MODULFORMEN
ZU INDEFINITEN QUADRATISCHEN FORMEN

HANS MAASS

Wie schon C. L. Siegel bemerkt hat [6], [7], können den indefiniten quadratischen Formen

$$\sum_{k,l=1}^{m} s_{kl} x_k x_l \quad \text{mit rationalen} \quad s_{kl} = s_{lk} ,$$

die sich durch eine reelle Substitution in

$$x_1{}^2 + \ldots + x_\mu{}^2 - x_{\mu+1}^2 - \ldots - x_{\mu+\nu}^2 \qquad \text{mit} \quad \mu + \nu = m$$

überführen lassen, (analytische) Modulformen n-ten Grades zugeordnet werden, wenn $2|\nu$ vorausgesetzt und von gewissen Ausnahmefällen abgesehen wird. Für $n=1$ wurde dieser Sachverhalt mit Hilfe gewisser Differentialoperationen von C. L. Siegel selbst bewiesen [8]. Eine Systematisierung [4] dieses Verfahrens erlaubt eine Verallgemeinerung [5] und damit auch die Behandlung des allgemeinen Falles $n > 1$, wie im folgenden ausgeführt wird. Angeregt wurde diese Untersuchung durch das Studium der grundlegenden Arbeiten [6], [7], [8]. So sei erlaubt, den vorliegenden Aufsatz Carl L. Siegel zum Eintritt in das 70. Lebensjahr in Verehrung zu widmen.

1. Die Thetareihen.

Es sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(m)} = (s_{kl})$ eine halbganze rationale Matrix der Signatur (μ, ν), $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ ein vollständiges Vertretersystem der verschiedenen Restklassen $\pm \mathfrak{A}^{(m,n)} \bmod 1$ mit ganzem $2\mathfrak{S}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}$ eine Majorante von $\mathfrak{S}$, d.h. eine positive Lösung von $\mathfrak{P}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$, und schließlich $Z = Z^{(n)} = X + iY$ eine symmetrische komplexe Matrix mit positivem Imaginärteil Y, so daß $\bar{Z} = X - iY$ wird. Man bildet dann

$$(1) \qquad f_{\mathfrak{A}}(Z, \bar{Z}) = \sum_{\mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{A} \,(\mathrm{mod}\, 1)} \exp\bigl(2\pi i \,\sigma\{\mathfrak{S}[\mathfrak{Y}]X + i\mathfrak{P}[\mathfrak{Y}]Y\}\bigr) ,$$

wobei über alle Matrizen $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^{(m,n)}$ in der Restklasse $\mathfrak{A} \bmod 1$ summiert wird und σ das Zeichen für die Spurbildung bezeichnet.

Eingegangen am 16. April 1965.

Für symplektische Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

vom Grad n wird

$$S\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \tag{2}$$

und allgemein

$$f(Z,\bar{Z}) \mid S_{\alpha,\beta} = |CZ+D|^{-\alpha}\,|C\bar{Z}+D|^{-\beta} f(S\langle z\rangle, S\langle\bar{Z}\rangle) \tag{3}$$

gesetzt. Ferner sei $\mathfrak{f}(Z,\bar{Z})$ der von den s Funktionen $f_{\mathfrak{A}_\nu}(Z,\bar{Z})$, $\nu = 1,2,\ldots,s$, gebildete Spaltenvektor. Er zeigt, wie H. Klingen [2] bewiesen hat, gegenüber der Modulgruppe n-ten Grades Γ das folgende Verhalten:

$$\mathfrak{f}(Z,\bar{Z}) \mid S_{\alpha,\beta} = \Lambda(S)\,\mathfrak{f}(Z,\bar{Z}) \qquad \text{für } S \in \Gamma\,. \tag{4}$$

Hierin ist $2\alpha = \mu$, $2\beta = \nu$, und $S \to \Lambda(S)$ definiert eine unitäre Darstellung s-ten Grades von Γ. Die Elemente der Matrizen $\Lambda(S)$ lassen sich mit Hilfe Gaußscher Summen explizit berechnen.

Zu den Darstellungsmaßen von $\mathfrak{S}$ gelangt man, wenn man den Integralmittelwert $\mathfrak{g}(Z,\bar{Z})$ von $\mathfrak{f}(Z,\bar{Z})$ über dem Raum der Majoranten $\mathfrak{P}$ berechnet. M. Koecher [3] gibt hierfür eine Entwicklung vom Typus

$$\mathfrak{g}(Z,\bar{Z}) = \mathfrak{e} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{T} \mathfrak{g}_r(Z,\bar{Z},T) \tag{5}$$

mit

$$\mathfrak{g}_r(Z,\bar{Z},T) = \sum_{\substack{T_r[Q]=T \\ Q/\Gamma(T_r)}} \mathfrak{m}(\tilde{T},Q)\, H_{\alpha,\beta}(Z[Q'],\bar{Z}[Q'],T_r) \tag{6}$$

unter der Voraussetzung

$$n \leqq \min(\alpha+\beta-\tfrac{3}{2}, 2\alpha, 2\beta), \qquad \alpha\beta > 0 \text{ mit } 2\alpha = \mu,\ 2\beta = \nu \tag{7}$$

an. Hierin ist $\mathfrak{e}' = (1,0,\ldots,0)$, sofern $\mathfrak{A}_1 = 0$ gewählt wird, $\mathfrak{m}(\tilde{T},Q)$ eine Spalte, die sich aus Darstellungsmaßen zusammensetzt, und allgemein

$$H_{\alpha,\beta}(Z,\bar{Z},T) = \int\limits_{\substack{H+T>0,\\ H-T>0}} \exp(\pi i \sigma\{Z(H+T) - \bar{Z}(H-T)\}) \cdot \\ \cdot |H+T|^{\alpha-\frac{1}{2}(n+1)}\,|H-T|^{\beta-\frac{1}{2}(n+1)}\,\{dH\} \tag{8}$$

die von M. Koecher untersuchte verallgemeinerte konfluente hypergeometrische Funktion. Hinsichtlich der Summation in (5) und (6) ist folgendes zu bemerken: T durchläuft in (5) alle n-reihigen rationalen und symmetrischen Matrizen vom Rang $t \leqq r$. Wird $\tilde{T} = \tilde{T}^{(t)}$ fest gewählt, so daß

$$T = T^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U]$$

mit einer unimodularen Matrix U gilt, so wird

$$T_r = T_r^{(r)} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt. Sodann durchläuft $Q = Q^{(r,n)}$ in (6) ein volles System bezüglich der Einheitengruppe $\Gamma(T_r)$ von T_r linksseitig nicht assoziierter primitiver Matrizen.

