Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe

Von *Hans Maaß* in Heidelberg

Vorgelegt von Herrn C. L. Siegel in der Sitzung vom 19. Juni 1964

1. Einleitung

Unter einer Modulform n-ten Grades zur Dimension $-r$ und zum Multiplikatorsystem v ist im Falle $n > 1$ eine komplexwertige Funktion $f(Z)$ zu verstehen, die im Bereich $\mathfrak{H}_n$ der symmetrischen komplexen n-reihigen Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Imaginärteil Y holomorph ist und der Transformationsformel

$$f(S\langle Z\rangle)\,|CZ + D|^{-r} = v(S)\,f(Z) \tag{1}$$

mit

$$S\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

für Matrizen $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ aus der Modulgruppe n-ten Grades Γ_n genügt. Dabei ist

$$|CZ + D|^{-r} = e^{-r\,L(S,Z)} \tag{2}$$

und $L(S, Z)$ ein in $\mathfrak{H}_n$ holomorpher fest gewählter Funktionszweig von $\log|CZ + D|$. Wird

$$I_r(S, Z) = v(S)\,e^{r\,L(S,Z)} \tag{3}$$

gesetzt, so gilt

$$I_r(S_1 S_2, Z) = I_r(S_1, S_2\langle Z\rangle)\,I_r(S_2, Z) \quad \text{für } S_1, S_2 \in \Gamma_n \tag{4}$$

und

$$I_r(-E^{(2n)}, Z) = 1 \qquad (E = \text{Einheitsmatrix}). \tag{5}$$

Diese beiden Beziehungen sollen als kennzeichnend für Multiplikatorsysteme zur Dimension $-r$ angesehen werden. Offenbar ist

$$w(S_1, S_2) = \frac{1}{2\pi i}\{L(S_1 S_2, Z) - L(S_1, S_2\langle Z\rangle) - L(S_2, Z)\} \tag{6}$$

eine von Z unabhängige ganz rationale Zahl. Mit

$$\sigma^{(r)}(S_1, S_2) = e^{2\pi i r\,w(S_1, S_2)} \tag{7}$$

ergeben sich für v die mit (4) und (5) gleichwertigen Beziehungen

(8) $$v(S_1 S_2) = \sigma^{(r)}(S_1, S_2)\, v(S_1)\, v(S_2) \quad \text{für } S_1, S_2 \in \Gamma_n$$

und

(9) $$v(-E^{(2n)}) = e^{-r L(-E^{(2n)}, Z)}$$

oder, wenn wir $L(-E^{(2n)}, Z) = \frac{\pi i}{2}(1 - (-1)^n)$ wählen,

(10) $$v(-E^{(2n)}) = e^{-\frac{\pi i r}{2}(1-(-1)^n)}.$$

Da (8) und (10) im Falle $n > 1$, wie U. Christian [1] gezeigt hat, nur für ganz rationale r Lösungen besitzt, so erweisen sich die möglichen Multiplikatorsysteme zu Γ_n als Abelsche Charaktere der Modulgruppe:

(11) $$v(S_1 S_2) = v(S_1)\, v(S_2) \quad \text{für } S_1, S_2 \in \Gamma_n.$$

Entsprechend der Bedingung

(12) $$v(-E^{(2n)}) = (-1)^{nr}$$

ist v gerade oder ungerade, je nachdem nr gerade oder ungerade ist. Die Abelschen Charaktere von Γ_n definieren Darstellungen der Faktorgruppe von Γ_n nach der Kommutatorgruppe Γ_n'. Demgemäß sind mit Γ_n' auch die Multiplikatorsysteme zu Γ_n bestimmt. Wir werden zeigen, daß

(13) $$(\Gamma_n : \Gamma_n') = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 2, \\ 1 & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

gilt, woraus erhellt, daß nur im Fall $n = 2$ ein von der Identität verschiedener Abelscher Charakter existiert, sofern wir den Fall $n = 1$ außer acht lassen. Es handelt sich dabei, wie wir feststellen werden, um einen geraden Charakter; ihm entspricht ein eindeutig bestimmtes nicht-triviales Multiplikatorsystem zur Gruppe Γ_2.

