Über die gleichmäßige Konvergenz der Poincaréschen Reihen n-ten Grades

Von *Hans Maaß* in Heidelberg

Vorgelegt von Herrn C. L. Siegel in der Sitzung vom 19. Juni 1964

Die Modulformen zur Siegelschen Modulgruppe lassen sich bekanntlich aus gewissen Poincaréschen Reihen erzeugen [2]. Es kann jedoch nicht bestritten werden, daß diese Reihen ungeachtet ihrer Nützlichkeit nur sehr schwerfällig zu handhaben sind, da es bisher fraglich war, ob sie in einem Bereich, der den Siegelschen Fundamentalbereich der Modulgruppe n-ten Grades umfaßt, gleichmäßig konvergieren. Auf einem Spaziergang in subtropischen Breiten im Wintersemester 1962/63 entwickelte C. L. Siegel in einem Gespräch, welches von A. Andreotti angeregt worden war, in großen Zügen einen Plan, nach welchem eine derartige gleichmäßige Konvergenz der Poincaréschen Reihen bewiesen werden kann. Wir kamen später überein, daß ich die Niederschrift besorgen sollte, da mir die Sache mitteilenswert erschien. Der Beitrag, den C. L. Siegel allein schon mit Lemma 1 zu dem Problem geleistet hat, ist so gewichtig, daß eine Note über diesen Gegenstand sehr wohl auch unter seinem Namen hätte erscheinen können.

Es sei Γ die Modulgruppe n-ten Grades, $T = T^{(n)}$ eine halbganze symmetrische Matrix $\geqq 0$ und $\mathsf{A}(T)$ die Gruppe der Modulmatrizen n-ten Grades von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U & S\,U'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } T[U] = T.$$

Wir bestimmen ein Vertretersystem $\mathsf{V}(T)$ der Linksrestklassen von Γ bezüglich $\mathsf{A}(T)$:

$$\Gamma = \bigcup_{S \in \mathsf{V}(T)} \mathsf{A}(T) S.$$

und setzen mit geradem k

$$(1) \qquad g_{-k}(Z, T) = \sum_{S \in \mathsf{V}(T)} e^{2\pi i \sigma(T S\langle Z\rangle)} |CZ + D|^{-k}.$$

Hierin ist $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $S\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ und $Z = X + iY$ eine n-reihige komplexe symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil Y. Allgemein bezeichne $\sigma(W)$ die Spur einer Matrix W. Ziel der Untersuchung ist der Nachweis, daß die Poincaréschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ für $k > n + \text{Rang } T + 1$, $k \equiv 0 \pmod 2$ in jedem Bereich

$$Y \geqq \frac{1}{m} E, \quad \sigma(X^2) \leqq m \qquad (E = \text{Einheitsmatrix}) \tag{2}$$

absolut und gleichmäßig konvergieren. Wir stützen uns dabei auf die Tatsache, daß die Eisensteinreihe ($T = 0$) für $k > n + 1$ absolut konvergiert [1].

Da die Poincaréschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ gegenüber den Transformationen $T \to T[V]$ mit unimodularen Matrizen V invariant sind, so bedeutet es im folgenden keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } T_1 = T_1^{(r)} > 0 \tag{3}$$

voraussetzen, so daß r den Rang von T bezeichnet. Es sei noch $\varepsilon(T_1)$ die Anzahl der Einheiten von T_1, sofern $r > 0$ ist. Im Falle $r = 0$ werde $\varepsilon(T_1) = 1$ gesetzt. $g_{-k}(Z, T)$ läßt sich dann, wie schon in [2] ausgeführt wurde, auf folgende Gestalt bringen

$$g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\{C, D\}} \sum_{P} e^{2\pi i \sigma(T_1[P'] S\langle Z \rangle)} |CZ + D|^{-k}. \tag{4}$$

Summiert wird hier über alle primitiven Matrizen P vom Typus $P^{(n,r)}$ sowie über ein volles System nicht-assoziierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare C, D, die wir uns auf irgendeine Weise zu Modulmatrizen $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$ ergänzt denken.

