Maaß

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE TÜBINGEN — **R. NEVANLINNA** HELSINKI — **E. SCHMIDT** BERLIN

F. K. SCHMIDT JENA — **I. SCHUR** BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

Sonderabdruck aus Band 43, Heft 5

H. Maaß

Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1938

Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen.

Von

H. Maaß in Hamburg.

Die automorphen Formen von mehreren Variablen verdienen weitgehendes Interesse, da man einerseits durch Quotientenbildung alle automorphen Funktionen aus ihnen erhält und da sie andererseits das geeignete Hilfsmittel darstellen, mit dem man eine ganze Reihe von zahlentheoretischen Problemen erfolgreich anzugreifen vermag. So führt z. B. die Frage nach der Darstellbarkeit ganzer Zahlen eines total reellen Zahlkörpers Z vom Absolutgrad n durch eine total positiv definite quadratische Form Q von k Variablen und ganzzahligen Koeffizienten aus Z auf die Betrachtung von Formen der Dimension $-k/2$; man bilde nämlich die zu Q gehörige ϑ-Reihe, die bekanntlich eine solche Form in n-Variablen darstellt. Man kann also auf Formen gebrochener Dimension nicht verzichten. Darüber hinaus erwächst aus dieser Erkenntnis das Bedürfnis nach einer systematischen Begründung einer Theorie der Formen in mehreren Variablen von beliebiger Dimension. Die vorliegende Untersuchung stellt einen ersten Versuch in dieser Richtung dar. Bei diesem Vorhaben kommt mir der Umstand zustatten, daß ich mich — soweit es sich um die Entwicklung des analytischen Apparats handelt — auf die Peterssonschen Arbeiten[1]) stützen kann, in denen eine Theorie der automorphen Formen in einer Variablen im wesentlichen vollständig entwickelt ist. Da die allgemeinen Schwierigkeiten, die sich bei der Untersuchung von analytischen Funktionen von mehreren Variablen einstellen, bereits bei der Variablenzahl 2 in vollem Umfang zur Geltung kommen, so scheint mir eine Beschränkung auf diesen Spezialfall gerechtfertigt. Es handelt sich also um die Konstruktion von Formen zu einer beliebigen Untergruppe der (engeren) Hilbertschen Modulgruppe eines reell quadratischen Zahlkörpers $Z = R(\sqrt{D})$ oder allgemeiner: zu einer beliebigen im Bereich $\Im\mathrm{m}\,\tau > 0$, $\Im\mathrm{m}\,\tau' < 0$ diskontinuierlichen Gruppe reeller unimodularer simultaner Substitutionen

$$(1) \qquad \tau \to \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \tau' \to \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'},$$

[1]) H. Petersson, Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen, Math. Annalen **103** (1930), S. 369, im folgenden zitiert mit A; Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie, Hamburger Abhandlungen, Bd. 8 (1930), S. 215, im folgenden zitiert mit E.

unter denen auch Paare von parabolischen Substitutionen vorkommen mögen. Von dem eigentlichen Ziel, ein vollständiges System von Formen explizit anzugeben, aus denen man jede vorgegebene Form linear zusammensetzen kann, sind wir natürlich noch weit entfernt. Wir sind jedoch imstande, das Peterssonsche Konstruktionsprinzip, welches im Falle einer Variablen ein im genannten Sinne vollständiges Formensystem liefert (vgl. A), auf zwei Variable zu übertragen. Man erhält eine Reihe neuartiger noch nicht untersuchter Formen. Aus der Fülle der Konstruktionsaufgaben, die sich jetzt darbieten, greifen wir nur eine spezielle heraus. Wir konstruieren nämlich zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(\nu)$ der Hilbertschen Modulgruppe zur Idealstufe $\nu \equiv 0$ (4) ein System von ganzen Formen G_{-r} halbzahliger Dimension $-r = -k/2$ ($k \geqq 3$) mit ϑ-Multiplikatoren derart, daß eine beliebige Form vom gleichen Typus mit Hilfe der G_{-r} bis auf eine ganze Form reduziert werden kann, welche in allen parabolischen Fixpunkten von $\Gamma(\nu)$ verschwindet. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die Idealklassenzahl von Z gleich 1, die Diskriminante D von Z kongruent 5 mod 8 und im Falle $k = 3$ die Norm der Grundeinheit von Z gleich -1 ist. Die Anzahl der linear unabhängigen unter den Formen G_{-r} (fester Dimension) ist gleich der Zahl der nach $\Gamma(\nu)$ inäquivalenten parabolischen Fixpunkte der $\Gamma(\nu)$. Diese Aussage ist für die entsprechenden Formen der Dimension $-3/2$ in einer Variablen, die ich in einer früheren Arbeit[2]) untersucht habe, falsch, was darauf zurückzuführen ist, daß die Residuen einer ganzen Form (in einer Variablen) der Dimension $-3/2$ mit ϑ-Multiplikatoren in den parabolischen Fixpunkten nicht unabhängig vorgeschrieben werden können. Multipliziert man nämlich eine solche Form mit einer beliebigen ganzen Form der Dimension $-1/2$ mit ϑ-Multiplikatoren, so erhält man eine ganze Form der Dimension -2 mit den Multiplikatoren 1, und die Summe der Residuen dieser Form in einem System von nichtäquivalenten parabolischen Fixpunkten muß verschwinden.

Die sich anschließenden Betrachtungen beanspruchen ein wesentlich zahlentheoretisches Interesse. Es handelt sich um die Partialbruchentwicklung der von Herrn Siegel eingeführten analytischen Geschlechtsinvariante einer total positiv definiten ternären quadratischen Form Q[3]), wobei es, wie auch bei den oben genannten Formen $G_{-\frac{3}{2}}$ bedeutsame Konvergenzschwierigkeiten zu überwinden gilt. Bei der Aufstellung der Partialbruchreihen machen

[2]) H. Maaß, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen, Hamburger Abhandlungen Bd. 12, S. 133, im folgenden zitiert mit K1.; vgl. auch die Einleitung zu dieser Arbeit, die einen Bericht über die Resultate der vorliegenden Untersuchung enthält.

[3]) C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Mathematics, Vol. 36, 37, 38.

wir uns den folgenden allgemeinen Sachverhalt zunutze: Es sei $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \tau')$ eine ganze Form der Dimension $-r$ mit den Multiplikatoren v zu einer Untergruppe Γ_0 der Hilbertschen Modulgruppe eines reell quadratischen Zahlkörpers $Z = R(\sqrt{D})$. Die Koeffizienten c_∞, c_α $(\alpha \subset Z)$ der Eisensteinreihe

$$\psi(\tau) = c_\infty + \sum_{\alpha \subset Z} \frac{c_\alpha}{N(\tau-\alpha)^r} \text{ [4]}, \tag{2}$$

wobei $\log(\tau - \alpha)$ und $\log(\tau' - \alpha')$ Hauptwerte bedeuten, seien so bestimmt, daß bei senkrechter Annäherung von τ, τ' an α, α'

$$\lim_{\tau \to \alpha} \left\{ \varphi(\tau) - \frac{c_\alpha}{N(\tau-\alpha)^r} \right\} = 0,$$

und bei senkrechter Annäherung von τ, τ' an $i\infty$, $i\infty$

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = c_\infty$$

gilt. Dann ist die Partialbruchreihe $\psi(\tau)$ — sofern sie konvergiert — eo ipo eine ganze Form zu Γ_0 vom gleichen Typus wie $\varphi(\tau)$. Bedeutet

$$Q(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{k} q_{\nu\mu} x_\nu x_\mu, \qquad \mathfrak{Q} = (q_{\nu\mu}) = (q_{\mu\nu})$$

eine total positiv definite ganzzahlige primitive quadratische Form, so finden wir zu der ϑ-Reihe

$$f(\mathfrak{Q}; \tau, \tau') = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_k \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{Q(\mu_1, \ldots, \mu_k)\tau}{\sqrt{D}}}$$

$$(\mathfrak{o} = \text{Maximalordnung von } Z)$$

eine Partialbruchreihe $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ vom Typus (2). Entwickelt man $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ in eine „Potenzreihe" der Gestalt

$$a_0 + \sum_{\substack{\mu \subset \mathfrak{o} \\ \mu \gg 0}} a_\mu e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{D}}},$$

so erkennt man aus der Struktur der Koeffizienten a_μ, daß $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ mit der von Herrn Siegel definierten Geschlechtsinvariante zur Form $\mathfrak{Q}$ identisch ist. In dem Fall, der hier besonders interessiert, daß es sich um eine ternäre Form handelt, konvergiert die Partialbruchreihe $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ nicht mehr. Man führt dann in geläufiger Weise eine Hilfsvariable s ein und definiert den Wert der Partialbruchreihe als den Wert der in s analytischen Funktion $F(\mathfrak{Q}; \tau, s)$