Auf Grund einer gewissen Matrizenrelation ist einfach einzusehen, daß $(\Gamma_2 : \Gamma_2') \leq 2$ ist. Die Tatsache, daß hier das Gleichheitszeichen gilt, bedeutet offenbar, daß in Γ_2 eine Untergruppe vom Index 2 existiert, die dann notwendig mit Γ_2' identisch ist. Die Existenz einer solchen Untergruppe ist evident, da die Faktorgruppe von Γ_2 nach der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma_2[2]$ zur Stufe 2 bekanntlich [2] mit der vollen Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_6$ von 6 Ziffern isomorph ist:

(14) $$\Gamma_2/\Gamma_2[2] \cong \mathfrak{S}_6.$$

Die Kommutatorgruppe Γ_2' ist daher durch

(15) $$\Gamma_2'/\Gamma_2[2] \cong \mathfrak{A}_6$$

gekennzeichnet, wenn $\mathfrak{A}_6$ die alternierende Permutationsgruppe von 6 Ziffern bezeichnet. Da der Isomorphismus (14) auf Grund der Angaben in [2] nicht unmittelbar beschrieben werden kann, so dürfte die im folgenden ausgeführte Konstruktion einer Untergruppe von Γ_2 vom Index 2, die den Isomorphismus (14) in expliziter Gestalt mitliefert, ein gewisses Interesse beanspruchen.

Ein funktionentheoretischer Beweis für $(\Gamma_2 : \Gamma_2') = 2$ ergibt sich schließlich auch aus der Existenz einer Modulform zu Γ_2 mit nichttrivialem Multiplikatorsystem. Eine solche Form hat man z.B. in der Spitzenform

$$\chi(Z) = \prod_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}} \vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \tag{16}$$

mit

$$\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{g}} e^{\pi i Z[\mathfrak{g}+\mathfrak{a}] + 2\pi i \mathfrak{b}'\mathfrak{g}}. \tag{17}$$

Summiert wird hier über alle ganzen Spalten $\mathfrak{g}$. Die Elemente der konstanten Spalten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind entweder 0 oder $\frac{1}{2}$. Das Produkt (16) ist über alle möglichen derartigen Paare mit $\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \equiv 0 \pmod{\frac{1}{2}}$ zu erstrecken. Da es im Falle $n = 2$ genau 10 solche Paare gibt, so erweist sich $\chi(Z)$ auf Grund der bekannten Transformationseigenschaften von $\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ als eine Modulform der Dimension -5 mit einem von der Identität verschiedenen Multiplikatorsystem.

Für $n > 2$ ergibt sich $\Gamma_n = \Gamma_n'$, indem man alle Matrizen eines speziellen Erzeugendensystems von Γ_n in gewisser Weise aus Kommutatoren von Γ_n zusammensetzt.

2. Bestimmung der Kommutatorgruppe Γ_n'

Es seien $E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}^{(n)}$ Matrizeneinheiten, so daß eine n-reihige Matrix $\Xi = (\xi_{\mu\nu})$ mit variablen Elementen in der Form $\Xi = \sum_{\mu,\nu} \xi_{\mu\nu} E_{\mu\nu}$ dargestellt werden kann. Für $\mu < \nu$ und $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird

$$Q_{\mu\nu}(L) = a E_{\mu\mu} + b E_{\mu\nu} + c E_{\nu\mu} + d E_{\nu\nu} \tag{18}$$

und

$$R_{\mu\nu}(L) = E^{(n)} + Q_{\mu\nu}(L - E^{(2)}) \tag{19}$$

gesetzt. Da $L \to Q_{\mu\nu}(L)$ ein Ringhomomorphismus ist, bestätigt man sofort

$$R_{\mu\nu}(L_1 L_2) = R_{\mu\nu}(L_1) R_{\mu\nu}(L_2),$$
$$R_{\mu\nu}(L_1) - R_{\mu\nu}(L_2) = Q_{\mu\nu}(L_1 - L_2).$$

Mit V ist offenbar auch $R_{\mu\nu}(V)$ unimodular.

Lemma 1. *Für ganze symmetrische Matrizen $S = S^{(n)} = (s_{\mu\nu})$ gilt*

$$\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_n',$$

falls $n \geqq 3$ oder zugleich $n = 2$ und $\sum_{\mu \leqq \nu} s_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod 2$ ist.