Um eine Majorante für $\varepsilon(T_1) g_{-k}(Z, T)$ zu bestimmen, die T_1 explizit nicht mehr enthält, wählen wir δ im Intervall $0 < \delta < 1$ so, daß $T_1 > \delta E$ wird. Ist ferner Y_S der Imaginärteil von $S\langle Z \rangle$, so gilt $Y_S[P] = R' R$ mit geeignetem $R = R^{(n)}$, mithin

$$\sigma(T_1[P'] Y_S) = \sigma(T_1[R']) > \delta \sigma(R R') = \delta \sigma(Y_S[P]).$$

Damit erweist sich

$$h(Z) = \sum_{\{C, D\}} \varphi(Z; C, D) \, \| CZ + D \|^{-k} \tag{5}$$

mit

$$\varphi(Z; C, D) = \sum_{P} e^{-2\pi\delta\sigma(Y_S[P])} \tag{6}$$

als eine Majorante von $\varepsilon(T_1) g_{-k}(Z, T)$. Wegen

$$Y_S = (\bar{Z} C' + D')^{-1} \, Y (CZ + D)^{-1}$$

tritt die erste Matrizenzeile von S in (6) nicht mehr in Erscheinung.

Wir setzen in fester Bedeutung $Y_S^{-1} = W = (w_{\mu\nu})$. Beachtet man, daß C, D ein symmetrisches Paar ist, so ergeben sich die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
W &= (CZ + D)\,Y^{-1}(\bar{Z}C' + D') = Y[C'] + Y^{-1}[XC' + D'] \\
&= \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C' \\ XC' + D' \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

mit

$$
K = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ X & E \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

Die folgenden Abschätzungen gelten für Matrizen $Z = X + iY$, die bei vorgegebenem $m > 0$ den Ungleichungen (2) genügen. Es seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die charakteristischen Wurzeln von Y. Offenbar ist

$$
\varrho_\nu \geqq \frac{1}{m} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}
$$

Ferner gilt

$$
K \geqq c_1 \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1 = c_1(m, n) > 0. \tag{10}
$$

Gleichwertig hiermit ist nämlich, wenn $Y = R'R$ mit $R = R^{(n)}$ gesetzt wird,

$$
\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ R'^{-1}X & R'^{-1} \end{bmatrix} \geqq c_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R'^{-1} \end{bmatrix}
$$

oder auch

$$
\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ X[R^{-1}] & E \end{bmatrix} \geqq c_1 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{11}
$$

Das Bestehen einer solchen Ungleichung ist aber unmittelbar einleuchtend, da $X[R^{-1}]$ zufolge $\sigma(X^2) \leqq m$ und $Y^{-1} = R^{-1}R'^{-1} \leqq mE$ einer kompakten Matrizenmenge angehört, so daß die charakteristischen Wurzeln der Matrix auf der linken Seite der Ungleichung (11) eine positive untere Schranke $c_1 = c_1(m, n)$ haben. Mit diesem c_1 ist dann (11) erfüllt.

Lemma 1 (Siegel). *Es sei $Y \geqq \frac{1}{m}E$, $\sigma(X^2) \leqq m$ und C, D die zweite Matrizenzeile einer symplektischen Matrix. Zu einem vorgegebenen System natürlicher Zahlen $1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_h \leqq n$ bilden wir die h-reihige Hauptunterdeterminante*

$$
\Delta_h(Z) = |w_{\alpha_\mu \alpha_\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, h)
$$

der Matrix

$$
W = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C' \\ XC' + D' \end{bmatrix} = (w_{\mu\nu}).
$$

Es ist dann

$$|Y|\,\Delta_h(Z) \geqq c_2\,\Delta_h(iE)$$

mit geeignetem $c_2 = c_2(m, n) > 0$.

