 + N_2 > 0}} a(N_1)\overline{b(N_2)}\, R e^{2\pi i \sigma((N_1 - N_2)X) - 2\pi\sigma((N_1+N_2)Y)}, \tag{19}$$

$$\int_{\mathfrak{W}} Rf(Z)\overline{g(Z)}\,[dX] = R_0 \chi(f, g;\, Y)$$

mit

$$\chi(f, g;\, Y) = \sum_{N > 0} a(N)\overline{b(N)}\, R_0 e^{-4\pi\sigma(NY)} \tag{20}$$

und einem Differentialoperator R_0 im Y-Raum, der bezüglich der Transformationen $Y \to Y[V]$, $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ invariant ist. $\mathfrak{W}$ bezeichnet den Einheitswürfel im X-Raum. Das Integral

$$\xi(f, g; s) = \int_{\mathfrak{R}} |Y|^{s - \frac{n+1}{2}} R_0 \chi(f, g;\, Y)\,[dY] \tag{21}$$

wird nun einerseits direkt berechnet, andererseits umgeformt in

$$\xi(f, g; s) = \int_{\mathfrak{F}} G_n\left(Z, s + \frac{n+1}{2} - k\right) |Y|^k Rf(Z)\overline{g(Z)}\, d\omega \tag{22}$$

mit dem invarianten Volumenelement $d\omega = |Y|^{-n-1}[dX][dY]$ und dem Siegelschen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ für Γ_n in $\mathfrak{H}_n$.

Im Falle $n = 2$ erweisen sich

$$R = R_0 + |Y|^2\left(\sigma\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\right)^2 + (2k-1)\,\sigma\left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right)|Y|\,\sigma\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y}\right) + \tag{23}$$
$$+ |Y|^2\left|\frac{\partial}{\partial X}\right|\left(\left|\frac{\partial}{\partial X}\right| - \left|\frac{\partial}{\partial Y}\right|\right) - (2k-1)\left(\sigma\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right) - \frac{3}{2}\right)|Y|\left|\frac{\partial}{\partial X}\right|$$

und

$$R_0 = |Y|^{3-2k}\left|\frac{\partial}{\partial Y}\right| |Y|^{2k-1}\left|\frac{\partial}{\partial Y}\right| \tag{24}$$

als Operatoren mit den gewünschten Eigenschaften. Dabei ist $\tilde{Q}$ für quadratische Matrizen Q generell durch $\tilde{Q}Q = |Q|E$ definiert.

Die nachgewiesenen Eigenschaften von $G_2(Z, s)$ haben nach (22) zur Folge, daß

$$(25)\quad \prod_{\nu=0}^{2}\left\{\left(s+\frac{\nu}{2}-k\right)\left(s+\frac{\nu+1}{2}-k\right)\right\}\times$$
$$\times\,\eta(2s+2-2k)\,\eta(2s+3-2k)\,\eta(4s+4-4k)\,\xi(f, g; s)$$

eine ganze Funktion von s ist, die bezüglich $s\to 2k-\frac{3}{2}-s$ invariant ist. Durch Rechnung wird direkt bestätigt, daß

$$(26)\quad \xi(f, g; s)$$
$$= s(s-\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{3}{2}-2k)(s+2-2k)(4\pi)^{1/2-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2})D(f, g; s)$$

ist. Hieraus folgt die Meromorphie der durch $D(f, g; s)$ definierten Funktion sowie die Invarianz von

$$(27)\quad (4\pi)^{1/2-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\,\eta(2s+3-2k)\,\eta(4s+4-4k)\,D(f, g; s)$$

bezüglich $s\to 2k-\frac{3}{2}-s$. Man erkennt überdies, daß $D(f, g; s)$ in der Halbebene $\Re s > 2k-2$ holomorph ist mit eventueller Ausnahme eines Poles erster Ordnung in $s = 2k-\frac{3}{2}$.