Beweis. Die mit $W = VSV' - S$ gebildete Matrix $\begin{pmatrix} E & W \\ 0 & E \end{pmatrix}$ stellt, wenn $S = S' = S^{(n)}$ ganz und $V = V^{(n)}$ unimodular ist, einen Kommutator von Γ_n dar:

$$\begin{pmatrix} E & W \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -S \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{20}$$

und ist daher in Γ'_n gelegen. Wir erhalten speziell

$$W = \begin{cases} Q_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Q_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ Q_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{für } S = \begin{cases} R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \qquad V = \begin{cases} R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ R_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Alle diese Matrizen $W = (w_{\mu\nu})$ genügen der Bedingung $\sum_{\mu \leqq \nu} w_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod 2$. Wir zeigen, daß alle ganzen symmetrischen $S = (s_{\mu\nu})$, für die ebenfalls $\sum_{\mu \leqq \nu} s_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod 2$ ist, in der Form

$$S = \sum_{1 \leqq \mu < \nu \leqq n} a_{\mu\nu} Q_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{1 \leqq \mu < n} b_\mu Q_{\mu\mu+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\, Q_{12}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

mit ganz rationalen $a_{\mu\nu}, b_\mu, c$ dargestellt werden können. Es ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu} &= a_{\mu\nu} && \text{für } 1 \leqq \mu < \nu - 1 \leqq n-1, \\ s_{12} &= a_{12} + b_1 + 2c, && \\ s_{\mu\mu+1} &= a_{\mu\mu+1} + b_\mu && \text{für } 1 < \mu < n, \\ s_{11} &= a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n}, && \\ s_{\mu\mu} &= a_{\mu\mu+1} + a_{\mu\mu+2} + \cdots + a_{\mu n} + b_{\mu-1} && \text{für } 1 < \mu < n, \\ s_{nn} &= b_{n-1}. && \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} b_1 + 2c &= -s_{11} + s_{12} + \cdots + s_{1n}, && \\ b_\mu - b_{\mu-1} &= -s_{\mu\mu} + s_{\mu\mu+1} + \cdots + s_{\mu n} && \text{für } 1 < \mu < n, \\ -b_{n-1} &= -s_{nn}, && \end{aligned}$$

mithin

$$2c \equiv \sum_{\mu \leqq \nu} s_{\mu\nu} \pmod 2,$$

woraus die Auflösbarkeit wie auch die Ganzzahligkeit der Koeffizienten von (21) erhellt. Eine Teilaussage von Lemma 1 ist damit bewiesen.

Wir brauchen für $n \geqq 3$ nur noch ein $W = (w_{\mu\nu}) = VSV' - S$ ($S = S'$ ganz, V unimodular) mit $\sum_{\mu \leqq \nu} w_{\mu\nu} \equiv 1 \pmod 2$ nachzuweisen, um den Beweis von Lemma 1 zu vollenden. Sind V_0, S_0 Matrizen der gewünschten Art für $n = 3$, so genügen

$$V = \begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & E^{(n-3)} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & E^{(n-3)} \end{pmatrix}$$

den Bedingungen für $n > 3$. Wir wählen

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$W_0 = V_0 S_0 V_0' - S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine für unsere Zwecke brauchbare Matrix.

Lemma 2. *Γ_n' enthält*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} J & E \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad \textit{mit } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{im Falle } n = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{im Falle } n \geqq 2,$$

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad \textit{für ganzes } S' = S \textit{ mit } S^2 = E \qquad \textit{im Falle } n \geqq 3.$$

Beweis. Für eine symmetrische n-reihige Matrix S mit $S^2 = E$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\}^3 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & -S \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Ist S ganz, so ergibt sich wegen Lemma 1 die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} (\Gamma_n') \tag{23}$$

Im Falle $n \geqq 2$ ist $\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}$, daher auch $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ in Γ'_n gelegen. $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \Gamma'_2$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist eine Folge von $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma'_2$. Ferner gilt

$$\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} (\Gamma'_n), \qquad \text{also} \begin{pmatrix} S & E \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \Gamma'_n;$$

d. i. im Falle $n = 2$, $S = J$ eine weitere Behauptung von Lemma 2. Für $n > 2$ zieht $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma'_n$ schließlich $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \Gamma'_n$ nach sich, q. e. d.