[4]) Beim Gebrauch der Spur- und Normzeichen: S, N halte ich mich an die traditionellen Festsetzungen; so ist z. B. $N(\tau - \alpha)^r = (\tau - \alpha)^r (\tau' - \alpha')^r$, wobei α' die konjugierte Zahl zu α bedeutet.

im Punkte $s = 0$. Der Nachweis der analytischen Fortsetzbarkeit von $F(\mathfrak{Q}; \tau, s)$ bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ erfordert eine etwas langwierige Rechnung. Die Schwierigkeiten bei der Konstruktion der oben genannten Formen $G_{-\frac{3}{2}}$ sind von der gleichen Art.

Herrn Petersson danke ich für freundliche Ratschläge und für das Interesse, welches er dieser Untersuchung entgegenbrachte.

§ 1.

Faktorsysteme in zwei Variablen. Das ϑ-Multiplikatorsystem.

Wir verschaffen uns die Hilfsmittel, die es ermöglichen, Formen nichtganzer Dimension in zwei Variablen zu konstruieren. Als Vorbild dient uns die Peterssonsche Theorie der automorphen Formen reeller Dimension (A). Zugrunde gelegt sei ein reell quadratischer Zahlkörper $Z = R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D. $\mathfrak{o}$ bezeichne den Bereich der ganzen Zahlen aus Z. Wenn $\mathfrak{N}$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$, dann bildet die Menge der simultanen Substitutionen

$$(3) \qquad \tau \to \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \tau' \to \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'} \text{ [5]},$$

mit

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (\mathfrak{N})$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(\mathfrak{N})$ zur Idealstufe $\mathfrak{N}$. Insbesondere ist $\Gamma(1)$ die engere Hilbertsche Modulgruppe. Die Substitution (3) werde repräsentiert durch das Schema

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Eine im Bereich $\mathfrak{Im}\ \tau > 0$, $\mathfrak{Im}\ \tau' < 0$ eindeutige und analytische Funktion $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \tau')$ heißt eine Modulform der Dimension $-r$ mit dem Multiplikatorsystem v zur Gruppe Γ_0 $(\subset \Gamma(1))$, wenn für alle Substitutionen $S \subset \Gamma_0$

$$\varphi(S\tau) = v(S)\, N(\gamma\tau + \delta)^r\, \varphi(\tau), \quad \underline{S} = (\gamma, \delta)$$

gilt. Die Funktionszweige

$$N(\gamma\tau + \delta)^r = (\gamma\tau + \delta)^r\, (\gamma'\tau' + \delta')^r$$

ein für allemal zu fixieren, ist unsere erste Aufgabe. Seien c, d irgend zwei reelle Zahlen, die nicht zugleich verschwinden.

---

[5]) Zu $\omega \subset Z$, sei ω' die konjugierte Zahl.

1. $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$. Dann definieren wir $(c\tau + d)^r$ folgendermaßen:

$$(c\tau + d)^r = e^{r\log(c\tau + d)},$$

$$\log(c\tau + d) = \log|c\tau + d| + i\arg(c\tau + d),$$

$$\arg(c\tau + d) = \begin{cases} \arg\left(\tau + \frac{d}{c}\right) - \arg c & \text{für } c \neq 0, \\ \arg d & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

$$\arg d = \frac{1 - \operatorname{sgn} d}{2}\pi,$$

$$0 < \arg\left(\tau + \frac{d}{c}\right) < \pi.$$

Es gilt daher

$$(c\tau + d)^r = |c|^r\left(\tau + \frac{d}{c}\right)^r e^{\pi i r\frac{\operatorname{sgn} c - 1}{2}} \qquad \text{für } c \neq 0,$$

$$d^r = |d|^r e^{-\pi i r\frac{\operatorname{sgn} d - 1}{2}} \qquad \text{für } c = 0,$$

(in Übereinstimmung mit den Festsetzungen in A).

2. $\mathfrak{Im}\,\tau' < 0$. Dann sei

$$(c\tau' + d)^r = e^{r\log(c\tau' + d)},$$

$$\log(c\tau' + d) = \log|c\tau' + d| + i\arg'(c\tau' + d),$$

$$\arg'(c\tau' + d) = \begin{cases} \arg\left(\tau' + \frac{d}{c}\right) - \arg' c & \text{für } c \neq 0, \\ \arg' d & \text{für } c = 0, \end{cases}$$

$$\arg' d = -\frac{1 - \operatorname{sgn} d}{2}\pi,$$

$$-\pi < \arg\left(\tau' + \frac{d}{c}\right) < 0,$$

also gilt

$$(c\tau' + d)^r = |c|^r\left(\tau' + \frac{d}{c}\right)^r e^{-\pi i r\frac{\operatorname{sgn} c - 1}{2}} \qquad \text{für } c \neq 0,$$

$$d^r = |d|^r e^{\pi i r\frac{\operatorname{sgn} d - 1}{2}} \qquad \text{für } c = 0.$$

Die Definition von d^r hängt also noch davon ab, ob ich in der oberen oder unteren Halbebene bin. Darauf ist zu achten.

Sind γ, δ zwei nicht zugleich verschwindende Zahlen aus Z, so resultiert also:

$$(4) \qquad \begin{aligned} N(\gamma\tau + \delta)^r &= |N\gamma|^r N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^r e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\gamma\sqrt{D}} && \text{für } \gamma \neq 0, \\ N\delta^r &= |N\delta|^r e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\delta\sqrt{D}} && \text{für } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Für zwei beliebige reelle, unimodulare Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\underline{M} \cdot S = (m_1^*, m_2^*),$$

definieren wir die Symbole $\sigma^{(r)}(M, S)$ und $\sigma_1^{(r)}(M, S)$ durch

$$(m_1 S \tau + m_2)^r = \sigma^{(r)}(M, S) \frac{(m_1^* \tau + m_2^*)^r}{(c \tau + d)^r} \qquad (\Im \tau > 0),$$

$$(m_1 S \tau' + m_2)^r = \sigma_1^{(r)}(M, S) \frac{(m_1^* \tau' + m_2^*)^r}{(c \tau' + d)^r} \qquad (\Im \tau' < 0).$$

Ihre Berechnung erfolgt auf Grund der Formeln:

$$\sigma^{(r)}(M, S) = e^{2 \pi i r w(M, S)}, \qquad \sigma_1^{(r)}(M, S) = e^{2 \pi i r w_1(M, S)}\text{[6]},$$

$$\arg\,(m_1 S \tau + m_2) + \arg\,(c\tau + d) - \arg\,(m_1^* \tau + m_2^*) = 2 \pi w\,(M, S),$$
$$\arg'\,(m_1 S \tau' + m_2) + \arg'\,(c\tau' + d) - \arg'\,(m_1^* \tau' + m_2^*) = 2 \pi w_1(M, S).$$

Für w und w_1 kommen offenbar nur die Werte $0, \pm 1$ in Frage. Aus

$$\arg\,(c\tau + d) + \arg'\,(c\bar{\tau} + d) = 0$$

erhellt, daß

$$w\,(M, S) + w_1(M, S) = 0.$$

w_1 ist also zu entbehren. Sind M, S Matrizen über Z, so erhält man schließlich für das Faktorensystem $\sigma_Z^{(r)}(M, S)$, definiert durch

$$N\,(m_1 S \tau + m_2)^r = \sigma_Z^{(r)}(M, S) \frac{N\,(m_1^* \tau + m_2^*)^r}{N\,(c \tau + d)^r}, \tag{5}$$

die Darstellung

$$\sigma_Z^{(r)}(M, S) = e^{2 \pi i r S\,\{w(M, S)\,\mathrm{sgn}\,\sqrt{D}\}} \tag{6}$$

($S\,\{w\,(M, S)\,\mathrm{sgn}\,\sqrt{D}\} = w\,(M, S) - w\,(M', S')$, S' ist elementweise konjugiert zu S).