§ 1. Die Eisensteinreihe $G_n(W, s)$. In Analogie zu Γ_n können für Γ_n^* leicht folgende Feststellungen gemacht werden. Die ganze Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ liegt genau dann in Γ_n^*, wenn

$$AD'+BC' = E,\qquad AB'+BA' = 0,\qquad CD'+DC' = 0$$

ist. Allgemein heißt C, D ein schiefsymmetrisches Paar, wenn $CD'+$ $+DC' = 0$ ist; wir nennen es teilerfremd, wenn aus der Ganzheit von GC, GD die von G folgt. Die zweiten Matrizenzeilen der Matrizen $M\in\Gamma_n^*$ sind mit den teilerfremden schiefsymmetrischen Paaren C, D identisch. Für solche Paare und primitive Matrizen $Q = Q^{(n,r)}$ bilden wir Klassen äquivalenter Objekte:

$$\{C, D\} = \{UC, UD \mid U \text{ unimodular}\},$$
$$\{Q\} = \{QU \mid U \text{ unimodular}\}.$$

Lemma. *Unter der Voraussetzung* $0 < \operatorname{Rang} C = r \leqslant n$, $|C_0^{(r)}| \neq 0$ *besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung*

$$\{C^{(n)}, D^{(n)}\}\leftrightarrow\{C_0^{(r)}, D_0^{(r)}\},\ \{Q^{(n,r)}\}$$

gemäß folgender Vorschrift: Die Matrizen (C_0, D_0), Q *mögen ein volles Repräsentantensystem der Klassen* $\{C_0, D_0\}$, $\{Q\}$ *durchlaufen,* Q *werde auf* *genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix* U *ergänzt. Dann durchläuft*

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U', \qquad D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U^{-1}$$

ein volles Repräsentantensystem der Klassen $\{C, D\}$. *Im Falle* $r = 0$ *wird* $\{C, D\}$ *durch* $0, E$ *repräsentiert.*

Die Matrix M_1 entstehe aus $E^{(2n)}$ durch Vertauschung der ersten mit der $(n+1)$-ten Spalte. Ersichtlich ist $M_1 \in \Gamma_n^*$. Ist C, D ein teilerfremdes schiefsymmetrisches Paar mit Rang $C = r > 0$, so können unimodulare Matrizen U, V derart bestimmt werden, daß

$$UCV' = \begin{pmatrix} C_0^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad UDV^{-1} = \begin{pmatrix} D_0^{(r)} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad |C_0| \neq 0$$

mit einer Diagonalmatrix C_0 gilt. Aus der Schiefsymmetrie des Paares C_0, D_0 folgt, daß das erste Diagonalelement von D_0 verschwindet. Mithin ist

$$\begin{pmatrix} C_0 & 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} M_1 = \begin{pmatrix} C_1^{(r)} & 0 & D_1^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

mit Rang $C_1 = r-1$. Auf Grund dieses Sachverhalts sowie der Tatsache, daß $|M_1| = -1$ ist, kann nun leicht geschlossen werden, daß Γ_n^* von Λ_n^* und M_1 erzeugt wird und $|M| = (-1)^r$ für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n^*$, Rang $C = r$ gilt. Eine Untergruppe von Γ_n^* vom Index 2 wird durch $B_n^* = \Gamma_n^* \cap \cap \mathrm{SL}(2n, \mathbb{Z})$ geliefert.

Die Klassen $\{C^{(n)}, D^{(n)}\}$ mit $|C| \neq 0$ stehen vermöge $C^{-1}D = P$ in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den schiefsymmetrischen rationalen Matrizen $P^{(n)}$. Das Produkt der gekürzten Nenner der Elementarteiler von P ist gleich $\|C\|$; wir bezeichnen es mit $\nu(P)$. Für die Eisensteinreihe zur Gruppe B_n^* ergibt sich somit folgende Darstellung

$$|T|^s \sum_{M: \Lambda_n^* \backslash B_n^*} \|CW + D\|^{-2s}$$
$$= |T|^s \Big\{ 1 + \sum_{1 \leqslant r \leqslant [n/2]} \sum_{\{Q^{(n,2r)}\}} \sum_{P^{(2r)}} \big(\nu(P)\big)^{-2s} |W[Q] + P|^{-2s} \Big\}.$$

Die Konvergenz dieser Reihe für $\Re s > (n-1)/2$ kann in der üblichen Weise mit den Hilfsmitteln der Geometrie des Raumes $\mathfrak{H}_n^*$ bewiesen werden.