Um die Frage zu klären, wann $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$ in Γ'_n liegt, müssen wir im Falle $n = 2$ auf einige bekannte Tatsachen Bezug nehmen. Allgemein sei H_n die Gruppe der n-reihigen unimodularen Matrizen und Δ_n die Untergruppe von H_n, die aus den U mit $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma'_n$ besteht. H'_n bezeichne die Kommutatorgruppe von H_n; sie ist offenbar eine Untergruppe von Δ_n. Man weiß, daß Γ_1/Γ'_1 eine zyklische Gruppe der Ordnung 12 ist und die Zerlegung

$$\Gamma_1 = \bigcup_{\nu=0}^{11} \Gamma'_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\nu} \tag{24}$$

gilt. Demzufolge ist

$$\mathsf{N} = \bigcup_{\nu=0}^{5} \Gamma'_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\nu} \tag{25}$$

die einzige Untergruppe von Γ_1 vom Index 2. Man hat

$$\Gamma_1 = \mathsf{N} \cup \mathsf{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{H}_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathsf{H}_2 = \bigcup_{\mu,\nu=0}^{1} \mathsf{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\nu}. \tag{26}$$

Γ_1 ist Normalteiler von H_2, also ist N auch Normalteiler von H_2. H_2/N ist eine Abelsche Gruppe, da der Kommutator

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in N liegt. Folglich ist $\mathsf{H}'_2 \subset \mathsf{N}$. Andererseits ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und Γ'_1, also auch N in H'_2 enthalten, woraus

$$\mathsf{H}'_2 = \mathsf{N}, \quad (\mathsf{H}_2 : \mathsf{H}'_2) = 4 \tag{27}$$

erhellt.

Lemma 3. *Es ist*

$$(\mathsf{H}_2 : \Delta_2) \leqq 2\,, \quad \mathsf{H}_2 = \Delta_2 \cup \Delta_2 J\,, \quad \Delta_n = \mathsf{H}_n \ \textit{für}\ n \geqq 3\,.$$

Beweis. 1. Δ_2 enthält H_2' und nach Lemma 2 auch $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Aus

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \Gamma_1' \subset \mathsf{N} = \mathsf{H}_2' \subset \Delta_2$$

folgt also

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \Delta_2 \quad \text{oder} \quad \Delta_2 J = \Delta_2 \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(26) ergibt nun $\mathsf{H}_2 = \Delta_2 \cup \Delta_2 J$, mithin $(\mathsf{H}_2 : \Delta_2) \leqq 2$. Später werden wir sehen, daß hier das Gleichheitszeichen gilt.

2. Es sei $n \geqq 3$. H_n wird erzeugt von $R_{\mu\nu}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $(\mu < \nu)$, $R_{12}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $R_{12}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Diese Matrizen sind, abgesehen von der letzten, vom Typus $S' = S$, $S^2 = E$, liegen also nach Lemma 2 in Δ_n. Wegen $\mathsf{H}_n' \subset \Delta_n$ genügt es also zu zeigen, daß $R_{12}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ in H_n' liegt. Wir wählen

$$U_0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad V_0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

setzen

$$U = \begin{pmatrix}U_0 & 0\\ 0 & E^{(n-3)}\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix}V_0 & 0\\ 0 & E^{(n-3)}\end{pmatrix}$$

und erhalten

$$U\,V\,U^{-1}\,V^{-1} = R_{12}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathsf{H}_n'\,.$$

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Die Modulgruppe Γ_n wird bekanntlich [3] von den Matrizen $\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}E & S\\ 0 & E\end{pmatrix}$ $(S' = S$ ganz$)$, $\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & V'^{-1}\end{pmatrix}$ (V unimodular) erzeugt. Die Lemmata 1, 2, 3 ergeben damit $\Gamma_n = \Gamma_n'$ für $n \geqq 3$. Im Falle $n = 2$ hingegen kann nur geschlossen werden, daß

$$M \equiv \begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & V'^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & S\\ 0 & E\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & J\end{pmatrix}^{\mu}\begin{pmatrix}E & J\\ 0 & E\end{pmatrix}^{\nu} \equiv \begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & J\end{pmatrix}^{\mu+\nu} (\Gamma_2') \quad \text{für } M \in \Gamma_2$$

mit geeigneten V, S sowie μ, ν gilt, woraus jedenfalls

$$(\Gamma_2 : \Gamma_2') \leqq 2$$

folgt. Es kommt jetzt also nur noch darauf an, eine Untergruppe vom Index 2 nachzuweisen.