Beweis. $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ bestehe aus den h Spalten von $\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix}$ mit den Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$. Die Teilmatrizen F, G mögen sich aus je n Zeilen zusammensetzen. Zufolge $W = K\begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix}$ und (10) ist

$$\Delta_h(Z) = \left|K\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}\right| \geqq c_1^h \left|\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}\right|.$$

Wir transformieren Y mit Hilfe einer orthogonalen Matrix auf eine Diagonalgestalt, so daß

$$Y = \Lambda[U], \quad U'U = E, \quad \Lambda = (\delta_{\mu\nu}\varrho_\nu)$$

mit dem Kroneckersymbol $\delta_{\mu\nu}$ gilt, und erhalten

$$\Delta_h(Z) \geqq c_1^h \left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} U F \\ \Lambda^{-\frac{1}{2}} U G \end{bmatrix}\right|.$$

Es seien

$\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ die Zeilen von UF, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ die Zeilen von UG.

Ist allgemein $D(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_h)$ der Wert einer h-reihigen Determinante, dargestellt als Funktion der h Zeilen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_h$, so folgt auf Grund eines Laplaceschen Determinantensatzes

$$\left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda^{\frac{1}{2}} U F \\ \Lambda^{-\frac{1}{2}} U G \end{bmatrix}\right| = \sum_{\substack{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_\varkappa \\ \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_\lambda \\ \varkappa + \lambda = h}} D^2(\mathfrak{f}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{f}_{\mu_\varkappa}, \mathfrak{g}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\nu_\lambda}) \frac{\varrho_{\mu_1}\varrho_{\mu_2}\cdots\varrho_{\mu_\varkappa}}{\varrho_{\nu_1}\varrho_{\nu_2}\cdots\varrho_{\nu_\lambda}}.$$

Mit Rücksicht auf $|Y| = \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n$ sowie (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} |Y|\,\Delta_h(Z) &\geqq c_1^h \sum_{\substack{\mu_1 < \cdots < \mu_\varkappa \\ \nu_1 < \cdots < \nu_\lambda \\ \varkappa + \lambda = h}} m^{-\varkappa - n + \lambda} D^2(\mathfrak{f}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{f}_{\mu_\varkappa}, \mathfrak{g}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\nu_\lambda}) \\ &\geqq c_2 \sum_{\substack{\mu_1 < \cdots < \mu_\varkappa \\ \nu_1 < \cdots < \nu_\lambda \\ \varkappa + \lambda = h}} D^2(\mathfrak{f}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{f}_{\mu_\varkappa}, \mathfrak{g}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\nu_\lambda}) \\ &= c_2 \left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} UF \\ UG \end{bmatrix}\right| = c_2 \left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}\right| = c_2\,\Delta_h(iE) \end{aligned}$$

mit

$$c_2 = m^{-n} \operatorname*{Min}_{0 \leqq h \leqq n} \left\{\left(\frac{c_1}{m}\right)^h, (c_1 m)^h\right\} = c_2(m, n) > 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Für $h = n$ ist nach (7) insbesondere

$$|Y|\,\Delta_n(Z) = \|CZ + D\|^2, \quad \Delta_n(iE) = \|iC + D\|^2.$$

Als spezielle Folge von Lemma 1 ergibt sich damit

Lemma 2. *Die für $k > n + 1$ absolut konvergente Eisensteinreihe*

$$g_{-k}(Z, 0) = \sum_{\{C, D\}} |CZ + D|^{-k}$$

ist in jedem Bereich $Y \geqq \frac{1}{m} E$, $\sigma(X^2) \leqq m$ gleichmäßig konvergent.

Um für die durch (6) eingeführte Reihe unter der Voraussetzung (2) die Abschätzung

$$\varphi(Z; C, D) \leqq c_4 \|CZ + D\|^r \tag{12}$$

mit geeignetem $c_4 = c_4(m, n, \delta) > 0$ zu beweisen, führen wir W in φ ein:

$$\varphi(Z; C, D) = \sum_P e^{-2\pi\delta\sigma(W^{-1}[P])} \tag{13}$$

und setzen vorübergehend voraus, daß W im Sinne Minkowskis reduziert ist. Das ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich, da $\|CZ + D\|$ ebenso wie $\sigma(W^{-1}[P])$ gegenüber den Transformationen $C \to UC$, $D \to UD$, $P \to UP$ mit unimodularem U invariant ist. Dabei geht W in $W[U']$ über und UP durchläuft mit P wieder alle primitiven Matrizen desselben Typus. Auf Grund der Reduktionsbedingungen ist $c W_0 < W < \frac{1}{c} W_0$ also auch $W^{-1} > c W_0^{-1}$ mit $W_0 = (\delta_{\mu\nu} w_{\nu\nu})$ und geeignetem $c = c(n) > 0$ zu erschließen. Folglich wird

$$\varphi(Z; C, D) < \sum_P e^{-2\pi\delta c\sigma(W_0^{-1}[P])} < \sum_G e^{-2\pi\delta c\sigma(W_0^{-1}[G])},$$

wobei über alle ganzen Matrizen $G = G^{(n,r)} = (g_{\mu\nu})$ summiert wird. Mit einem gewissen $c_3 = c_3(m, n, \delta) > 0$ ergibt sich dann

$$\varphi(Z; C, D) < \sum_G e^{-2\pi\delta c \sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{r} \frac{1}{w_{\mu\mu}} g_{\mu\nu}^2} = \prod_{\mu=1}^{n} \left\{ \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\delta c}{w_{\mu\mu}} g^2} \right\}^r < c_3 \prod_{\mu=1}^{n} \left(1 + \sqrt{w_{\mu\mu}}\right)^r$$

$$= c_3 |W_0|^{\frac{r}{2}} \prod_{\mu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{w_{\mu\mu}}}\right)^r < c_3 c^{-\frac{nr}{2}} |W|^{\frac{r}{2}} \prod_{\mu=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{w_{\mu\mu}}}\right)^r$$

$$= c_3 c^{-\frac{nr}{2}} \|CZ + D\|^r |Y|^{-\frac{r}{2}} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqq \alpha_1 < \cdots < \alpha_h \leqq n \\ 0 \leqq h \leqq n}} (w_{\alpha_1\alpha_1} \ldots w_{\alpha_h\alpha_h})^{-\frac{1}{2}} \right\}^r.$$

Wegen $W > 0$ ist

$$w_{\alpha_1\alpha_1} w_{\alpha_2\alpha_2} \ldots w_{\alpha_h\alpha_h} \geqq |w_{\alpha_\mu\alpha_\nu}| = \Delta_h(Z).$$

Da C, D ganze Matrizen sind, ist $\Delta_h(iE) \geqq 1$, also nach Lemma 1

$$|Y|\, w_{\alpha_1\alpha_1} w_{\alpha_2\alpha_2} \ldots w_{\alpha_h\alpha_h} \geqq c_2 > 0.$$

Damit folgt (12) mit

$$c_4 = c_3 \operatorname*{Max}_{0 \leqq r \leqq n} c^{-\frac{nr}{2}} 2^{nr} c_2^{-\frac{r}{2}} = c_4(m, n, \delta) > 0 .$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Matrizenpaare C, D im Falle $C \neq 0$ in der Klasse der assoziierten Paare VC, VD ($V = V^{(n)}$ unimodular) immer so ausgewählt sind, daß

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U', \qquad D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U^{-1} \tag{14}$$

mit einem teilerfremden symmetrischen Paar $C_0^{(s)}, D_0^{(s)}$ und einer unimodularen Matrix U gilt, wobei $|C_0| \neq 0$, also Rang $C = s$ sei. Eine derartige Auswahl kann bekanntlich [3] so vorgenommen werden, daß C_0, D_0 in der Klasse der assoziierten Paare ein vorgegebenes Paar und die primitive Matrix Q, die aus den s ersten Spalten von U besteht, in der Klasse der assoziierten Matrizen QV ($V = V^{(s)}$ unimodular) einen vorgegebenen Repräsentanten bezeichnet. Im Falle $C = 0$, also $s = 0$, wählen wir $D = E$.