Speziell für $r \equiv \frac{1}{2}\,(1)$ folgt aus (6)

$$\sigma_Z(M, S) = \sigma_Z^{\left(\frac{1}{2}\right)}(M, S) = e^{\pi i S w(M, S)} = N \sigma^{\left(\frac{1}{2}\right)}(M, S).$$

Die Werte für $\sigma^{\left(\frac{1}{2}\right)}(M, S)$ entnimmt man der Tabelle in A, S. 378.

Für das Multiplikatorsystem v einer Form φ zu Γ_0 sind jetzt

$$v\,(L_1 L_2) = \sigma_Z^{(r)}(L_1 L_2)\,v\,(L_1)\,v\,(L_2), \quad L_i \subset \Gamma_0 \tag{7}$$

beweisbare Relationen. Es erhebt sich jetzt die Frage, ob es umgekehrt zu einem System v mit den Eigenschaften (7) Formen gibt, und wie man sie konstruiert. Mit einem speziellen Problem dieser Art werden wir uns beschäftigen. Wenn $\varphi\,(\tau)$ eine Form der Dimension $-r$ zur Gruppe Γ_0 mit dem Multiplikatorsystem v, so überzeugt man sich leicht, daß die mit $S \subset \Gamma(1)$ transformierte Form

$$\frac{\varphi\,(S\,\tau)}{N\,(\gamma\,\tau + \delta)^r} = \psi\,(\tau), \qquad \underline{S} = (\gamma, \delta),$$

[6] Betreffs der Werteverteilung von $w\,(M, S)$ verweise ich auf: H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, § 2, Satz 4. Math. Annalen 115 (1937), S. 23.

eine Form der Dimension $-r$ zur Gruppe $S^{-1}\Gamma_0 S$ mit dem transformierten Multiplikatoren

(8) $$v^S(L) = v(S L S^{-1}) \cdot \frac{\sigma_Z^{(r)}(S L S^{-1}, S)}{\sigma_Z^{(r)}(S, L)} \qquad \text{für } L \subset S^{-1}\Gamma_0 S$$

darstellt. Wir berechnen jetzt das Multiplikatorsystem der ϑ-Reihe

$$\vartheta(\tau) = \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \tau}{\sqrt{D}}}.$$

Der Vollständigkeit halber untersuchen wir das Verhalten von $\vartheta(\tau)$ und der transformierten Formen bei allen Substitutionen der Gruppe $\Gamma(1)$, genauer: bei einem unendlichen Erzeugendensystem von $\Gamma(1)$. Dabei wird (bis zum Schluß des Paragraphen)

(8) $$D \equiv 5 \quad (8)$$

vorausgesetzt. Für zwei beliebige ganze Zahlen a, b betrachten wir die Funktionen

(9) $$\psi_{a,b}(\tau) = \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} (-1)^{S \frac{b\mu}{\sqrt{D}}} e^{\pi i S \frac{\left(\mu + \frac{a}{2}\right)^2 \tau}{\sqrt{D}}}.$$

In jeder Restklasse mod 2 zeichnen wir einen Repräsentanten aus; $\bar{\alpha}$ bezeichne den Repräsentanten in der Restklasse von α ($\subset \mathfrak{o}$); wir verabreden noch: $\bar{\infty} = \infty' = \infty$. Mit den üblichen Festsetzungen über das Rechnen mit dem Symbol ∞ besteht dann vermöge der Beziehung

(10) $$a \equiv \frac{1}{\varrho' + \sigma'} \qquad b \equiv \frac{\varrho' \sigma'}{\varrho' + \sigma'} \quad (2)$$

eine eineindeutige Zuordnung der geordneten Paare $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ ($a, b \subset \mathfrak{o}$) und der ungeordneten Paare $\{\bar{\varrho}, \bar{\sigma}\}$ ($\varrho, \sigma \subset \mathfrak{o} + \infty$, $\bar{\varrho} \neq \bar{\sigma}$). Wir definieren

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau) = \vartheta_{\bar{\varrho},\bar{\sigma}}(\tau) = \psi_{\bar{a},\bar{b}}(\tau).$$

Wegen

$$\psi_{a,b}(\tau) = e^{\pi i S \frac{(a - \bar{a}) b}{2\sqrt{D}}} \psi_{\bar{a},\bar{b}}(\tau)$$

folgt also

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau) = e^{\pi i S \frac{(a - \bar{a}) b}{2\sqrt{D}}} \psi_{a,b}(\tau).$$

Es gilt dann der folgende

Satz 1. *Die Substitutionen $S \subset \Gamma(1)$ führen die Gesamtheit der Reihen $\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau)$ in sich über.*

(11) $$\vartheta_{\varrho,\sigma}(S\tau) = v_{\varrho,\sigma}(S)\, N(\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}}\, \vartheta_{S^{-1}\varrho,\, S^{-1}\sigma}(\tau), \qquad \underline{S} = (\gamma, \delta),$$
$$|v_{\varrho,\sigma}(S)| = 1.$$

Es genügt, die Behauptung für die Substitutionen

$$U^{\omega} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\omega \subset \mathfrak{o}, \quad \varepsilon = \text{beliebige Einheit}, \quad \gamma \equiv 0\,(2)\ \gamma \neq 0,$$

zu beweisen, da man aus diesen alle gewinnen kann. Ich skizziere den Verlauf der Rechnung für die Substitution S_1. Seien a, b schon so gewählt, daß

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b.$$

Wenn

$$\tau_1 = S_1 \tau = \frac{\alpha}{\gamma} + \tau_2, \qquad 4\gamma^2 \tau_2 = \tau_3 = -\frac{4}{\tau + \frac{\delta}{\gamma}},$$

so wird

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau_1) = \sum_{\nu_0 \bmod 2\gamma} (-1)^{S \frac{b \nu_0}{\sqrt{D}}} e^{\pi i S \frac{\left(\nu_0 + \frac{a}{2}\right)^2 \alpha}{\gamma \sqrt{D}}} \sum_{\nu \equiv \nu_0\,(2\gamma)} e^{\pi i S \frac{\left(\nu + \frac{a}{2}\right)^2 \tau_2}{\sqrt{D}}}.$$

Die innere Summe ist gleich

$$\sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{\left(\mu + \frac{2\nu_0 + a}{4\gamma}\right)^2 \tau_3}{\sqrt{D}}}$$

und wird durch die Heckesche Thetatransformationsformel in

$$\frac{1}{4} N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda \subset \mathfrak{o}} e^{-\pi i S \frac{\lambda(2\nu_0 + a)}{2\gamma\sqrt{D}} + \pi i S \frac{\lambda^2(\gamma\tau + \delta)}{4\gamma\sqrt{D}}}$$

übergeführt. Trägt man dies ein, so erhält man nach einfachen Umrechnungen

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau_1) = \frac{1}{4} N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda_0 \bmod 4\gamma} e^{-\pi i S \frac{\lambda_0 a}{2\gamma\sqrt{D}} + \pi i S \frac{\lambda_0^2 \delta}{4\gamma\sqrt{D}}}$$

$$\times \sum_{\nu_0 \bmod 2\gamma} e^{\pi i S \left\{\frac{b\nu_0}{\sqrt{D}} + \frac{\left(\nu_0 + \frac{a}{2}\right)^2 \alpha}{\gamma\sqrt{D}} - \frac{\lambda_0 \nu_0}{\gamma\sqrt{D}}\right\}} \sum_{\lambda \equiv \lambda_0\,(4\gamma)} e^{\pi i S \frac{\lambda^2 \tau}{4\sqrt{D}}}.$$