Offenbar überträgt sich (4) unter der Voraussetzung (7) sofort auf den Integralmittelwert von $\mathfrak{f}(Z, \bar{Z})$:

$$\mathfrak{g}(Z,\bar{Z}) \mid S_{\alpha,\beta} = \Lambda(S)\, \mathfrak{g}(Z,\bar{Z}) \qquad \text{für } S \in \Gamma\,. \tag{9}$$

Um nun unter der Voraussetzung

$$\beta \equiv 0 \pmod 1) \tag{10}$$

aus $\mathfrak{g}(Z,\bar{Z})$ die Variable $\bar{Z}$ zu eliminieren und zugleich (9) in eine Transformationsgleichung für (analytische) Modulformen überzuführen, wurde in [5] der Differentialoperator

$$\mathsf{M}_\alpha = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)}\, s_h\left(Z-\bar{Z}, \frac{\partial}{\partial Z}\right) \tag{11}$$

mit

$$\varepsilon_n(\alpha) = \alpha(\alpha - \tfrac{1}{2}) \ldots \left(\alpha - \tfrac{1}{2}(n-1)\right) \qquad \text{für } n > 0,\ \varepsilon_0(\alpha) = 1 \tag{12}$$

und

$$s_h\left(Z-\bar{Z}, \frac{\partial}{\partial Z}\right) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_h \\ k_1 < \ldots < k_h}} \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{pmatrix}_{Z-\bar{Z}} \begin{bmatrix} k_1 \ldots k_h \\ i_1 \ldots i_h \end{bmatrix}_Z \tag{13}$$

für $h > 0$ sowie $s_0(Z-\bar{Z}, \partial/\partial Z) = 1$ eingeführt. Allgemein ist hierbei

$$\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{pmatrix}_A = |a_{i_\mu k_\nu}|, \qquad \mu,\nu = 1,2,\ldots,h\,, \tag{14}$$

für beliebige Matrizen $A = A^{(m,n)} = (a_{\mu\nu})$ und $1 \leqq i_1, \ldots, i_h \leqq m$ sowie $1 \leqq k_1, \ldots, k_h \leqq n$, entsprechend auch

$$\begin{bmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{bmatrix}_Z = \left| e_{i_\mu k_\nu} \frac{\partial}{\partial z_{i_\mu k_\nu}} \right|, \qquad \mu,\nu = 1,2,\ldots,h\,, \tag{15}$$

für symmetrische Matrizen $Z = Z^{(n)} = (z_{\mu\nu})$ und $1 \leqq i_1, \ldots, i_h,\ k_1, \ldots, k_h \leqq n$, wenn noch $e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu})$ mit dem Kroneckersymbol $\delta_{\mu\nu}$ gesetzt wird. In [5] wurde für $n = 2$ bewiesen und allgemein vermutet, daß M_α der Transformationsformel

$$|CZ+D|^{-1-\alpha}\, |C\bar{Z}+D|\, \hat{\mathsf{M}}_\alpha\, |CZ+D|^\alpha = \mathsf{M}_\alpha \tag{16}$$

genügt, wobei C, D die zweite Matrizenzeile einer symplektischen Matrix S bezeichnet und M_α durch die Substitution $Z \to S\langle Z\rangle$, $\bar{Z} \to S\langle \bar{Z}\rangle$ in $\hat{\mathsf{M}}_\alpha$ übergeführt wird. Tatsächlich gilt (16) allgemein, wie wir in 2. zeigen werden. Gleichwertig mit (16) ist

$$\mathsf{M}_\alpha(f \mid S_{\alpha,\beta}) = (\mathsf{M}_\alpha f) \mid S_{\alpha+1,\beta-1} \tag{17}$$

für beliebige Funktionen $f = f(Z, \bar{Z})$. Unter der Voraussetzung (10) ist daher das Operatorenprodukt

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_{\alpha+\beta-1}\mathsf{M}_{\alpha+\beta-2}\ldots\mathsf{M}_{\alpha+1}\mathsf{M}_\alpha \tag{18}$$

eine vernünftige Bildung. Wiederholte Anwendung von (17) auf (9) ergibt dann für

$$\mathfrak{h}(Z, \bar{Z}) = \mathsf{M}\mathfrak{g}(Z, \bar{Z}) \tag{19}$$

eine Transformationsformel der gewünschten Art:

$$\mathfrak{h}(Z, \bar{Z}) \mid S_{\alpha+\beta,0} = \Lambda(S)\,\mathfrak{h}(Z, \bar{Z}) \qquad \text{für } S \in \Gamma, \tag{20}$$

so daß nur noch die Unabhängigkeit des Formenvektors $\mathfrak{h}(Z, \bar{Z})$ von $\bar{Z}$ gezeigt zu werden braucht. D. h. es ist die Wirkung von M auf die Funktionen $H_{\alpha,\beta}$ in (6) zu bestimmen.

Im folgenden werden die Voraussetzungen (7) beibehalten. Die auszuführenden Umformungen sind dann sämtlich zu rechtfertigen. Bekanntlich ist für $\varrho > \frac{1}{2}(n-1)$ und $W = W' > 0$

$$\int\limits_{P>0} \exp\bigl(-\sigma(WP)\bigr)\,|P|^{\varrho-\frac{1}{2}(n+1)}\,\{dP\} = |W|^{-\varrho}\,\Gamma_n(\varrho), \qquad P = P^{(n)}, \tag{21}$$

mit

$$\Gamma_n(\varrho) = \prod_{k=0}^{n-1} \pi^{\frac{1}{2}k}\,\Gamma(\varrho - \tfrac{1}{2}k)\,. \tag{22}$$

Die Funktion (8) läßt sich mit Hilfe des verallgemeinerten Eulerschen Integrals (21) sowie des Fourierschen Umkehrtheorems auf

$$I_{\alpha,\beta}(Z, \bar{Z}, T) = \int |Z+V|^{-\alpha}\,|\bar{Z}+V|^{-\beta} \exp\bigl(-2\pi i\sigma(VT)\bigr)\,\{dV\} \tag{23}$$

zurückführen. Die Integration ist hier über den vollen Raum der symmetrischen n-reihigen Matrizen V auszuführen. Man erhält

$$H_{\alpha,\beta}(Z, \bar{Z}, T) = 2^{-n}\,\pi^{-(\alpha+\beta)n} \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\pi i(\alpha-\beta)n\bigr)\,\Gamma_n(\alpha)\,\Gamma_n(\beta)\,I_{\alpha,\beta}(Z, \bar{Z}, T)\,. \tag{24}$$

Für $\alpha = \beta$ wurde diese Identität von G. Kaufhold [1] bewiesen. Der allgemeine Fall erledigt sich in gleicher Weise. Neue Schwierigkeiten treten dabei nicht auf.