Zum Beweis unseres Konvergenzsatzes benötigen wir noch unter der Voraussetzung (2) eine Abschätzung der Reihenreste

$$\varphi_p(Z; C, D) = \sum_{\sigma(P'P) \geqq p^2} e^{-2\pi\delta\sigma(W^{-1}[P])}, \tag{15}$$

wobei über alle primitiven Matrizen $P = P^{(n,r)}$ mit $\sigma(P'P) \geqq p^2$ summiert wird. Die im weiteren Verlauf der Untersuchung auftretenden positiven Konstanten c_5 bis c_{10} hängen von m, n, r und C, D ab, die letzten beiden auch noch von δ.

Wir schätzen die kleinste charakteristische Wurzel λ von W^{-1} ab. Offenbar ist

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \sigma(W) = \sigma(Y[C']) + \sigma(Y^{-1}[XC' + D']) \leqq \sigma(Y[C']) + c_5$$

mit geeignetem $c_5 > 0$. Im Falle $s = 0$ ist $\lambda \geqq \frac{1}{c_5}$. Sei nun $s > 0$. Dann ist

$$Y[C'] = Y\left[U\begin{pmatrix} C_0' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} Y[QC_0'] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wegen $Y \geqq \frac{1}{m} E$ also

$$\sigma(Y[C']) = \sigma(Y[QC_0']) \geqq \frac{1}{m}\,\sigma(CC') > 0,$$

mithin

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \frac{1}{c_6}\,\sigma(Y[QC_0'])$$

oder

$$\lambda \geqq \frac{c_6}{\sigma(Y[QC_0'])} \quad \text{für } s > 0 \tag{16}$$

mit geeignetem $c_6 > 0$. Schließlich ist im Falle $s > 0$ auch

$$\| CZ + D \| = \| C_0 Z[Q] + D_0 \| \geqq \| C_0 \| \, |Y[Q]| = \| C_0 \|^{-1} |Y[QC_0']| .$$

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ die charakteristischen Wurzeln von $Y[QC_0']$. Wegen $Y[QC_0'] \geqq \frac{1}{m} E[QC_0'] \geqq c_7 E$ mit geeignetem $c_7 > 0$ ist $\lambda_\nu \geqq c_7$, also $|Y[QC_0']| \geqq c_7^{s-1} \lambda_\nu$ für $1 \leqq \nu \leqq s$, so daß λ_ν in dieser Ungleichung auch durch das arithmetische Mittel der Wurzeln ersetzt werden kann. Es folgt $|Y[QC_0']| \geqq \frac{1}{s} c_7^{s-1} \sigma(Y[QC_0'])$, mit $c_8 = \| C_0 \|^{-1} \frac{1}{s} c_7^{s-1}$ also

$$\| CZ + D \| \geqq c_8 \sigma(Y[QC_0']) \qquad (s > 0). \tag{17}$$

Die Hilfsmittel zur Abschätzung von (15) stehen nun zur Verfügung. Wegen $W^{-1} \geqq \lambda E$ ist offenbar

$$\varphi_p(Z; C, D) \leqq e^{-\pi \delta \lambda p^2} \sum_P e^{-\pi \delta \sigma(W^{-1}[P])},$$

wobei P wieder alle primitiven Matrizen vom Typus $P^{(n,r)}$ durchläuft. Die so entstandene unendliche Reihe kann gemäß (13) unmittelbar aus $\varphi(Z; C, D)$ abgeleitet werden, wenn man darin δ durch $\frac{\delta}{2}$ ersetzt. (12) gestattet daher

$$\varphi_p(Z; C, D) \leqq c_4^* e^{-\pi \delta \lambda p^2} \| CZ + D \|^r \tag{18}$$

mit $c_4^* = c_4\left(m, n, \frac{\delta}{2}\right)$ zu schließen. Mit den angegebenen Abschätzungen erhalten wir nun

$$\varphi_p(Z; 0, E) \leqq c_4^* e^{-\frac{\pi \delta}{c_5} p^2} \quad \text{für } s = 0, \tag{19}$$