Die Summe über $\nu_0 \bmod 2\gamma$ verschwindet nur dann nicht, wenn

$$a\alpha \equiv \lambda_0\,(2).$$

Setzt man daher $\lambda_0 = a\alpha + 2\nu$, wo also $\nu \bmod 2\gamma$ läuft, so wird

$$\sum_{\nu_0 \bmod 2\gamma} = 4\, e^{\pi i S \left\{\frac{a^2\alpha}{4\gamma\sqrt{D}} - \frac{\left(\nu - \frac{b\gamma}{2}\right)^2}{\alpha\gamma\sqrt{D}} + \frac{\mu_1^2}{\alpha\gamma\sqrt{D}}\right\}} \cdot H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right),$$

wobei $\mu_1 = \alpha\mu_0 - \nu + \frac{b\gamma}{2}$ und μ_0 so bestimmt ist, daß $\mu_1 \equiv 0\,(\gamma)$; ferner ist

$$H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{\mu \bmod \gamma} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \alpha}{\gamma\sqrt{D}}}.$$

Beachtet man bei weiterer Umformung

$$\mu_0 \equiv \alpha' \nu - \frac{\alpha' b \gamma}{2} \, (2),$$

$$S \frac{\beta \alpha' \nu^2}{\sqrt{D}} \equiv S \frac{\beta' \alpha \nu}{\sqrt{D}} \, (2),$$

so erhält man schließlich

$$\vartheta_{\varrho, \sigma}(\tau_1) = N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) \cdot e^{\frac{\pi i}{4} S \left\{ \frac{a^2 \alpha \beta + b^2 \gamma (\gamma \beta \alpha' - \delta)}{\sqrt{D}} \right\}}$$

$$\times \sum_{\nu \subset \mathfrak{o}} (-1)^{S \left\{ \frac{\nu (a \beta + b \delta + \beta' \alpha)}{\sqrt{D}} \right\}} e^{\pi i S \frac{\left(\nu + \frac{a \alpha}{2}\right)^2 \tau}{\sqrt{D}}}.$$

Setzt man

$$a_1 = a \alpha, \quad b_1 = a \beta + b \delta + \beta' \alpha,$$

$$S_1^{-1}(\varrho, \sigma) \equiv (\varrho_1, \sigma_1) \, (2),$$

so folgt in der Tat

$$a_1 \equiv \frac{1}{\varrho_1' + \sigma_1'}, \quad b_1 \equiv \frac{\varrho_1' \sigma_1'}{\varrho_1' + \sigma_1'} \, (2),$$

außerdem

$$(12) \quad v_{\varrho, \sigma}(S_1) = |N \gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}}$$

$$\times e^{\frac{\pi i}{4} S \left\{ \frac{a^2 \alpha \beta + b^2 \gamma (\gamma \beta \alpha' - \delta)}{\sqrt{D}} \right\} + \pi i S \frac{(a \alpha - \overline{a \alpha})(a \beta + b \delta + \beta' \alpha)}{2 \sqrt{D}}}.$$

Die Rechnung für die übrigen Substitutionen ist einfacher und liefert

$$(13) \quad \begin{cases} v_{\varrho, \sigma}(U^\omega) = e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{a^2 \omega}{\sqrt{D}}} \\ v_{\varrho, \sigma}(S_0) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D} + \pi i S \frac{(a \varepsilon - \overline{a \varepsilon}) b \varepsilon'}{2 \sqrt{D}}} \\ v_{\varrho, \sigma}(T) = e^{-\frac{\pi i}{2} S \frac{a b}{\sqrt{D}}}. \end{cases}$$

Fordern wir noch $\varrho = 0$, so wird

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_{0, \infty}(\tau)$$

und man erkennt, daß die maximale Gruppe, die $\vartheta(\tau)$ festläßt, aus allen Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma(1)$$

besteht, für welche

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \, (2) \quad \text{oder} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0 \, (2).$$

Diese Gruppe hat in $\Gamma(1)$ den Index 10; wir bezeichnen sie mit Γ_{10}. Ich merke noch an, daß Γ_{10} nur mit ihren eignen Elementen vertauschbar ist, d. h. aus $S \Gamma_{10} S^{-1} = \Gamma_{10}$ folgt $S \subset \Gamma_{10}$. Die Multiplikatoren von $\vartheta(\tau)$:

$$v(S) = v_{0, \infty}(S) \quad S \subset \Gamma_{10}$$

setzen sich aus den vier Typen

$$(14)\quad \begin{cases} v(U^{\omega}) = 1, & (\omega \equiv 0\,(2)), \\ v(S_0) = e^{\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \varepsilon \sqrt{D}}, & \\ v(T) = 1, & \\ v(S_1) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \gamma \sqrt{D}}, & (\beta \equiv 0\,(2)) \end{cases}$$

nach der Regel (7) zusammen. S_1^{-1} ist selbst vom Typus S_1, daher gilt

$$v(S_1^{-1}) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \gamma \sqrt{D}},$$

$$= |N\gamma|^{\frac{1}{2}}\; H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)^{-1} e^{\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \gamma \sqrt{D}}.$$

Wegen

$$\sigma_Z(S_1, S_1^{-1}) = 1 \quad (\text{da ja } \gamma \neq 0),$$

folgt also

$$v(S_1)\, v(S_1^{-1}) = 1, \quad \text{falls } S_1 \subset \Gamma_{10},$$

mithin

$$v(S_1) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \gamma \sqrt{D}}.$$

Halten wir uns an die Heckesche Bezeichnung der Gaußschen Summen

$$C(\omega) = \sum_{\alpha \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \alpha^2 \omega},$$

$$(\mathfrak{a} = \text{Idealnenner von } \omega\sqrt{D})$$

dann ist

$$H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right) = \frac{1}{4}\, C\left(\frac{\delta}{2\gamma\sqrt{D}}\right).$$

Das Reziprozitätsgesetz für Gaußsche Summen [7]), zweimal angewandt:

$$\frac{1}{4}\, |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{\delta}{2\gamma\sqrt{D}}\right) = e^{\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \delta\gamma \sqrt{D}} \;\; |N\delta|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{-\gamma}{2\delta\sqrt{D}}\right),$$

$$|N\delta|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{-\gamma}{2\delta\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{\gamma_1}{\delta}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S\, \mathrm{sgn}\, \delta \sqrt{D}} \cdot \frac{1}{8}\, C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right),$$

falls $\gamma = 2\gamma_1$, liefert also

$$v(S_1) = \left(\frac{\gamma_1}{\delta}\right) N\sigma_{\gamma,\delta} \cdot \frac{1}{8}\, C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right),$$

wobei

$$\sigma_{\gamma,\delta} = (-1)^{\frac{\mathrm{sgn}\,\gamma - 1}{2} \cdot \frac{\mathrm{sgn}\,\delta - 1}{2}}.$$

[1]) Vgl. E. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, §§ 54, 56, 59. Leipzig 1923.

Aus dem zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz für das quadratische Restsymbol entnimmt man die Beziehung

$$\frac{1}{8}\,C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right)\cdot\frac{1}{16}\,C\left(\frac{\delta}{8\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}},$$

so daß schließlich

$$v(S_1) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) N\,\sigma_{\gamma,\delta}\, e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}.$$

Für eine affine Substitution $S \subset \Gamma_{10}$ (d. h. $\gamma = 0$) zeigt man

$$v(S) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn}\delta \sqrt{D}}, \quad \underline{S} = (0, \delta).$$

Da nun δ eine Einheit ist, so ist $\frac{1}{8}\,C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right)$ sowohl gleich $e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}$ als auch gleich $e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn}\delta\sqrt{D}}$, folglich ist

$$v(S) = e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}.$$

Mit den gleichen Hilfsmitteln bestimmt man die Multiplikatorwerte für die Substitutionen $S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \subset \Gamma_{10}$, für welche $\alpha \equiv \delta \equiv 0\ (2)$:

$$v(S) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \frac{\gamma^3}{\sqrt{D}}} \quad (\gamma \not\equiv 0\ (2)).$$

Wir definieren nun das im Zähler bzw. im Nenner periodische Restsymbol $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^*$ bzw. $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*$, wie folgt:

δ sei prim zu 2; $\gamma, \delta \subset \mathfrak{o}$.