Wir berechnen (23) für $\alpha+\beta, 0$ an Stelle von α, β, indem wir die Fourier-Transformierte

$$\Phi(V) = \int \varphi(T) \exp\bigl(2\pi i \sigma(TV)\bigr) \{dT\}, \qquad V' = V,$$

der Funktion

$$\varphi(T) = \begin{cases} |T|^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}(n+1)} \exp\bigl(2\pi i\sigma(TZ)\bigr) & \text{für } T > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmen. Es ergibt sich unmittelbar

$$\Phi(V) = (2\pi)^{-(\alpha+\beta)n} \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\pi i(\alpha+\beta)n\bigr) \, |Z+V|^{-\alpha-\beta} \, \Gamma_n(\alpha+\beta),$$

auf Grund des Fourierschen Umkehrtheorems also

$$(25) \quad I_{\alpha+\beta,0}(Z, \bar{Z}, T) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha+\beta)} \, 2^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \, (2\pi)^{(\alpha+\beta)n} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\pi i(\alpha+\beta)n\bigr) \cdot \begin{cases} |T|^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}(n+1)} \exp\bigl(2\pi i\sigma(TZ)\bigr) & \text{für } T > 0, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Formeln (24) und (25) sind der Entwicklung (6) entsprechend zu verallgemeinern. Ist $Q = Q^{(r,n)}$ eine Matrix vom Rang r und T_r eine r-reihige symmetrische Matrix, so gilt ersichtlich

$$(26) \quad H_{\alpha,\beta}(Z[Q'], \bar{Z}[Q'], T_r) = 2^{-r} \, \pi^{-(\alpha+\beta)r} \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\pi i(\alpha-\beta)r\bigr) \, \Gamma_r(\alpha) \, \Gamma_r(\beta) \, I_{\alpha,\beta}\bigl(Z[Q'], \bar{Z}[Q'], T_r\bigr)$$

$$(27) \quad I_{\alpha+\beta,0}(Z[Q'], \bar{Z}[Q'], T_r) = \frac{1}{\Gamma_r(\alpha+\beta)} 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} (2\pi)^{(\alpha+\beta)r} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\pi i(\alpha+\beta)r\bigr) \cdot \begin{cases} |T_r|^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}(r+1)} \exp\bigl(2\pi i\sigma(T_r[Q]z)\bigr) & \text{für } T_r > 0, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Wirkung von M auf (26) ist sofort festzustellen, wenn man (siehe [5])

$$(28) \quad \mathsf{M}_\alpha |Z[Q'] + V|^{-\alpha} \, |\bar{Z}[Q'] + V|^{-\beta} = \varepsilon_n(\alpha) \, |Z[Q'] + V|^{-\alpha-1} \, |Z[Q'] + V|^{-\beta+1}$$

mit

$$(29) \quad \varepsilon_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - \tfrac{1}{2}k) = \frac{\Gamma_n(\alpha+1)}{\Gamma_n(\alpha)}$$

beachtet, woraus

$$(30) \quad \mathsf{M}_\alpha I_{\alpha,\beta}\bigl(Z[Q'], \bar{Z}[Q'], T_r\bigr) = \frac{\Gamma_n(\alpha+1)}{\Gamma_n(\alpha)} I_{\alpha+1,\beta-1}\bigl(Z[Q'], \bar{Z}[Q'], T_r\bigr)$$

erhellt. Wiederholte Anwendung von (30) ergibt mit (27) die gewünschte Formel

(31)

$$\mathsf{M}H_{\alpha,\beta}(Z[Q'],\bar{Z}[Q'],T_r) = \begin{cases} (-1)^{r\beta}\dfrac{\Gamma_n(\alpha+\beta)}{\Gamma_n(\alpha)}\, C^{(r)}_{\alpha,\beta}\,|T_r|^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}(r+1)}\exp\big(2\pi i\sigma(T_r[Q]Z)\big) & \text{für } T_r>0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$C^{(r)}_{\alpha,\beta} = 2^{r(\alpha+\beta-\frac{1}{2}(r+1))}\frac{\Gamma_r(\alpha)\Gamma_r(\beta)}{\Gamma_r(\alpha+\beta)} \tag{32}$$

gesetzt ist. Dem Fall $r=0$ entspricht

$$\mathsf{M}1 = \frac{\Gamma_n(\alpha+\beta)}{\Gamma_n(\alpha)}. \tag{33}$$

Der Operator M führt die Reihe (6) wegen (31) in Null über, wenn nicht $T_r>0$ ist. Wir dürfen uns daher auf die $T\geqq 0$ mit Rang $T=r$ beschränken, so daß auch $\tilde{T}=T_r$ gilt. Auf die Forderung, daß die Q in (6) bezüglich $\Gamma(T_r)$ linksseitig nicht assoziiert sind, kann verzichtet werden, wenn man $\mathfrak{m}(T_r,Q)$ durch die (jetzt endliche) Ordnung $E(T_r)$ der Einheitengruppe $\Gamma(T_r)$ dividiert. Es bezeichne $\{T_r\}$ einen speziellen Repräsentanten in der Klasse $\{T_r[U]\mid U=U^{(r)}\text{ unimodular}\}$ und Q_r eine beliebige primitive Matrix von r Zeilen und n Spalten. Offenbar wird dann zufolge (5), (6), (19), (31) und (33)

$$\mathfrak{h}(Z,\bar{Z}) = \frac{\Gamma_n(\alpha+\beta)}{\Gamma_n(\alpha)}\Big\{\mathfrak{e}+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r\beta}C^{(r)}_{\alpha,\beta}\sum_{\{T_r\}>0}\frac{1}{E(T_r)}\,|T_r|^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}(r+1)}\cdot \\ \cdot\sum_{Q_r}\mathfrak{m}(T_r,Q_r)\exp\big(2\pi i\sigma(T_r[Q_r]Z)\big)\Big\}. \tag{34}$$

Diese Reihe hängt also von $\bar{Z}$ nicht mehr ab.

2. Die Transformationsformel für M_α.

Man stellt leicht fest, daß die Transformationsformel (16) für das Produkt S_1S_2 zweier symplektischer Matrizen gilt, wenn sie für die Faktoren S_1 und S_2 richtig ist. Es genügt demnach, (16) für die Erzeugenden

$$\begin{pmatrix} E & P \\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0\end{pmatrix}$$

der symplektischen Gruppe zu beweisen. Hierbei ist $P=P^{(n)}$ eine beliebige reelle symmetrische Matrix und $U=U^{(n)}$ eine reelle Matrix mit einer von Null verschiedenen Determinante. Aus technischen Gründen und auch zur Betonung der Unabhängigkeit der Matrizen Z und $\bar{Z}$ verwenden wir hier W an Stelle von $\bar{Z}$.