Wir definieren einen Modul $\mathfrak{O}$ von zweireihigen ganzen Matrizen $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ durch

(28) $$\mathfrak{O} = \{S \mid S' \equiv S \pmod 2,\ s_{11} + s_{12} + s_{22} \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Der Restklassenbereich $\mathfrak{O}$ mod 2, in Zeichen: $\mathfrak{O}/(2)$, wird durch die Matrizen

(29) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2$$

repräsentiert. Offenbar ist $\mathfrak{O}/(2)$ ein aus vier Elementen bestehender Körper. Wir bezeichnen mit K die von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

mit $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und symmetrischen $S \in \mathfrak{O}$ über $\Gamma_2[2]$ erzeugte Gruppe. Da S mod 2 alle Elemente von $\mathfrak{O}/(2)$ durchläuft und V mod 2 die multiplikative Gruppe in $\mathfrak{O}/(2)$ erzeugt, so ist $\mathsf{K}/\Gamma_2[2]$ mit der speziellen linearen Gruppe zweiten Grades über $\mathfrak{O}/(2)$, die aus allen Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{O}/(2)$$

besteht, isomorph. Hieraus folgt nach einfacher Abzählung $(\mathsf{K} : \Gamma_2[2]) = 60$ sowie eine Kennzeichnung der Matrizen in K:

(30) $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathsf{K} \Leftrightarrow M \in \Gamma_2;\quad A, B, C, D \bmod 2 \in \mathfrak{O}/(2).$$

Mit Hilfe der (in Γ_2' gelegenen) Matrix

$$L = \begin{pmatrix} J & E \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \quad \left(J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

konstruieren wir eine Gruppe Λ, welche K als Untergruppe vom Index 6 enthält. Wir setzen

$$M_S = L \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} L^{-1} \quad \text{für symmetrische } S \in \mathfrak{O}$$

und definieren Λ als die Vereinigung der Restkassen

(31) $$\mathsf{K} L^\mu \ (\mu = 0, 1, 2), \qquad \mathsf{K} M_S \left(S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Restklassen paarweise verschieden sind und bei Rechtsmultiplikation mit Elementen aus Λ nur untereinander permutiert werden. Hierbei beachte man, daß

$$L^3 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad M_{S+S^*} = M_S M_{S^*}$$

ist. Wegen $L \notin \mathsf{K}$ sind K, $\mathsf{K}L$, $\mathsf{K}L^2$ paarweise verschieden. Wegen

$$M_S = \begin{pmatrix} E - SJ & S \\ -JSJ & E + JS \end{pmatrix} \notin \mathsf{K} \quad \text{für } S \not\equiv 0 \pmod 2$$

sind

$$\mathsf{K} M_S \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ebenfalls paarweise verschieden. Schließlich zeigt

$$L M_S^{-1} = \begin{pmatrix} -E & J \\ -J - JSJ & JS \end{pmatrix} \notin \mathsf{K}, \qquad L^2 M_S^{-1} = \begin{pmatrix} -SJ & S - J \\ J & -E \end{pmatrix} \notin \mathsf{K},$$

daß alle sechs Restklassen paarweise verschieden sind. Um die Gruppeneigenschaft von Λ zu prüfen, genügt es wegen der Normalteilereigenschaft von $\Gamma_2[2]$, wenn wir die Wirkung untersuchen, welche die Rechtsmultiplikation der Restklassen mit den Matrizen eines Erzeugendensystems von Λ über $\Gamma_2[2]$ hervorruft. Als geeignetes Erzeugendensystem bietet sich

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}, \quad L, \quad M_T$$

mit $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ an. Mit Hilfe des Kriteriums (30) prüft man die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\mathsf{K} L^\mu \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{K} L^{2\mu}, && \mathsf{K} M_S \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{K} M_{S[J]}, \\
&\mathsf{K} L^\mu \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} = \mathsf{K} L^\mu, && \mathsf{K} M_S \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} = \mathsf{K} M_{S[V^{-1}]}, \\
(32) \qquad &\mathsf{K} L^\mu L = K L^{\mu+1}, && \mathsf{K} M_S L = \mathsf{K} M_S, \\
&\mathsf{K} L^\mu M_T = \begin{cases} \mathsf{K} M_T \; (\mu \equiv 0(3)) \\ \mathsf{K} L^\mu \; (\mu \not\equiv 0(3)) \end{cases}, && \mathsf{K} M_S M_T = \mathsf{K} M_{S+T}.
\end{aligned}$$