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^* = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right),$$

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) N\,\sigma_{\gamma,\delta} & \text{für } \gamma \neq 0,\\ 1 & \text{für } \gamma = 0, \quad \delta = \text{Einheit},\\ 0 & \text{für } \gamma = 0, \quad \delta \neq \text{Einheit}. \end{cases}$$

Für $\alpha\alpha_1 \neq 0$, $\nu\nu_1\mu$ prim zu 2 gelten dann die Regeln

$$\left(\frac{-1}{\nu}\right)_* = \left(\frac{-1}{\nu}\right)^* \operatorname{sgn} N\nu = (-1)^{\frac{N\nu-1}{2}},$$

$$\text{(15)}\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)^*, \quad \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)_* = \left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)_* N\,\sigma_{\nu,\alpha\alpha_1} \quad \text{für } \alpha \equiv \alpha_1\ (\nu),\\ &\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\alpha}{\nu_1}\right)^* N\,\sigma_{\alpha,\nu\nu_1}, \quad \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)_* = \left(\frac{\alpha}{\nu_1}\right)_* \quad \text{für } \nu \equiv \nu_1\ (4\alpha),\\ &\left(\frac{2}{\nu}\right)^* = \left(\frac{2}{\nu}\right)_* = 1, \quad \text{falls } \nu \text{ hyperprimär nach } 8\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(d. h. quadratischer Rest mod. 8)}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^* \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_* \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_* = N\,\sigma_{\nu,\mu}, \text{ falls } \nu \text{ oder } \mu \text{ primär (d. h. quadratischer Rest mod. 4)},$$

$$(15)\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)_* = \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^* \left(\frac{-1}{\nu}\right)_* \\ \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_* \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\nu_1}{\mu}\right)_* \left(\frac{\mu}{\nu_1}\right)^* \\ \left(\frac{2}{\nu}\right)_* \left(\frac{2}{\nu_1}\right)_* = \left(\frac{2}{\nu}\right)^* \left(\frac{2}{\nu_1}\right)^* = e^{\pi i S \frac{\nu' \nu_1}{4\sqrt{D}}} \end{array}\right\} \text{ für } \nu \equiv \nu_1\,(4).$$

Das Zahlsystem $v_0(S)$, $S \subset \Gamma(1)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, erklärt durch

$$v_0(S) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* & \text{für } 2 \mid \gamma, \\ \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^* & \text{für } 2 \nmid \gamma, \end{cases}$$

definiert ein Multiplikatorsystem zu $\Gamma(4)$. Darüber hinaus gilt

Satz 2. *Für $S_1, S_2 \subset \Gamma(1)$ ist*

$$v_0(S_1 S_2) = \sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(S_1, S_2)\, v_0(S_1)\, v_0(S_2),$$

sobald S_1 oder $S_2 \subset \Gamma(4)$.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Regeln (15) (vgl. A, S. 402—404). Nur ein Fall ist erwähnenswert. Wenn nämlich die ersten Elemente der zweiten Zeilen von S_1 und S_2 verschwinden, so wird behauptet

$$\sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(S_1, S_2) = N\,\sigma_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 1, \qquad \underline{S_i} = (0, \varepsilon_i).$$

Da eine der Einheiten ε_i kongruent 1 mod 4 ist, so ist das eine Folge des Reziprozitätsgesetzes:

$$1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^* = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)_* = N\,\sigma_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Satz 2 ermöglicht den Nachweis, daß das mit $S \subset \Gamma(1)$ transformierte Multiplikatorsystem v_0^S mit v_0 identisch ist. Sei nämlich

$$LS = SL_1, \quad L, L_1 \subset \Gamma(4),$$

dann ist

$$v_0(LS) = \sigma_Z(L, S)\, v_0(L)\, v_0(S),$$
$$v_0(SL_1) = \sigma_Z(S, L_1)\, v_0(S)\, v_0(L_1),$$

also

$$v_0(L_1) = v_0(L) \frac{\sigma_Z(L, S)}{\sigma_Z(S, L_1)} = v_0^S(L_1).$$

Wir verabreden, Vorzeichenbedingungen, denen Zahlen aus Z unterliegen, in Form von Kongruenzen nach unendlichen Primstellen zu schreiben. Es seien $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{p}'_\infty$ die unendlichen Primstellen von Z und

$$p_\infty = \mathfrak{p}_\infty \cdot \mathfrak{p}'_\infty.$$

Unter den Voraussetzungen

$$A \subset \Gamma(1),\ U^\nu = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_0 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix},\quad \eta = \text{Einheit},$$

$$\nu \equiv 0\ (4),\quad \eta \equiv 1\ (4\,p_\infty)$$

beweist man schließlich, indem man auf die Definition der Symbole zurückgeht,

$$(16)\qquad \begin{aligned} \sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(A.\ A^{-1}\,U^\nu\,S_0\,A) &= 1, \\ v_0(A^{-1}\,U^\nu\,S_0\,A) &= 1. \end{aligned}$$

Davon machen wir im folgenden Paragraphen Gebrauch.

Erklären wir noch $\varkappa(S)$ für $S \subset \Gamma(1)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$ durch

$$\varkappa(S) = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}} & \text{für } 2 \mid \gamma, \\ e^{-\frac{\pi i}{4} S \frac{\gamma^3}{\sqrt{D}}} & \text{für } 2 \nmid \gamma, \end{cases}$$

so nimmt das ϑ-Multiplikatorsystem die einfache Gestalt

$$(17)\qquad v(S) = v_0(S)\,\varkappa(S) \quad \text{für } S \subset \Gamma'_{10}$$

an; insbesondere gilt also

$$v(S) = v_0(S) \quad \text{für } S \subset \Gamma(8).$$

§ 2.

Formen zur Idealstufe $\mathfrak{N}$.

Die Vorbereitungen sind jetzt soweit gediehen, daß wir mit der Aufstellung der ganzen Formen mit den Multiplikatoren $v_0(S)$ zur Idealstufe $\mathfrak{N}$ beginnen können. $\mathfrak{N}$ sei ein fest gewähltes, durch 4 teilbares ganzes Ideal aus $\mathfrak{o}$. Für den Rest der Arbeit sei ständig

$$D \equiv 5\ (8).$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiger ganzer Modul, der neben endlichen auch unendliche Primstellen enthalten darf, so heißen zwei Zeilen (γ, δ) und (γ_1, δ_1) mod $\mathfrak{a}$ assoziiert, wenn es eine Einheit

$$\eta \equiv 1\ (\mathfrak{a})$$

gibt, derart, daß

$$\gamma = \eta\gamma_1,\quad \delta = \eta\delta_1.$$

Wir wählen aus der Nebengruppe $A \cdot \Gamma(\mathfrak{N})$, $A \subset \Gamma(1)$, ein vollständiges System $\Xi(A, \Gamma(\mathfrak{N}))$ von Matrizen aus, die zu je zweien mod $\mathfrak{N}\,p_\infty$ nicht assoziierte zweite Zeilen haben. In der Schar der zu (γ, δ) mod $\mathfrak{a}$ assoziierten Zeilen bezeichne $(\gamma, \delta)_{\mathfrak{a}}$ einen Repräsentanten. Analoge Betrachtungen wie in E zeigen, daß die Reihen

$$(18)\quad E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma(\mathfrak{N}))} \frac{1}{\lambda(M)\, N(\mu_1\tau + \mu_2)^r\, |\mu_1\tau + \mu_2|^s},$$

wobei $M = AL$, $\underline{M} = (\mu_1, \mu_2)$, $\lambda(M) = \sigma_Z(A, L)\, v_0(L)$, $r = \frac{k}{2}$ $(k = 1, 3, 5, \ldots)$, auf Grund von (16) von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A, \Gamma(\mathfrak{N}))$ unabhängig sind und sich bei den Substitutionen $S \subset \Gamma(1)$ folgendermaßen verhalten:

$$(19)\quad \frac{E_{-r}(S\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N}))}{N(\gamma\tau + \delta)^r\, |\gamma\tau + \delta|^s} = \frac{1}{\sigma_Z(A, S)} \cdot E_{-r}(\tau, s; v_0, AS, \Gamma(\mathfrak{N})),$$

$$\underline{S} = (\gamma, \delta).$$

insbesondere für $S \subset \Gamma(\mathfrak{N})$:

$$(20)\quad \frac{E_{-r}(S\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N}))}{N(\gamma\tau + \delta)^r\, |\gamma\tau + \delta|^s} = v_0(S)\, E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})).$$