Die Behauptung ist für den Transformationstypus $\hat{Z}=Z+P$, $\hat{W}=W+P$ evident, so daß wir uns gleich dem zweiten Typus

$$\hat{Z} = U'ZU, \qquad \hat{W} = U'WU$$

zuwenden können. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial \hat{Z}} = U^{-1}\frac{\partial}{\partial Z}U'^{-1}$$

und

$$\hat{Z}-\hat{W} = U'(Z-W)U$$

folgt auf Grund eines Laplaceschen Determinantensatzes für $h>0$

$$\begin{aligned} s_h\left(\hat{Z}-\hat{W},\frac{\partial}{\partial\hat{Z}}\right) &= \sum_{i_1<\ldots<i_h}\sum_{j_1<\ldots<j_h}\sum_{k_1<\ldots<k_h}\sum_{l_1<\ldots<l_h} \\ &\qquad \begin{pmatrix} i_1\ldots i_h \\ j_1\ldots j_h\end{pmatrix}_{U'(Z-W)U}\begin{pmatrix} j_1\ldots j_h \\ k_1\ldots k_h\end{pmatrix}_{U^{-1}}\begin{bmatrix} k_1\ldots k_h \\ l_1\ldots l_h\end{bmatrix}_{Z}\begin{pmatrix} l_1\ldots l_h \\ i_1\ldots i_h\end{pmatrix}_{U'^{-1}} \\ &= \sum_{k_1<\ldots<k_h}\sum_{l_1<\ldots<l_h}\begin{pmatrix} l_1\ldots l_h \\ k_1\ldots k_h\end{pmatrix}_{Z-W}\begin{bmatrix} k_1\ldots k_h \\ l_1\ldots l_h\end{bmatrix}_{Z} \\ &= s_h\left(Z-W,\frac{\partial}{\partial Z}\right), \end{aligned}$$

also $\hat{\mathsf{M}}_\alpha=\mathsf{M}_\alpha$, q.e.d.

Einen erheblich größeren Aufwand an Determinantenrechnungen erfordert der Nachweis von (16) im Fall

$$\hat{Z} = -Z^{-1}, \qquad \hat{W} = -W^{-1}, \tag{35}$$

dem der Rest dieses Aufsatzes gewidmet ist. Wir beweisen die Transformationsformel, indem wir $s_h(Z-W,\partial/\partial Z)$ durch die Elemente von $Z(\partial/\partial Z)$ ausdrücken, so daß von der einfachen Vertauschungsregel

$$Z\frac{\partial}{\partial Z}|Z|^\alpha = |Z|^\alpha\left\{Z\frac{\partial}{\partial Z}+\alpha E\right\}. \tag{36}$$

Gebrauch gemacht werden kann. D. h. wir benötigen gewisse Verallgemeinerungen der Capellischen Identität (siehe etwa [9, S. 39–42]) für symmetrische Matrizen.

Wir setzen $Z(\partial/\partial Z)=(D_\mu^\nu)$ (μ = Zeilenindex, ν = Spaltenindex), so daß

$$D_\mu^\nu = \mathfrak{z}_\mu{}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}_\nu}, \tag{37}$$

wenn $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ bzw. $\partial/\partial\mathfrak{z}_1, \ldots, \partial/\partial\mathfrak{z}_n$ die Spalten von Z bzw. $\partial/\partial Z$ bezeichnen. Gleichwertig mit (36) ist

$$D_\mu^\nu |Z|^\alpha = |Z|^\alpha \{D_\mu^\nu + \alpha\delta_{\mu\nu}\}. \tag{38}$$

Werden die Spalten $\mathfrak{z}_{\mu_i}$, $i=1,2,\ldots,h$, bei der Bildung des Operatorenprodukts $D_{\mu_1}^{\nu_1} D_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots D_{\mu_h}^{\nu_h}$ als konstant angesehen, so erhält man einen neuen Operator, den wir mit $T_{\mu_1}^{\nu_1} T_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots T_{\mu_h}^{\nu_h}$ bezeichnen. Offenbar ist

$$T_{\mu_1}^{\nu_1} T_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots T_{\mu_h}^{\nu_h} = \mathfrak{z}'_{\mu_1}\left(\mathfrak{z}'_{\mu_2} \ldots \left(\mathfrak{z}'_{\mu_h} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_{\nu_h}}\right) \ldots \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_{\nu_2}}\right) \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}_{\nu_1}}.$$

Mit Hilfe von

$$e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} z_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})$$

bestätigt man

$$D_\mu^\nu T_\alpha^\beta = D_\mu^\nu D_\alpha^\beta = T_\mu^\nu T_\alpha^\beta + \tfrac{1}{2}\delta_{\nu\alpha} T_\mu^\beta + \tfrac{1}{2} z_{\alpha\mu} e_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial z_{\nu\beta}}$$

und allgemeiner

$$D_{\mu_1}^{\nu_1} T_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots T_{\mu_h}^{\nu_h} = T_{\mu_1}^{\nu_1} T_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots T_{\mu_h}^{\nu_h} + \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} \delta_{\nu_1\mu_r} T_{\mu_1}^{\nu_r} \prod_{j \neq 1, r} T_{\mu_j}^{\nu_j} + \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} z_{\mu_r\mu_1} \prod_{j\neq 1, r} T_{\mu_j}^{\nu_j} e_{\nu_1\nu_r} \frac{\partial}{\partial z_{\nu_1\nu_r}}.$$

Es sei $\mu_1 < \ldots < \mu_h$ und $\nu_1 < \ldots < \nu_h$, ferner $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ eine beliebige Permutation von $\mu_1, \ldots, \mu_h$, sowie $\varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h}$ ihr Vorzeichen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_h} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h} D_{\lambda_1}^{\nu_1} T_{\lambda_2}^{\nu_2} \ldots T_{\lambda_h}^{\nu_h} &= \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_h} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h} T_{\lambda_1}^{\nu_1} T_{\lambda_2}^{\nu_2} \ldots T_{\lambda_h}^{\nu_h} + \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_h} \delta_{\nu_1\lambda_r} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h} T_{\lambda_1}^{\nu_r} \prod_{j\neq 1, r} T_{\lambda_j}^{\nu_j} + \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_h} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h} z_{\lambda_r\lambda_1} \prod_{j\neq 1, r} T_{\lambda_j}^{\nu_j} e_{\nu_1\nu_r} \frac{\partial}{\partial z_{\nu_1\nu_r}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Vertauscht man in der ersten Doppelsumme λ_1 mit λ_r, so geht sie in

$$-\tfrac{1}{2}(h-1) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_h} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_h}^{\mu_1 \ldots \mu_h} \delta_{\nu_1\lambda_1} T_{\lambda_2}^{\nu_2} \ldots T_{\lambda_h}^{\nu_h}$$

über. Die zweite Doppelsumme hingegen ist Null, da sie bei Vertauschung von λ_1 mit λ_r das Vorzeichen wechselt.