Damit ist Λ als Gruppe erkannt. Wir ordnen den sechs Restklassen in der Reihenfolge (31) die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu. Jeder Matrix $M \in \Lambda$ entspricht dann eine Permutation $\pi(M)$ der sechs Ziffern. Die Abbildung $M \to \pi(M)$ definiert einen Homomorphismus von $\Lambda/\Gamma_2[2]$ in die $\mathfrak{S}_6$. Insbesondere stellt man fest

$$\begin{aligned}
&\pi \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = (2, 3)(5, 6), && \pi \left(M_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \right) = (1, 4)(5, 6), \\
(33) \qquad &\pi(L) = (1, 2, 3), && \pi \left(M_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \right) = (1, 5)(4, 6), \\
&\pi \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} = (4, 5, 6), && \pi \left(M_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \right) = (1, 6)(4, 5).
\end{aligned}$$

Das Bild von $\Lambda/\Gamma_2[2]$ in der $\mathfrak{S}_6$ ist also eine gerade Permutationsgruppe. Sie ist mit der $\mathfrak{A}_6$ identisch, da sie transitiv und primitiv ist und einen Dreierzyklus enthält. Da $\mathfrak{A}_6$ und $\Lambda/\Gamma_2[2]$ dieselbe Ordnung haben, so ist $\Gamma_2[2]$ der Kern des Homomorphismus $M \to \pi(M)$, woraus $\Lambda/\Gamma_2[2] \simeq \mathfrak{A}_6$ erhellt.

Man erkennt leicht, daß $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ nicht in Λ liegt. Die von $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ über Λ erzeugte Gruppe enthält $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & J \\ 0 & E \end{pmatrix}$, daher $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$ für alle ganzen $S' = S$, schließlich aber auch $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$ mit unimodularem U; denn jede solche Matrix ist mod 2 darstellbar in der Form

$$U \equiv V^{\mu} J^{\nu} \pmod 2$$

so daß

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}^{\mu} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}^{\nu} \pmod 2 \tag{34}$$

gilt. Mithin ist

$$\Gamma_2 = \Lambda \cup \Lambda \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad \Gamma_2' = \Lambda, \ (\Gamma_2 : \Gamma_2') = 2. \tag{35}$$

Wir wollen nun noch die Abbildung $M \to \pi(M)$ zu einem Homomorphismus von Γ_2 ergänzen. Die Transformation $M \to \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ bewirkt den folgenden Automorphismus in Λ:

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} V[J] & 0 \\ 0 & V'^{-1}[J] \end{pmatrix},$$

$$L \to L, \quad M_S \to M_{S[J]}.$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} V[J] & 0 \\ 0 & V'^{-1}[J] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} \pmod 2.$$

Die Abbildung, welche die entsprechenden Permutationen erfahren, ist von derselben Wirkung wie eine Transformation dieser Permutationen mit der Transposition (5, 6). Der Homomorphismus von Λ wird daher durch

$$\pi\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = (5, 6) \tag{36}$$

in der gewünschten Weise fortgesetzt. Man erhält $\Gamma_2/\Gamma_2[2] \cong \mathfrak{S}_6$. Damit haben wir insbesondere das zitierte Resultat von C. Jordan bestätigt.

Der Abelsche Charakter v, der Γ_2/Γ_2' isomorph abbildet, ist durch die Werte

$$v\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = 1\,, \qquad v\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} = e^{\pi i (s_0 + s_1 + s_2)}\,,$$
$$v\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} = e^{\pi i \{(1+u_0+u_2)(1+u_1+u_3)+u_0 u_2\}} \tag{37}$$

eindeutig bestimmt. Hierin ist $S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ eine beliebige ganze symmetrische Matrix und $U = \begin{pmatrix} u_0 & u_3 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ eine beliebige unimodulare Matrix.

Literatur

[1] U. Christian: Über Hilbert-Siegelsche Modulformen und Poincarésche Reihen, Math. Ann. **148** (1962), 257—307.

[2] C. Jordan: Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1957, speziell Nr. 335.

[3] E. Witt: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades, Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg **14** (1941), 323—337.

Zusatz bei der Korrektur: Erst jetzt wurde mir bekannt, daß die Abelschen Charaktere der Siegelschen Modulgruppe bereits von I. Reiner bestimmt worden sind, wenngleich mit andern Zielen. Man vergleiche hierzu

I. Reiner: Real linear characters of the symplectic modular group, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 987—990.