Die Reihen E_{-r} sind wegen $|\lambda(M)| = 1$ für $\Re s > 2 - r$ absolut konvergent und in s analytisch. Für die Reihen

$$(21)\quad G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \mathfrak{N}) = \sum_{\substack{(\mu_1, \mu_2)\mathfrak{N}\, p_\infty \\ \mu_1 \equiv \alpha_1 (\mathfrak{N}) \\ \mu_2 \equiv \alpha_2 (\mathfrak{N}) \\ (\mu_1, \mu_2) = 1}} \frac{v_0(\mu_1, \mu_2)}{N(\mu_1\tau + \mu_2)^r\, |\mu_1\tau + \mu_2|^s}$$

$$= \frac{1}{v_0(A)}\, E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})),$$

$$(\underline{M} = (\mu_1, \mu_2),\quad v_0(M) = v_0(\mu_1, \mu_2),\quad \underline{A} = (\alpha_1, \alpha_2)),$$

die wir jetzt eingehend untersuchen, gelten nach (19) die Transformationsformeln

$$(22)\quad \frac{G_{-r}(S\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \mathfrak{N})}{N(\gamma\tau + \delta)^r\, |\gamma\tau + \delta|^s} = \frac{v_0(AS)}{\sigma_Z(A, S)\, v_0(A)}\, G_{-r}(\tau, s; (\alpha_1, \alpha_2)S, \mathfrak{N}).$$

Bei der weiteren Diskussion beschränken wir uns auf die Körper mit der

Klassenzahl $= 1$.

Wir setzen dann (in fester Bedeutung):

$$\mathfrak{N} = \nu,\quad (\mu_1, \nu) = (\alpha_1, \nu) = \gamma,$$

$$\mu_1 = \gamma\mu_1^*,\quad \alpha_1 = \gamma\alpha_1^*,\quad \nu = \gamma\nu^* = 4\nu_0.$$

$$v_0(\mu_1, \mu_2) = v_0(\gamma, \alpha_2)\, u(\mu_1^*, \mu_2).$$

Dabei ist

$$u(\mu_1^*, \mu_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1^*}\right)^* & \text{für } 2 \nmid \alpha_1, \\ \left(\dfrac{\mu_1^*}{\mu_2}\right)_* & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \mid \nu \text{ oder } 4 \mid \gamma, \\ \left(\dfrac{\mu_1^*}{\alpha_2}\right)_* \left(\dfrac{\alpha_2}{\mu_1^*}\right)^* e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\alpha_2' \mu_2}{\sqrt{D}}} \left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1^*}\right)^* & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \nmid \nu,\ 4 \nmid \gamma, \end{cases}$$

und für beliebiges ganzes λ gilt

$$u(\mu_1^*, \mu_2 + \lambda \nu \mu_1^*) = e^{2\pi i S \frac{\lambda \eta}{\sqrt{D}}} u(\mu_1^*, \mu_2),$$

wobei

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{\nu_0}{2} & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \nmid \nu,\ 4 \nmid \gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Verschiebungsinvarianz von u und die verallgemeinerte Lipschitz-Formel:

$$(23) \qquad \sum_{\lambda \subset \mathfrak{o}} \frac{e^{-2\pi i S \frac{\lambda \eta}{\sqrt{D}}}}{N(\lambda + \omega)^r \, |\lambda + \omega|^s} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{e^{-2\pi i S \frac{(\varrho + \eta) x}{\sqrt{D}}} \, d x \, d x'}{N(\omega + x)^r \, |\omega + x|^s}$$

$$(\Im\mathrm{m}\, \omega \neq 0,\ \ \Im\mathrm{m}\, \omega' \neq 0)$$

vermitteln uns die Fourierentwicklung

$$(24) \quad G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0 \, \delta(A) \, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_0 \sqrt{D}} + \frac{v_0(\gamma, \alpha_2)}{|N \nu^*|^{r+s} \sqrt{D}} e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \nu^* \sqrt{D}}$$

$$\times \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} \Bigg\{ \sum_{\substack{(\mu_1)_{\nu p_\infty} \\ \mu_1 \equiv \alpha_1 (\nu) \\ \mu_1 \neq 0}} \frac{e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu_1 \sqrt{D}}}{|N \mu_1|^{r+s}} W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \Bigg\} B_{\varrho + \eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right).$$

Dabei ist

$$e_0 = \begin{cases} 2, & \text{falls es eine Einheit } \varepsilon \equiv 1 \, (\nu),\ \varepsilon \not\equiv 1 \, (p_\infty) \text{ gibt,} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \cdot \Gamma(\nu) \text{ eine affine Substitution enthält,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ε_0 eine Einheit $\begin{cases} \equiv \alpha_2(\nu), & \text{falls } \delta(A) = 1, \\ = 1, & \text{falls } \delta(A) = 0, \end{cases}$

$(\mu_1)_{\nu p_\infty}$ ein Repräsentant aus der Schar der zu $\mu_1 \bmod \nu p_\infty$ assoziierten Zahlen,

$$W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{\beta \bmod \nu \mu_1^* \\ \beta \equiv \alpha_2 (\nu) \\ (\beta, \mu_1) = 1}} u(\mu_1^*, \beta) \, e^{2\pi i S \frac{\beta}{\nu \mu_1^* \sqrt{D}} (\varrho + \eta)},$$

$$B_{\varrho+\eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{e^{-2\pi i S \frac{(\varrho+\eta)x}{\sqrt{D}}}}{N\left(\frac{\tau}{\nu^*}+x\right)^r} \frac{d\,x\,d\,x'}{\left|\frac{\tau}{\nu^*}+x\right|^s}.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß das allgemeine Glied in der Dirichletreihe der Entwicklung (24) sich nicht ändert, wenn man μ_1 durch eine mod ν assoziierte Zahl ersetzt. Es reicht also, über $(\mu_1)_\nu$, $\mu_1 \equiv \alpha_1 (\nu)$, $\mu_1 \neq 0$ zu summieren, wenn man die Reihe mit e_0 multipliziert. Durch eine affine Transformation der Integrationsvariablen wird das Doppelintegral $B_{\varrho+\eta}$ in

$$B_{\varrho+\eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right) = e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \nu^* \sqrt{D}} |N\nu^*|^{r+s-1} N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r)$$

übergeführt, wobei

$$N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r) = A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r) \cdot A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \tau', r),$$

$$A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \tau', r) = \overline{A_{-\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \bar{\tau}', r)},$$

$$A_\lambda(s, \tau, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \lambda x}\,d\,x}{(\tau+x)^r\,|\tau+x|^s} \quad (\lambda \text{ reell}).$$

Damit ist die Berechnung von $B_{\varrho+\eta}$ auf die in K I, § 1 diskutierten Integrale zurückgeführt (vgl. in K I, Tabelle (9); daß n dort eine ganze Zahl ist, ist belanglos).

Wir erhalten also insgesamt:

$$(25)\qquad G_{\cdot r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0\,\delta(A)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_0 \sqrt{D}}$$
$$+ \frac{e_0\, v_0(\gamma, \alpha_2)}{|N\gamma|^{r+s}\,|N\nu^*|\sqrt{D}} \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \cdot N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r)$$

mit

$$(26)\quad T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{(\mu_1^*)_\nu \\ \mu_1^* \equiv \alpha_1^* (\nu^*) \\ \mu_1^* \neq 0}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu_1 \sqrt{D}}\, W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}}.$$

Der Weg, den man bei der Diskussion der Reihen T einschlägt, ist in E, § 5 bereits völlig vorgezeichnet. Ich kann mich daher gelegentlich, so bei der Auswertung der Koeffizienten W, darauf beschränken, Resultate mitzuteilen.