Allgemein definieren wir eine Determinante $|\omega_{ik}|$ mit i als Zeilenindex und k als Spaltenindex, $i,k = 1,2,\ldots,h$, mit Elementen ω_{ik} aus einem nicht-kommutativen Ring durch

$$|\omega_{ik}| = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_h} \varepsilon^{1\ldots h}_{\mu_1\ldots\mu_h} \omega_{\mu_1 1}\omega_{\mu_2 2}\ldots\omega_{\mu_h h}\,,$$

wobei $\mu_1,\ldots,\mu_h$ alle Permutationen von $1,\ldots,h$ durchläuft. Aus (39) ergibt sich mit

$$D^{*\nu_1}_{\mu_i} = D^{\nu_1}_{\mu_i} + \delta_{\mu_i\nu_1}\,\tfrac{1}{2}(h-1)$$

nunmehr die Identität

$$\begin{vmatrix} D^{*\nu_1}_{\mu_1} & T^{\nu_2}_{\mu_1} & \ldots & T^{\nu_h}_{\mu_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^{*\nu_1}_{\mu_h} & T^{\nu_2}_{\mu_h} & \ldots & T^{\nu_h}_{\mu_h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T^{\nu_1}_{\mu_1} & T^{\nu_2}_{\mu_1} & \ldots & T^{\nu_h}_{\mu_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T^{\nu_1}_{\mu_h} & T^{\nu_2}_{\mu_h} & \ldots & T^{\nu_h}_{\mu_h} \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion nach h

$$|D^{*\nu_k}_{\mu_i}| = |T^{\nu_k}_{\mu_i}| \tag{40}$$

mit

$$D^{*\nu_k}_{\mu_i} = D^{\nu_k}_{\mu_i} + \delta_{\mu_i\nu_k}\,\tfrac{1}{2}(h-k)\,. \tag{41}$$

Die Indizes i und k durchlaufen hier und im folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, die Zahlenreihe $1,2,\ldots,h$. Offenbar ist

$$|T^{\nu_k}_{\mu_i}| = \sum_{\varrho_1<\ldots<\varrho_h} \begin{pmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \varrho_1\ldots\varrho_h\end{pmatrix}_Z \begin{bmatrix}\varrho_1\ldots\varrho_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{bmatrix}_Z,$$

also auch

$$\begin{bmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{bmatrix}_Z = \sum_{\varrho_1<\ldots<\varrho_h} \begin{pmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \varrho_1\ldots\varrho_h\end{pmatrix}_{Z^{-1}} |T^{\nu_k}_{\varrho_i}|\,. \tag{42}$$

Bekanntlich ist

$$\begin{pmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{pmatrix}_{A^{-1}} = \overline{\begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_A}\,|A|^{-1}\,, \tag{43}$$

wenn

$$\overline{\begin{pmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{pmatrix}_A} \text{ das algebraische Komplement von } \begin{pmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{pmatrix}_A$$

in $|A|$ bezeichnet. Wird (43) auf $A=Z$ angewendet, so ergibt sich nach (40) und (42) die verallgemeinerte Capellische Identität in der Gestalt

$$\begin{bmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{bmatrix}_Z = |Z|^{-1} \sum_{\varrho_1<\ldots<\varrho_h} \overline{\begin{pmatrix}\varrho_1\ldots\varrho_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_Z}\, |D^{*\nu_k}_{\varrho_i}|\,. \tag{44}$$

Wegen

$$D^{*\nu_k}_{\mu_i}|Z|^\alpha = |Z|^\alpha\{D^{\nu_k}_{\mu_i} + \delta_{\mu_i\nu_k}\big(\alpha+\tfrac{1}{2}(h-k)\big)\}$$

folgt nun unmittelbar

$$\begin{bmatrix}\mu_1\ldots\mu_h\\ \nu_1\ldots\nu_h\end{bmatrix}_Z |Z|^\alpha = \alpha(\alpha+\tfrac{1}{2})\ldots\big(\alpha+\tfrac{1}{2}(h-1)\big)\, \overline{\begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_Z}\, |Z|^{\alpha-1}. \tag{45}$$

In [5] wurde für diese Identität ein komplizierter, d. h. nicht angemessener Induktionsbeweis angegeben.

Wir benötigen noch Determinantenrelationen für die transponierten Operatorendeterminanten. In Analogie zu (39) ergibt sich, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ wieder alle Permutationen von $\mu_1, \ldots, \mu_h$ durchläuft,

$$(46)\quad \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\lambda_1\ldots\lambda_h} D^{\lambda_1}_{\nu_1} T^{\lambda_2}_{\nu_2} \ldots T^{\lambda_h}_{\nu_h} = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\lambda_1\ldots\lambda_h} T^{\lambda_1}_{\nu_1} T^{\lambda_2}_{\nu_2} \ldots T^{\lambda_h}_{\nu_h} + \\ + \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h} \delta_{\lambda_1\nu_r} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\lambda_1\ldots\lambda_h} T^{\lambda_r}_{\nu_1} \prod_{j\neq 1,r} T^{\lambda_j}_{\nu_j} + \\ + \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\lambda_1\ldots\lambda_h} z_{\nu_r\nu_1} \prod_{j\neq 1,r} T^{\lambda_j}_{\nu_j} e_{\lambda_1\lambda_r} \frac{\partial}{\partial z_{\lambda_1\lambda_r}} .$$

In der ersten Doppelsumme wird λ_1 mit λ_r vertauscht. Die zweite Doppelsumme verschwindet, da sie das Vorzeichen wechselt, wenn man λ_1 mit λ_r vertauscht. Addiert man schließlich zu beiden Seiten der Gleichung die Determinante

$$\left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h^* - 1)\right) |\delta_{\mu_i\nu_1}, T^{\mu_i}_{\nu_2}, \ldots, T^{\mu_i}_{\nu_h}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, h ,$$

mit willkürlichem h^*, so ergibt sich

$$(47)\quad |D^{\mu_i}_{\nu_1} + \delta_{\mu_i\nu_1}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h^* - 1)\right), T^{\mu_i}_{\nu_2}, \ldots, T^{\mu_i}_{\nu_h}| \\ = |T^{\mu_i}_{\nu_k}| + \left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h^* - 1)\right) |\delta_{\mu_i\nu_1}, T^{\mu_i}_{\nu_2}, \ldots, T^{\mu_i}_{\nu_h}| - \\ - \tfrac{1}{2} \sum_{r=2}^{h} |T^{\mu_i}_{\nu_1}, \ldots, T^{\mu_i}_{\nu_{r-1}}, \delta_{\mu_i\nu_r}, T^{\mu_i}_{\nu_{r+1}}, \ldots, T^{\mu_i}_{\nu_h}| .$$