Gemäß ihrer Wirkung auf $\mathfrak{H}_1^2$ ist festzustellen, daß die von Λ_2^* und M_0 (s. Einleitung) erzeugte Gruppe mit Γ_2^*, dem Erzeugnis von Λ_2^* und

M_1 $(= I^* M_0)$, identisch ist und $\Delta_2^* M_0 = M_0 \Delta_2^*$ gilt. Beachtet man noch $M_0^2 = E$, so ergibt sich schließlich

$$\Gamma_2^* = \Delta_2^* \cup \Delta_2^* M_0, \qquad \Delta_2^* = B_2^*.$$

Die bisherigen Ausführungen liefern nun für $G_2^*(W, s)$ die folgende Darstellung

$$G_2^*(W, s) = |T|^s \Big\{1 + \sum_P \big(\nu(P)\big)^{-2s} |W + P|^{-2s}\Big\},$$

wobei $P = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ ist und r alle rationalen Zahlen durchläuft. Wir setzen $r = d/c$ mit teilerfremden c, d und $c > 0$. Dann wird in den eingangs eingeführten Koordinaten

$$\nu(P) = c^2, \qquad |W + P| = |T + S + P| = |T| + (u + r)^2 = v^2 + (u + r)^2$$

also $\nu(P)\,|W + P| = |cw + d|^2$, mithin

$$G_2^*(W, s) = v^{2s} \Big\{1 + \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c>0}} |cw + d|^{-4s}\Big\} = G_1(w, 2s).$$

Beiläufig sei erwähnt, daß die Eisensteinreihe zur vollen Gruppe Γ_2^* mit

$$G_1(w, 2s) + G_1(z, 2s)$$

identisch ist.

Um für die Thetareihe (4) die Transformationsformel

$$\vartheta(Z, M\langle W\rangle) = \|CW + D\|^n \vartheta(Z, W) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Delta_n^* \tag{28}$$

zu beweisen, die die Invarianz von

$$|T|^{n/2} \vartheta(Z, W) \quad \text{bezüglich } \Delta_n^*$$

zur Folge hat, genügt es im wesentlichen, $M = I^*$ zu betrachten. Man bedient sich zweckmäßig der Darstellung

$$\vartheta(Z, W) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathbf{Z}^{2n^2}} e^{-\pi \mathfrak{S}[\mathfrak{p}]},$$

wobei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' = \tfrac{1}{2}\{(P + iI) \times W' + (P - iI) \times W\}, \qquad |\mathfrak{S}| = |W|^{2n}$$

ist. Mit

$$\mathfrak{S}^{-1} = \tfrac{1}{2}\{(P^{-1} + iI) \times W'^{-1} + (P^{-1} - iI) \times W^{-1}\}$$

gilt dann

$$\sum_{\mathfrak{p}} e^{-\pi \mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{p}]} = \sqrt{|\mathfrak{S}|} \sum_{\mathfrak{p}} e^{-\pi \mathfrak{S}[\mathfrak{p}]}.$$

Die Umschreibung auf $\vartheta(Z, W)$ ergibt sofort (28) für $M = I^*$, wenn man im übrigen beachtet, daß $\vartheta(Z, W)$ bezüglich Γ_n invariant ist.

Die Invarianz von $|T|R^*|T|^{-1}$ bezüglich Ω_2^* mit dem durch (11) und (12) erklärten Operator R^* ist mit Hilfe der Identität

$$|T|\left|\frac{\partial}{\partial T}\right| = \frac{1}{4}\left\{v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2v\frac{\partial}{\partial v}-\Delta_z\right\}, \qquad \Delta_z = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

zu beweisen. Es ergibt sich

$$|T|R^*|T|^{-1} = \tfrac{1}{16}(\Delta_w-\Delta_z)^2-\tfrac{1}{8}(\Delta_w+\Delta_z) \tag{29}$$

mit

$$\Delta_w = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

Im Falle $n = 2$ ist das zu dem Paar C, D gehörige Glied in der Thetareihe (3) unabhängig von u, falls $\operatorname{Rang}(C, D) < 2$ ist, weil dann notwendig $CD'-DC' = 0$ ist. Überdies ist

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}\right| e^{-\pi\sigma\left(P\left[\begin{smallmatrix}C'\\D'\end{smallmatrix}\right]T\right)} = \left|-\pi P\begin{bmatrix}C'\\D'\end{bmatrix}\right| e^{-\pi\sigma\left(P\left[\begin{smallmatrix}C'\\D'\end{smallmatrix}\right]T\right)},$$

so daß in der Reihendarstellung (4) von $R^*\vartheta(Z, W)$ tatsächlich alle Glieder zu Paaren C, D mit $\operatorname{Rang}(C, D) < 2$ herausfallen.