Wir definieren (für beliebige ϱ, α, ν und ungerades μ_1^*):

$$W_1(\mu_1^*, \varrho; \alpha, \nu) = \sum_{\substack{\lambda \bmod \mu_1^* \nu \\ \lambda \equiv \alpha (\nu)}} \left(\frac{\lambda}{\mu_1^*}\right) e^{2\pi i S \frac{\lambda \varrho}{\mu_1^* \nu \sqrt{D}}}.$$

Bezeichnet γ_1 das maximale Potenzprodukt von Primteilern von (μ_1^*, ν), so daß $\mu_1^* = \gamma_1 \mu$, so gilt

$$W_1(\mu_1^*, \varrho; \alpha, \nu) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right) \left(\frac{\nu\gamma_1}{\mu}\right) e^{2\pi i S \frac{\alpha\bar{\mu}\varrho}{\nu\gamma_1\sqrt{D}}} \, |N\gamma_1| \, C(\mu, \varrho), \text{ falls } \gamma_1 | \varrho, \\ 0 \qquad \text{sonst,} \end{cases}$$

dabei ist $\mu\bar{\mu} \equiv 1 \ (\nu)$ und

$$C(\mu, \varrho) = \sum_{\iota \bmod \mu} \left(\frac{\iota}{\mu}\right) e^{2\pi i S \frac{\iota\varrho}{\mu\sqrt{D}}}.$$

Wir wählen ein vollständiges System von mod ν inkongruenten Einheiten

$$\varepsilon_j \equiv 1 \ (\nu^*) \qquad (j = 1, \ldots, \iota)$$

und zerspalten die Summation in (26):

$$(27) \quad T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{\nu^*} \\ \mu_1^* \equiv \alpha_1^* (\nu^*) \\ \mu_1^* \neq 0}} \frac{\sum_{j=1}^{\iota} e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_j \mu_1 \sqrt{D}} \, W(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}}.$$

Entsprechend den drei Fällen:

1. $\alpha_1 \not\equiv 0 \ (2)$,
2. $\alpha_1 \equiv 0 \ (2), \quad \nu \not\equiv 0 \ (8), \quad \gamma \not\equiv 0 \ (4)$,
3. $\alpha_1 \equiv 0 \ (2), \quad \nu \equiv 0 \ (8) \quad \text{oder} \quad \gamma \equiv 0 \ (4)$

bezeichnen wir die Koeffizienten W von T mit W_1, W_2 und W_3. Es gilt dann

$$(28) \qquad W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_2, \nu),$$

$$(29) \quad W_2(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \left(\frac{2\alpha_2}{\varepsilon_j \mu_1^*}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j \mu_1^*}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2 \nu_0 \bar{\varepsilon}_j \bar{\mu}_1^* (2\varrho + \nu_0)}{8\sqrt{D}}} \times W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, 2\varrho + \nu_0; \bar{8}\alpha_2, \nu_0),$$

wobei

$$\varepsilon_j \bar{\varepsilon}_j \equiv \mu_1^* \overline{\mu_1^*} \equiv \nu_0 \bar{\nu}_0 \equiv 1 \ (8), \quad 8 \cdot \bar{8} \equiv 1 \ (\nu_0),$$

und schließlich

$$(30) \ W_3(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\alpha_2}\right)^{\delta_1} \left(\frac{2^{\delta_0+\delta_1}\alpha_2}{\varepsilon_j \mu_0}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j \mu_0}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2 \bar{\varepsilon}_j \bar{\mu}_0 \nu_1 \varrho}{2^{\delta_0+\delta_1}\sqrt{D}}} N\, 2^{\delta_1} \\ \times W_1(\varepsilon_j \mu_0, \varrho; \alpha_2 \overline{2}^{\delta_0+\delta_1}, \nu_1), \text{ falls } S(\alpha_2 \varepsilon_j \bar{\mu}_0 \bar{\nu}_1) \neq 0, \\ 0 \qquad \text{sonst,} \end{cases}$$

wenn

$$\mu_1^* = 2^{\delta_1}\mu_0, \quad \nu = 2^{\delta_0}\nu_1, \quad (2, \mu_0\nu_1) = 1,$$
$$\varepsilon_j\overline{\varepsilon_j} \equiv \mu_0\overline{\mu_0} \equiv \nu_1\overline{\nu_1} \equiv 1\ (2^{\delta_0+1}), \quad 2\overline{2} \equiv 1\ (\nu_1),$$
$$S(\lambda) = \sum_{\substack{\beta \bmod 2^{\delta_0+\delta_1} \\ \beta\equiv\lambda(2^{\delta_0})}} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\delta_1} e^{2\pi i S \frac{\beta\varrho}{2^{\delta_0+\delta_1}\sqrt{D}}}.$$

$S(\lambda)$ verschwindet genau dann nicht, wenn

$$\begin{cases} 2^{\delta_1}/\varrho & \text{für } \delta_0 \geqq 3 \quad (\text{d. h. } \nu \equiv 0\ (8)), \\ 2^{\delta_1-1}/\varrho, \quad \dfrac{\varrho}{2^{\delta_1-1}} \equiv \lambda'\,\delta_1\,(2) & \text{für } \quad \delta_0 = 2. \end{cases}$$

Setzt man die so bestimmten Werte für W in (27) ein und spaltet die Summation weiter auf, so erhält man nach erfolgter Umordnung:

1. für $\alpha_1 \not\equiv 0\ (2)$:

(31) $T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$

$$= \sum_{j=1}^{t} \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{\nu^*} \\ \mu_1^*\equiv\alpha_1^*(\nu^*)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon_j\mu_1\sqrt{D}}\, W_1(\varepsilon_j\mu_1^*, \varrho; \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}},$$

2. für $\alpha_1 \equiv 0\ (2)$, $\nu \not\equiv 0\ (8)$, $\gamma \not\equiv 0\ (4)$:

$$(32)\quad T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{\substack{(\beta)_{\nu^*} \\ \beta \bmod 4\nu^* \\ \beta\equiv\alpha_1^*(\nu^*)}} \left(\frac{2\alpha_2}{\varepsilon_j\beta}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j\beta}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2\nu_0\varepsilon_j\beta(2\varrho+\nu_0)}{8\sqrt{D}}}$$
$$\times \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{4\nu^*} \\ \mu_1^*\equiv\beta(4\nu^*)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon_j\mu_1\sqrt{D}}\, W_1(\varepsilon_j\mu_1^*, 2\varrho+\nu_0, \alpha_2\overline{8}, \nu_0)}{|N\mu_1^*|^{r+s}},$$

3. für $\alpha_1 \equiv 0\ (2)$, $\nu \equiv 0\ (8)$ oder $\gamma \equiv 0\ (4)$:

(33) $T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$

$$= \sum_{j=1}^{t} \sum_{\delta_1}{}' \frac{\left(\frac{2}{\alpha_2}\right)^{\delta_1}}{N\,2^{\delta_1(r-1+s)}} \sum_{\substack{(\beta)_{\nu^*} \\ \beta \bmod 2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^* \\ \beta\equiv\alpha_1^*\overline{2}^{\delta_1}(\nu^*) \\ 2\nmid\beta}}{}' e^{2\pi i S \frac{\alpha_2\beta\overline{\nu_1}\overline{\varepsilon_j}\varrho}{2^{\delta_0+\delta_1}\sqrt{D}}}$$
$$\times \left(\frac{2^{\delta_0+\delta_1}\alpha_2}{\varepsilon_j\beta}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j\beta}{\alpha_2}\right)_* \sum_{\substack{\mu_0\equiv\beta(2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^*) \\ (\mu_0)_{2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^*}}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon_j\mu_1\sqrt{D}} \cdot W_1(\varepsilon_j\mu_0, \varrho; \alpha_2\overline{2}^{\delta_0+\delta_1}, \nu_1)}{|N\mu_0|^{r+s}};$$

dabei wird über die δ_1 ($\geqq 0$) und β summiert, für welche die zusätzliche Bedingung

$$\begin{cases} 2^{\delta_1}/\varrho & \text{für } \delta_0 \geqq 3, \\ 2^{\delta_1 - 1}/\varrho, \quad 2^{1-\delta_1}\,\varrho \equiv (\alpha_2\,\bar{\varepsilon}_j\,\bar{\beta}\,\bar{\nu}_1)^2\,\delta_1\,(2) & \text{für } \delta_0 = 2 \end{cases}$$

erfüllt ist, falls

$$\beta\bar{\beta} \equiv \nu_1\bar{\nu}_1 \equiv \varepsilon_j\bar{\varepsilon}_j \equiv 1\ (2^{\delta_0+1});$$

außerdem gilt

$$2^{\delta'}\,|\,\nu^*,\quad 2^{\delta'+1} \nmid \nu^*,\quad 2\cdot 2 \equiv 1\ (\nu_1).$$

Die innere Summe in jeder dieser drei Entwicklungen ist über ein beliebiges System von Scharrepräsentanten zu erstrecken, doch hat man für alle j die gleichen Repräsentanten zu wählen.