Wir setzen

$$(48)\qquad \Delta^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h} = |D^{\mu_i}_{\nu_k} + \delta_{\mu_i\nu_k}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h - k)\right)| .$$

$T^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})$ entstehe aus $|T^{\mu_i}_{\nu_k}|$, indem man die Spalten mit den Indizes $\nu_{\varrho_1}, \ldots, \nu_{\varrho_r}$ durch die entsprechenden von $|\delta_{\mu_i\nu_k}|$ ersetzt. Wir beweisen

$$(49)\qquad \Delta^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h} = \sum_{r=0}^{h} \frac{\varepsilon_h(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)} \sum_{\varrho_1 < \ldots < \varrho_r} T^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})$$

durch vollständige Induktion nach h. Die Identität (49) gilt ersichtlich für $h = 1$; sie sei richtig für $h - 1$ an Stelle von h, dabei $h > 1$. Dann folgt

$$(50)\qquad \Delta^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h} = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j+1} \left(D^{\mu_j}_{\nu_1} + \delta_{\mu_j\nu_1}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h-1)\right)\right) \Delta^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_h}_{\nu_2\ldots\ldots\nu_h} \\ = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j+1} \left(D^{\mu_j}_{\nu_1} + \delta_{\mu_j\nu_1}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}(h-1)\right)\right) \cdot \\ \cdot \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r-1}(\alpha)} \sum_{2 \leq \varrho_1 < \ldots < \varrho_r \leq h} T^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_h}_{\nu_2\ldots\ldots\nu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}) .$$

Nach (47) ist

$$\sum_{j=1}^{h}(-1)^{j+1}\left(D_{\nu_1}^{\mu_j}+\delta_{\mu_j\nu_1}\left(\alpha-\tfrac{1}{2}(h-1)\right)\right)T_{\nu_2\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})$$
$$= T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})+\left(\alpha-\tfrac{1}{2}(h-1)\right)T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_1\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})-$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{\varrho=2\\ \varrho\neq\varrho_1,\ldots,\varrho_r}}^{h} T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho}\ldots\nu_{\varrho_r})$$

zu schließen, indem man alle Determinanten in dieser Identität nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz geeignet zerlegt und (47) mit $h-r,h$ an Stelle von h,h^* ansetzt. (50) geht damit über in

$$\Delta_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}=\sum_{r=0}^{h-1}\frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r-1}(\alpha)}\sum_{2\leq\varrho_1<\ldots<\varrho_r\leq h}\{T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})+$$
$$+\left(\alpha-\tfrac{1}{2}(h-1)\right)T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_1\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}) - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{\varrho=2\\ \varrho\neq\varrho_1,\ldots,\varrho_r}}^{h} T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho}\ldots\nu_{\varrho_r})\}$$
$$= T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\cdot)+\varepsilon_h(\alpha)T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_1\ldots\nu_h)+$$
$$+\sum_{r=1}^{h-1}\frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r-1}(\alpha)}\sum_{2\leq\varrho_1<\ldots<\varrho_r\leq h}T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})+$$
$$+\sum_{r=1}^{h-1}\frac{\varepsilon_{h}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}\sum_{\substack{1\leq\varrho_1<\ldots<\varrho_r\leq h\\ \varrho_1=1}}T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})-$$
$$-\sum_{r=1}^{h-1}\frac{r}{2}\frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}\sum_{2\leq\varrho_1<\ldots<\varrho_r\leq h}T_{\nu_1\ldots\nu_h}^{\mu_1\ldots\mu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r})\,.$$

Wegen

$$\frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r-1}(\alpha)}-\frac{r}{2}\frac{\varepsilon_{h-1}(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}=\frac{\varepsilon_h(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}$$

folgt nun (49), q.e.d.

Um die Identität

(51) $$|Z|^{-1-\alpha}\,|W|\,\hat{\mathsf{M}}_\alpha\,|Z|^\alpha=\mathsf{M}_\alpha$$

für die Transformation (35) zu beweisen, beachten wir, daß

$$Z\frac{\partial}{\partial Z}=-\left(\hat{Z}\frac{\partial}{\partial\hat{Z}}\right)',$$

also

$$\hat{D}_\mu^\nu=\hat{\mathfrak{z}}_\mu'\frac{\partial}{\partial\hat{\mathfrak{z}}_\nu}=-D_\nu^\mu$$

ist. Mit Hilfe von (42), (40) und (38) resultiert dann

$$s_h\left(\hat{Z}-\hat{W},\frac{\partial}{\partial\hat{Z}}\right)|Z|^\alpha = \sum_{\substack{\mu_1<\ldots<\mu_h\\ \nu_1<\ldots<\nu_h}} \begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_{E-\hat{W}\hat{Z}^{-1}} |\hat{D}^{*\nu_k}_{\mu_i}|\,|Z|^\alpha$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1<\ldots<\mu_h\\ \nu_1<\ldots<\nu_h}} \begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_{E-W^{-1}Z} |-D^{\mu_i}_{\nu_k}+\delta_{\mu_i\nu_k}\tfrac{1}{2}(h-k)|\,|Z|^\alpha$$

$$= |Z|^\alpha \sum_{\substack{\mu_1<\ldots<\mu_h\\ \nu_1<\ldots<\nu_h}} \begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E} \Delta^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h},$$

also

$$|Z|^{-1-\alpha}\,|W|\,\hat{\mathsf{M}}_\alpha\,|Z|^\alpha = |Z^{-1}W|\sum_{h=0}^{n}\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)}\sum_{\substack{\mu_1<\ldots<\mu_h\\ \nu_1<\ldots<\nu_h}} \begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E}\cdot$$

$$\cdot\sum_{r=0}^{n}\frac{\varepsilon_h(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}\sum_{\varrho_1<\ldots<\varrho_r} T^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}).$$