§ 2. Die Eisensteinreihe $G_2(Z, s)$. Die Eisensteinreihe $G_2(Z, s)$ wird durch das Integral (6) eingeführt. Die Ausrechnung erfolgt nach dem in [3], §15 dargelegten Verfahren. Dabei ist es zweckmäßig, den Operator R_0^* auf die Form

$$R_0^* = |T|^{-3/2}\hat{M}|T|^{3/2}M \qquad \text{mit} \qquad M = |T|\left|\frac{\partial}{\partial T}\right|$$

zu bringen. $\hat{M}$ bezeichnet den zu M adjungierten Operator. Der Übergang von den symmetrischen Paaren C, D mit $\operatorname{Rang}(C, D) = 2$ zu den teilerfremden Paaren hat das Auftreten des Produkts $\zeta(2s)\,\zeta(2s-1)$ in (14) zur Folge.

Um die analytischen Eigenschaften von $\xi_2(Z, s)$ auf Grund der Integraldarstellung (7) festzustellen, ist eine genauere Abschätzung des Integranden erforderlich, die im Hinblick auf die spätere Anwendung gleich in Abhängigkeit von $Z \in \mathfrak{F}$ ausgeführt wird. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$P\begin{bmatrix}C'\\D'\end{bmatrix} = FF', \quad F = F^{(2)}, \quad T_1 = T[F], \quad CD'-DC' = \begin{pmatrix}0 & q\\-q & 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma\big((CD'-DC')S\big) = -2qu, \quad q = |CD'-DC'|^{1/2}$$

nimmt das allgemeine Glied der Reihe $R^*\vartheta(Z, W)$ die Form

$$(30)\qquad \left\{\left|\frac{\partial}{\partial T_1}\right| |T_1|^2 \left|\frac{\partial}{\partial T_1}\right| - \pi^2\left(|T_1|^2\left|\frac{\partial}{\partial T_1}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial T_1}\right| |T_1|^2 - 2\,|T_1|\right)\frac{q^2}{|F|^2} + \right.$$

$$\left. + \pi^4\,|T_1|^2\frac{q^4}{|F|^4}\right\} e^{-\pi\sigma(T_1)+2\pi i q u}$$

an. Für $Z \in \mathfrak{F}$ ist $P > c_1\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1}\end{pmatrix}$, wobei c_1 und im Folgenden $c_2, c_3, \ldots$ positive Konstanten bezeichnen; denn diese Ungleichung ist gleichwertig mit

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ X[\sqrt{Y}^{-1}] & E\end{bmatrix} > c_1\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}$$

und $X[\sqrt{Y}^{-1}]$ ist auf $\mathfrak{F}$ beschränkt. Damit wird

$$P\begin{bmatrix} C' \\ D'\end{bmatrix} > c_1(Y[C'] + Y^{-1}[D']),$$

und mit $C_1 = C\sqrt{Y},\ D_1 = D\sqrt{Y}^{-1}$ ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{q^2}{|F|^2} < \frac{q^2}{c_1^2\,|Y[C'] + Y^{-1}[D']|} = \frac{1}{c_1^2}\,\frac{|C_1D_1' - D_1C_1'|}{|C_1C_1' + D_1D_1'|} < \frac{2}{c_1^2}.$$

Der absolute Betrag von (30) kann also durch

$$c_2 e^{-\frac{\pi}{2}\sigma\left(P\left[\begin{smallmatrix} C' \\ D'\end{smallmatrix}\right]T\right)}$$

abgeschätzt werden. Da $P > \dfrac{c_3}{\sigma(Y)}E$ für $Z \in \mathfrak{F}$, so erhält man schließlich mit der in [3], S. 234–235 ausgeführten Schlußweise

$$(31)\qquad |R^*\vartheta(Z, W)| < c_4 e^{-c_5\frac{\sigma(T)}{\sigma(Y)}}\,|T|^{-2}\left(\sigma(Y)\right)^4$$

$$< c_4 e^{-c_5\frac{vy}{\sigma(Y)}}\,v^{-4}\left(\sigma(Y)\right)^4 \quad \text{für } Z \in \mathfrak{F},\ W \in \mathfrak{F}^*;$$

denn $T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ist reduziert, wenn W in $\mathfrak{F}^*$ liegt.