im Falle $s > 0$ mit $k > r$ dagegen

$$\varphi_p(Z; C, D) \| CZ + D \|^{-k} \leqq c_9 e^{-\frac{\pi \delta c_8}{\sigma(Y[QC_0'])} p^2} \left(\sigma(Y[QC_0'])\right)^{r-k} \tag{20}$$

mit $c_9 = c_4^* c_8^{r-k}$. Da die Funktion $f(x) = e^{-\frac{a}{x}} x^{-g}$ $(x > 0)$ bei konstanten positiven a und g in $x = \frac{a}{g}$ den maximalen Wert $e^{-g}\left(\frac{a}{g}\right)^{-g}$ hat, so folgt aus (20) mit $c_{10} = c_9 \left(\frac{e \pi \delta c_8}{k - r}\right)^{r-k}$ schließlich

$$\varphi_p(Z; C, D) \| CZ + D \|^{-k} \leqq c_{10} p^{-2(k-r)} \quad \text{für } s > 0. \tag{21}$$

Satz. *Die Poincaréschen Reihen n-ten Grades*

$$g_{-k}(Z, T) = \sum_{S \in \vee(T)} e^{2\pi i \sigma(TS[Z])} |CZ + D|^{-k}$$

sind für gerades $k > n + \text{Rang}\, T + 1$ *in jedem Bereich*

$$Y \geqq \frac{1}{m} E, \quad \sigma(X^2) \leqq m$$

absolut und gleichmäßig konvergent.

Nach den Vorbereitungen genügt es, wenn wir unter den angegebenen Voraussetzungen die gleichmäßige Konvergenz von

$$h(Z) = \sum_{\{C,D\}} \sum_{P} e^{-2\pi\delta\sigma(Y_S[P])} \| CZ + D \|^{-k}$$

beweisen. Wegen der absoluten Konvergenz braucht die gleichmäßige Konvergenz nur für irgendeine Anordnung der Glieder bewiesen zu werden. Demgemäß denken wir uns die Paare C, D in irgendeiner Anordnung C_ν, D_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) gegeben. Es ist zu zeigen, daß die Summe

$$\Omega_{p,\nu_0} = \sum_{\substack{\nu \geqq \nu_0 \\ \text{oder} \\ \sigma(P'P) \geqq p^2}} e^{-2\pi\delta\sigma(W^{-1}[P])} \| C_\nu Z + D_\nu \|^{-k}$$

kleiner als eine vorgegebene positive Zahl ε wird, wenn nur $p = p(\varepsilon)$ und $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ unabhängig von Z hinreichend groß gewählt werden. (12), (19) und (20) ergeben, wenn $C_1 = 0$, $D_1 = E$ angenommen wird,

$$\begin{aligned} \Omega_{p,\nu_0} &= \sum_{\nu \geqq \nu_0} \varphi(Z; C_\nu, D_\nu) \| C_\nu Z + D_\nu \|^{-k} + \sum_{\nu < \nu_0} \varphi_p(Z; C_\nu, D_\nu) \| C_\nu Z + D_\nu \|^{-k} \\ &\leqq c_4 \sum_{\nu \geqq \nu_0} \| C_\nu Z + D_\nu \|^{r-k} + c_4^* e^{-\frac{\pi\delta}{c_5} p^2} + \sum_{1 < \nu < \nu_0} c_{10}(C_\nu, D_\nu) p^{-2(k-r)}. \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 2 kann ν_0 so gewählt werden, daß

$$c_4 \sum_{\nu \geqq \nu_0} \| C_\nu Z + D_\nu \|^{r-k} < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Sodann bestimmen wir p bei festgewähltem ν_0 so, daß

$$c_4^* e^{-\frac{\pi\delta}{c_5} p^2} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{1 < \nu < \nu_0} c_{10}(C_\nu, D_\nu) p^{-2(k-r)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Alsdann wird $\Omega_{p,\nu_0} < \varepsilon$, womit der Konvergenzsatz bewiesen ist.

Literatur

[1] H. Braun: Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen, Math. Z. **44** (1939), 387—397.

[2] H. Maaß: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen, Math. Ann. **123** (1951), 125—151.

[3] C. L. Siegel: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116** (1939), 617—657.