Seien $\varrho_{r+1}<\ldots<\varrho_h$ und $\sigma_{r+1}<\ldots<\sigma_h$ zu $\varrho_1<\ldots<\varrho_r$ und $\sigma_1<\ldots<\sigma_r$ so bestimmt, daß $\varrho_1,\ldots,\varrho_h$ und $\sigma_1,\ldots,\sigma_h$ Permutationen der Zahlenreihe $1,\ldots,h$ sind. Es gilt dann

$$T^{\mu_1\ldots\mu_h}_{\nu_1\ldots\nu_h}(\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}) = \sum_{\sigma_1<\ldots<\sigma_r}(-1)^{\varrho_1+\ldots+\varrho_r+\sigma_1+\ldots+\sigma_r}\begin{pmatrix}\mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_r}\\ \nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}\end{pmatrix}_E T^{\mu_{\sigma_{r+1}}\ldots\mu_{\sigma_h}}_{\nu_{\varrho_{r+1}}\ldots\nu_{\varrho_h}}(\cdot),$$

wegen

$$\begin{pmatrix}\nu_1\ldots\nu_h\\ \mu_1\ldots\mu_h\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E} = (-1)^{\varrho_1+\ldots+\varrho_r+\sigma_1+\ldots+\sigma_r}\begin{pmatrix}\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}\nu_{\varrho_{r+1}}\ldots\nu_{\varrho_h}\\ \mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_r}\mu_{\sigma_{r+1}}\ldots\mu_{\sigma_h}\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E}$$

also

$$|Z|^{-1-\alpha}\,|W|\,\hat{\mathsf{M}}_\alpha\,|Z|^\alpha = |Z^{-1}W|\sum_{h=0}^{n}\sum_{r=0}^{h}\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{h-r}(\alpha)}\sum_{\substack{\mu_{\sigma_{r+1}}<\ldots<\mu_{\sigma_h}\\ \nu_{\varrho_{r+1}}<\ldots<\nu_{\varrho_h}}}\left\{\sum_{\substack{\mu_{\sigma_1}<\ldots<\mu_{\sigma_r}\\ \nu_{\varrho_1}<\ldots<\nu_{\varrho_r}}}\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}\nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}\nu_{\varrho_{r+1}}\ldots\nu_{\varrho_h}\\ \mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_r}\mu_{\sigma_{r+1}}\ldots\mu_{\sigma_h}\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E}\begin{pmatrix}\mu_{\sigma_1}\ldots\mu_{\sigma_r}\\ \nu_{\varrho_1}\ldots\nu_{\varrho_r}\end{pmatrix}_E\right\} T^{\mu_{\sigma_{r+1}}\ldots\mu_{\sigma_h}}_{\nu_{\varrho_{r+1}}\ldots\nu_{\varrho_h}}(\cdot).$$

Wir führen $j=h-r$ an Stelle von h ein; offenbar ist $0\leqq j\leqq n$ und $0\leqq r\leqq n-j$, sofern j gegeben ist. Schließlich ersetzen wir noch

$$\mu_{\sigma_1},\ldots,\mu_{\sigma_r},\,\mu_{\sigma_{r+1}},\ldots,\mu_{\sigma_h} \to \alpha_1,\ldots,\alpha_r,\,\mu_1,\ldots,\mu_j,$$

$$\nu_{\varrho_1},\ldots,\nu_{\varrho_r},\,\nu_{\varrho_{r+1}},\ldots,\nu_{\varrho_h} \to \beta_1,\ldots,\beta_r,\,\nu_1,\ldots,\nu_j.$$

Es ergibt sich

$$(52)\quad |Z|^{-1-\alpha}\,|W|\,\hat{\mathsf{M}}_\alpha\,|Z|^\alpha = |Z^{-1}W|\sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_j(\alpha)}\left\{\sum_{r=0}^{n-j}\sum_{\substack{\mu_1<\dots<\mu_j\\ \nu_1<\dots<\nu_j}}\sum_{\substack{\alpha_1<\dots<\alpha_r\\ \beta_1<\dots<\beta_r}}\begin{pmatrix}\beta_1\dots\beta_r\ \nu_1\dots\nu_j\\ \alpha_1\dots\alpha_r\ \mu_1\dots\mu_j\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\\ \beta_1\dots\beta_r\end{pmatrix}_E\right\}T^{\mu_1\dots\mu_j}_{\nu_1\dots\nu_j}(\cdot)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_j(\alpha)}\sum_{\substack{\mu_1<\dots<\mu_j\\ \nu_1<\dots<\nu_j}} a^{\mu_1\dots\mu_j}_{\nu_1\dots\nu_j}\,T^{\mu_1\dots\mu_j}_{\nu_1\dots\nu_j}(\cdot)$$

mit

$$a^{\mu_1\dots\mu_j}_{\nu_1\dots\nu_j} = |Z^{-1}W|\sum_{r=0}^{n-j}\sum_{\substack{\alpha_1<\dots<\alpha_r\\ \beta_1<\dots<\beta_r}}\begin{pmatrix}\beta_1\dots\beta_r\ \nu_1\dots\nu_j\\ \alpha_1\dots\alpha_r\ \mu_1\dots\mu_j\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\\ \beta_1\dots\beta_r\end{pmatrix}_E.$$

Es sei allgemein

$$E_{\nu_1\dots\nu_n} = (\delta_{i\nu_k}),\qquad i,k = 1,2,\dots,n\,,$$

also

$$E'_{\mu_1\dots\mu_n}(a_{ik})\,E_{\nu_1\dots\nu_n} = (a_{\mu_i\nu_k})\,,$$

folglich

$$\begin{pmatrix}\varrho_1\dots\varrho_t\\ \sigma_1\dots\sigma_t\end{pmatrix}_{E'_{\mu_1\dots\mu_n}AE_{\nu_1\dots\nu_n}} = \begin{pmatrix}\mu_{\varrho_1}\dots\mu_{\varrho_t}\\ \nu_{\sigma_1}\dots\nu_{\sigma_t}\end{pmatrix}_A$$

für $A = A^{(n)}$. Wir ergänzen $\mu_1<\dots<\mu_j$ bzw. $\nu_1<\dots<\nu_j$ durch $\varrho_1<\dots<\varrho_{n-j}$ bzw. $\sigma_1<\dots<\sigma_{n-j}$ zum System aller Zahlen $1,\dots,n$ und setzen

$$R = E_{\varrho_1\dots\varrho_{n-j}\mu_1\dots\mu_j},\qquad S = E_{\sigma_1\dots\sigma_{n-j}\nu_1\dots\nu_j}.$$

Es wird dann

$$\begin{pmatrix}\beta_1\dots\beta_r\ \nu_1\dots\nu_j\\ \alpha_1\dots\alpha_r\ \mu_1\dots\mu_j\end{pmatrix}_{W^{-1}Z-E} = \begin{pmatrix}\lambda_1\dots\lambda_r\ n-j+1\dots n\\ \varkappa_1\dots\varkappa_r\ n-j+1\dots n\end{pmatrix}_{S'(W^{-1}Z-E)R}$$

mit $\beta_a = \sigma_{\lambda_a}$, $\alpha_a = \varrho_{\varkappa_a}$, so daß sich mit $G = S'(W^{-1}Z-E)R$ und