In jedem Streifen $\alpha \leqslant \Re e\, s \leqslant \beta$ ist $s(1-s)\eta(s)$ bekanntlich beschränkt. Auf Grund der Fourierentwicklung (10) erkennt man, daß $\eta(2s)G_1(w, s)$ in $s = \frac{1}{2}$ holomorph ist. Die Beziehung (9) ergibt daher die Abschätzung

$$|(s-\tfrac{1}{2})(s-1)\,\eta(4s-2)\,G_2^*(W, s-\tfrac{1}{2})| < cv^{\varkappa} \quad \text{für} \quad W \in \mathfrak{F}^*,\ \alpha \leqslant \Re e\, s \leqslant \beta$$

mit positiven Konstanten c, $\varkappa$, die nur von α, β abhängen. Das mit $(s-\frac{1}{2})\times\times(s-1)\eta(4s-2)$ multiplizierte Integral (7) wird also majorisiert durch

$$2cc_4\big(\sigma(Y)\big)^4 \int_{\mathfrak{F}^*} e^{-c_5\frac{vy}{\sigma(Y)}} v^{\varkappa-4} y^{-2}\,dx\,dy\,du\,dv$$

$$< 2cc_4\big(\sigma(Y)\big)^4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{\infty}\int e^{-c_5\frac{vy}{\sigma(Y)}} v^{\varkappa-4} y^{-2}\,dy\,dv$$

$$< cc_6\big(\sigma(Y)\big)^4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{\infty} e^{-c_7\frac{v}{\sigma(Y)}} v^{\varkappa-4}\,dv$$

$$< cc_6 c_7^{3-\varkappa}\Gamma(\varkappa-3)\big(\sigma(Y)\big)^{\varkappa+1} \quad \text{für } Z\in\mathfrak{F},$$

sofern $\varkappa > 3$ gewählt wird. Damit ist gezeigt, daß die Funktion

$$\psi(Z,s) = (s-\tfrac{1}{2})(s-1)\eta(4s-2)\,\xi_2(Z,s)$$

ganz ist und einer Abschätzung

$$(32) \qquad |\psi(Z,s)| < C\big(\sigma(Y)\big)^{\lambda} \quad \text{für } Z\in\mathfrak{F},\ \alpha\leqq\Re s\leqq\beta$$

mit positiven Konstanten C, λ genügt, die nur von α, β abhängen.

§ 3. Die Dirichletsche Reihe $D(f,g;s)$. Den Angaben in [3], §§ 8 und 19 ist zu entnehmen, daß der mit

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X} - i\,\frac{\partial}{\partial Y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar Z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X} + i\,\frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

gebildete Operator

$$\Phi_1 = \sigma\left\{(Z-\bar Z)\left((Z-\bar Z)\frac{\partial}{\partial \bar Z}\right)'\frac{\partial}{\partial \bar Z}\right\}$$

bezüglich Ω_n invariant ist. Da eine Transformation

$$Z\to(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad \bar Z\to(A\bar Z+B)(C\bar Z+D)^{-1} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Omega_n$$

die Operatoren

$$M_\alpha = |Z-\bar Z|^{\frac{n+1}{2}-\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial Z}\right| |Z-\bar Z|^{\alpha-\frac{n-1}{2}}$$

bezw.

$$N_\beta = |Z-\bar Z|^{\frac{n+1}{2}-\beta}\left|\frac{\partial}{\partial \bar Z}\right| |Z-\bar Z|^{\beta-\frac{n-1}{2}}$$

in

$$|CZ+D|^{\alpha+1}|C\bar Z+D|^{\beta-1}M_\alpha|CZ+D|^{-\alpha}|C\bar Z+D|^{-\beta}$$

bezw.