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\\ \beta_1\dots\beta_r\end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix}\varkappa_1\dots\varkappa_r\\ \lambda_1\dots\lambda_r\end{pmatrix}_{R'S}$$

schließlich

$$a^{\mu_1\dots\mu_j}_{\nu_1\dots\nu_j} = |Z^{-1}W|\sum_{r=0}^{n-j}\sum_{\substack{1\le\varkappa_1<\dots<\varkappa_r\le n-j\\ 1\le\lambda_1<\dots<\lambda_r\le n-j}}\begin{pmatrix}\lambda_1\dots\lambda_r\ n-j+1\dots n\\ \varkappa_1\dots\varkappa_r\ n-j+1\dots n\end{pmatrix}_G\begin{pmatrix}\varkappa_1\dots\varkappa_r\\ \lambda_1\dots\lambda_r\end{pmatrix}_{R'S}$$

ergibt. In der Zerlegung der Matrix

$$G = \begin{pmatrix}G_1 & G_2\\ G_3 & G_4\end{pmatrix}$$

sei $G_4 = G_4^{(j)}$. Es gilt

$$G = \begin{pmatrix} E & G_2 G_4^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \tilde{G} \begin{pmatrix} E & 0 \\ G_4^{-1} G_3 & E \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} G_1 - G_2 G_4^{-1} G_3 & 0 \\ 0 & G_4 \end{pmatrix}.$$

G entsteht also aus $\tilde{G}$, indem man gewisse Vielfache der j letzten Zeilen bzw. Spalten zu den vorangehenden Zeilen bzw. Spalten addiert. Demnach ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_r & n-j+1 \ldots n \\ \varkappa_1 \ldots \varkappa_r & n-j+1 \ldots n \end{pmatrix}_G &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_r & n-j+1 \ldots n \\ \varkappa_1 \ldots \varkappa_r & n-j+1 \ldots n \end{pmatrix}_{\tilde{G}} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_r \\ \varkappa_1 \ldots \varkappa_r \end{pmatrix}_{G_1 - G_2 G_4^{-1} G_3} |G_4| . \end{aligned}$$

Wir setzen noch

$$R'S = \begin{pmatrix} I & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad I = I^{(n-j)};$$

ersichtlich ist $I = (\delta_{\varrho_i \sigma_k})$, $i, k = 1, 2, \ldots, n-j$ und

$$\begin{pmatrix} \varkappa_1 \ldots \varkappa_r \\ \lambda_1 \ldots \lambda_r \end{pmatrix}_{R'S} = \begin{pmatrix} \varkappa_1 \ldots \varkappa_r \\ \lambda_1 \ldots \lambda_r \end{pmatrix}_I .$$

Ferner gilt

$$|Z^{-1} W| = |E + SGR'|^{-1} .$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} a^{\mu_1 \ldots \mu_j}_{\nu_1 \ldots \nu_j} &= |G_4| \, |E + SGR'|^{-1} \cdot \sum_{r=0}^{n-j} \sum_{1 \leqq \lambda_1 < \ldots < \lambda_r \leqq n-j} \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_r \\ \lambda_1 \ldots \lambda_r \end{pmatrix}_{(G_1 - G_2 G_4^{-1} G_3) I} \\ &= |G_4| \, |E + (G_1 - G_2 G_4^{-1} G_3) I| \, |E + SGR'|^{-1} . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu_1 \ldots \mu_j \\ \nu_1 \ldots \nu_j \end{pmatrix}_{E - WZ^{-1}} &= \begin{pmatrix} n-j+1 \ldots n \\ n-j+1 \ldots n \end{pmatrix}_{R'(E - WZ^{-1})S} \\ &= \begin{pmatrix} n-j+1 \ldots n \\ n-j+1 \ldots n \end{pmatrix}_{S'(E - Z^{-1} W)R} \\ &= \begin{pmatrix} n-j+1 \ldots n \\ n-j+1 \ldots n \end{pmatrix}_{G(E + R'SG)^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \ldots n-j \\ 1 \ldots n-j \end{pmatrix}_{(E + R'SG)G^{-1}} |(E + R'SG) G^{-1}|^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \ldots n-j \\ 1 \ldots n-j \end{pmatrix}_{G^{-1} + R'S} |E + SGR'|^{-1} \, |G| . \end{aligned}$$

Man bestätigt leicht

$$G^{-1}+R'S = \begin{pmatrix}(G_1-G_2G_4{}^{-1}G_3)^{-1}+I & * \\ * & *\end{pmatrix}$$

und erhält somit

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mu_1 \ldots \mu_j \\ \nu_1 \ldots \nu_j\end{pmatrix}_{E-WZ^{-1}} &= |(G_1-G_2G_4{}^{-1}G_3)^{-1}+I|\,|G|\,|E+SGR'|^{-1} \\ &= |E+(G_1-G_2G_4{}^{-1}G_3)I|\,|G_4|\,|E+SGR'|^{-1} \\ &= a^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\nu_1\ldots\nu_j},\end{aligned}$$

nach (52) also

$$|Z|^{-1-\alpha}|W|\,\hat{\mathsf{M}}_\alpha\,|Z|^\alpha = \sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_j(\alpha)}\sum_{\substack{\mu_1<\ldots<\mu_j \\ \nu_1<\ldots<\nu_j}}\begin{pmatrix}\mu_1 \ldots \mu_j \\ \nu_1 \ldots \nu_j\end{pmatrix}_{E-WZ^{-1}} T^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\nu_1\ldots\nu_j}(\cdot) = \mathsf{M}_\alpha,$$

q.e.d.

LITERATUR

1. G. Kaufhold, *Dirichletsche Reihen mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades*, Math. Ann. 137 (1959), 454–476.
2. H. Klingen, *Zur Transformationstheorie von Thetareihen indefiniter quadratischer Formen*, Math. Ann. 140 (1960), 76–86.
3. M. Koecher, *Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen*, Math. Nachr. 9 (1953), 51–85.
4. H. Maaß, *Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Math. Ann. 125 (1953), 235–263.
5. H. Maaß, *Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen*, Math. Ann. 126 (1953), 44–68.
6. C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen* II, Ann. Math. 37 (1936), 230–263.
7. C. L. Siegel, *On the theory of indefinite quadratic forms*, Ann. Math. 45 (1944), 577–622.
8. C. L. Siegel, *Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen*, Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th birthday (Courant Anniv. Vol.), New York, 1948, 395–406.
9. H. Weyl, *The classical groups*, Princeton, 1939.

UNIVERSITÄT HEIDELBERG, DEUTSCHLAND