$$|CZ+D|^{\alpha-1}|C\bar Z+D|^{\beta+1}N_\beta|CZ+D|^{-\alpha}|C\bar Z+D|^{-\beta}$$

überführt, erweist sich auch

$$\Phi_2 = N_{-1}M_0 = |Z-\bar{Z}|^{\frac{n+3}{2}} \left|\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}\right| \left|\frac{\partial}{\partial Z}\right| |Z-\bar{Z}|^{-\frac{n-1}{2}}$$

als ein bezüglich Ω_n invarianter Operator. Die Operatoren Θ_ν $(\nu = 1, 2)$ seien durch

$$|Y|^k \Theta_\nu |Y|^{-k} = \Phi_\nu \qquad (\nu = 1, 2)$$

erklärt. Eine Umrechnung auf $\dfrac{\partial}{\partial X}$ und $\dfrac{\partial}{\partial Y}$ ergibt dann für den durch

(33) $$R = \Theta_2 + (k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})\big(\Theta_1 + k(k-2)\big)$$

definierten Operator im Falle $n = 2$ die Darstellung (23), wobei R_0 wegen der auszuführenden Integration (21) zweckmäßig auf die Gestalt

$$R_0 = |Y|^{\frac{3}{2}-2k} \hat{M} |Y|^{2k-\frac{3}{2}} M \qquad \text{mit} \qquad M = |Y| \left|\frac{\partial}{\partial Y}\right|$$

gebracht wird; $\hat{M}$ bezeichnet den zu M adjungierten Operator.

Für die Abschätzung der Reihe (19) benötigt man die bekannte Abschätzung

$$|a(N)| < C\big(D(N)\big)^k$$

für die Fourierkoeffizienten $a(N)$ einer Modulform vom Gewicht k. Hierin ist

$$D(N) = |N_0|, \qquad \text{wenn } N = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U], \ U \text{ unimodular}, \ |N_0| > 0.$$

Die zu den Paaren $N_1, N_2 \geqslant 0$ mit $N_1 + N_2 \not> 0$ gehörigen Glieder in (19) werden von R annulliert. Das ist sofort einzusehen, wenn man sich klar macht, daß unter den gegebenen Voraussetzungen

$$N_\nu = \lambda_\nu N \qquad \text{mit geeigneten } \lambda_\nu \in \boldsymbol{R} \ (\nu = 1, 2) \text{ und } N \geqslant 0$$

gilt, wobei natürlich $|N| = 0$ sein muß, sofern nicht $N_1 = N_2 = 0$ ist.

Mit Hilfe von (14) und (22) erhalten wir für die Funktion (25) die Darstellung

(34) $$\int_{\mathfrak{F}} (s+\tfrac{1}{2}-k)(s+1-k)\eta(4s+4-4k)\,\xi_2(Z, s+\tfrac{3}{2}-k)\,|Y|^k R f(Z)\overline{g(Z)}\,d\omega.$$

Schätzt man $Rf(Z)\overline{g(Z)}$ in ähnlicher Weise wie $R^*\vartheta(Z, W)$ ab und beachtet (32), so kann für den Betrag des Integranden von (34) in jedem Streifen $\alpha \leqslant \Re s \leqslant \beta$ eine Schranke der Art $Ce^{-c\sigma(Y)}$ gefunden werden mit positiven Konstanten C und c, die nur von α, β, f, g abhängen. Mithin stellt (34), also auch (25) eine ganze Funktion dar. Die Invarianz von (34) bezüglich $s \to 2k - \frac{3}{2} - s$ folgt sofort aus der von (13) bezüglich $s \to \frac{3}{2} - s$.

Literaturverzeichnis

[1] G. Kauthold, *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades,* Math. Ann. 137 (1959), S. 454–476.

[2] H. Maaß, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen,* Math. Ann. 121 (149), S. 141–183.

[3] — *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series,* Lecture Notes in Mathematics 216, 1971.

[4] R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II,* Proc. Cambridge Phil. Soc. 35(3)(1939), S. 357–372.

Eingegangen 18. 7. 1972 (307)