Man kann also stets $T\,(r+s,\ \varrho;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \nu)$ aus Reihen vom Typus

$$(34)\quad T_1\,(r+s,\varrho;\beta,\alpha,\nu) = \sum_{\substack{(\varkappa)_{\nu_2} \\ \varkappa \equiv \beta\,(\nu_2)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S\,\mathrm{sgn}\,\gamma\varkappa\sqrt{D}}\; W_1\,(\varkappa,\varrho;\alpha,\nu_3)}{|N\varkappa|^{r+s}},$$

wobei

$$\begin{cases} \gamma\,|\,\nu,\quad 4\,|\,\nu,\quad (\beta,\nu_2) = 1,\quad \nu_2\,|\,2\nu,\quad \nu = 2^{\lambda}\nu_3,\quad \lambda \geqq 0 \\ \text{und } \dfrac{2\nu}{\nu_2} \text{ prim zu } 2,\quad 2 \nmid \nu_3 \text{ oder } \dfrac{\nu}{\nu_2} \text{ prim zu } 2,\quad \nu_3 = \nu, \end{cases}$$

linear zusammensetzen. Das Repräsentantensystem $(\varkappa)_{\nu_2}$ in (34) darf beliebig — aber unabhängig von β — spezialisiert werden. Sei γ_1 das maximale Potenzprodukt von Primteilern von $(\varkappa,\nu_3)$, so daß

$$\varkappa = \gamma_1\,\mu,$$

dann kann man sich in (34) bei der Summation auf $\gamma_1|\varrho$ beschränken, da andernfalls $W_1 = 0$ ist. Trägt man dann

$$W_1\,(\varkappa,\varrho;\alpha,\nu_3) = \left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right)\left(\frac{\nu_3\gamma_1}{\mu}\right) e^{2\pi i S\frac{\alpha\bar{\mu}\varrho}{\nu_3\gamma_1\sqrt{D}}}\,|N\gamma_1|\,C\,(\mu,\varrho) \qquad \text{für}\quad \gamma_1|\varrho$$

in (34) ein, so ergibt sich bei geeigneter Wahl der Scharrepräsentanten:

$$(35)\quad T_1\,(r+s,\ \varrho;\ \beta,\alpha,\ \nu) = \sum_{\substack{(\gamma_1) \\ \gamma_1|\varrho}} \frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right)}{|N\gamma_1|^{r+s-1}} \sum_{\substack{(\lambda)_{\nu_3} \\ \lambda \bmod 2\nu \\ \gamma_1\lambda \equiv \beta\,(\nu_2) \\ (\lambda,\nu) = 1}} \left(\frac{\nu_3\gamma_1}{\lambda}\right) e^{2\pi i S\frac{\alpha\bar{\lambda}\varrho}{\nu_3\gamma_1\sqrt{D}}}$$

$$\times \sum_{\substack{(\mu)_{2\nu} \\ \mu \equiv \lambda\,(2\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S\,\mathrm{sgn}\,\gamma\gamma_1\mu\sqrt{D}}\; N\,\sigma_{\lambda\mu,\,\nu_3\gamma_1}\,C\,(\mu,\varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Der Ausdruck

$$K\,(\mu,\varrho) = |N\mu|^{\frac{1}{2}}\,C^{-1}\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right) C\,(\mu,\varrho)$$

hängt nur vom Ideal (μ) ab und ist in μ multiplikativ:

$$K(\mu, \varrho) = K(\mu_1, \varrho) \cdot K(\mu_2, \varrho), \text{ falls } \mu = \mu_1 \mu_2 \text{ und } (\mu_1, \mu_2) = 1.$$

Da $|N\mu|^{\frac{1}{2}} C^{-1}\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right)$ nur von μ mod $4\,p_\infty$ abhängt, so wird die innere Summe von (35) gleich

$$\sum_{\substack{\varkappa \bmod p_\infty \\ \varkappa \equiv 1\,(2\,\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \gamma \gamma_1 \lambda \varkappa \sqrt{D}}\, N \sigma_{\varkappa,\, \nu_3 \gamma_1}\, C\left(\frac{1}{\lambda \varkappa \sqrt{D}}\right)}{|N \lambda \varkappa|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda \varkappa\,(2\,\nu\,p_\infty)}} \frac{K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Bezeichnen wir mit χ einen beliebigen Idealcharakter mod $2\,\nu\,p_\infty$, so läßt sich

$$\sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda \varkappa\,(2\,\nu\,p_\infty)}} \frac{K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}$$

aus den Reihen

$$Q(r+s, \varrho;\, \chi, \nu, r) = \sum_{(\mu)} \frac{\chi(\mu)\, K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}$$

linear kombinieren. Eine einfache Diskussion zeigt, daß $Q(r+s, \varrho; \chi, \nu, r)$ bis auf einen elementaren Faktor von der Struktur des Ausdrucks (54) in K I, § 3 gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2} + s,\ \chi(x)\left(\frac{\varrho}{x}\right)\right)}{L(k-1+2\,s,\ \chi^2(x))}$$

ist. Die Dirichletreihen T haben also die gleiche Bauart, wie die analogen Reihen, auf die man bei der Diskussion der entsprechenden Formen in einer Variablen in E geführt wird. Für die Dimension $-\frac{5}{2}$ ist noch nichts gewonnen, da die Konvergenzschwierigkeiten der Eisensteinreihen $G_{-\frac{5}{2}}$ auf diesem Wege aus Gründen, die später deutlich werden, nicht behoben werden können. Wir beginnen noch einmal bei der Formel (35) und setzen nun voraus, daß alle Primteiler von ν total positiv gewählt werden können, was stets dann der Fall ist, wenn die Norm der Grundeinheit von Z gleich -1 ist. Wir können demnach annehmen, daß

$$\nu \equiv \gamma \equiv \gamma_1 \equiv 1\ (p_\infty).$$

Dann geht die innere Summe von (35) über in

$$\Omega = \sum_{\substack{(\mu)_{2\,\nu} \\ \mu \equiv \lambda\,(2\,\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu \sqrt{D}}\, C(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Auf Grund des Reziprozitätsgesetzes für Gaußsche Summen gilt

$$e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu \sqrt{D}} = -\frac{|N\mu|^{\frac{k}{2}} C^k\left(\frac{-\mu}{4\sqrt{D}}\right)}{8^k C^k\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right)};$$

ferner ist

$$|N\mu|^{-\frac{k-1}{2}} C^{k-1}\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

so daß

$$\Omega = 8^{-k} C^k\left(\frac{-\lambda}{4\sqrt{D}}\right) \sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda\,(2\nu)}} \frac{\left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Ω läßt sich daher aus den Reihen

$$Q_1(r+s, \varrho; \chi, \nu, r) = \sum_{(\mu)} \frac{\chi(\mu)\left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}},$$

wo χ jetzt ein beliebiger Idealcharakter mod 2ν ist, linear zusammensetzen. Q_1 ist bis auf einen elementaren Faktor gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2}+s, \chi(x)\left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho}{x}\right)\right)}{L(k-1+2s, \chi^2(x))}.$$

Dieser wird bei $s=0$ genau dann singulär und hat dann einen Pol erster Ordnung, wenn $\chi(x)\left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho}{x}\right)$ Hauptcharakter ist.

Im Falle $k=3$ kann das nur für $\varrho = 0$ oder $-\varrho \equiv 1\ (p_\infty)$ eintreten. Verfolgt man die Entwicklungen zurück, so erkennt man schließlich, daß in den Fällen 1 und 3 unserer oben eingeführten Fallunterscheidung $T\left(\frac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, r\right)$ eine etwas komplizierte Linearkombination von Quotienten der Art

$$\frac{L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-\varrho}{x}\right)\right)}{L(2+2s, \chi^2(x))}$$

ist. Die Koeffizienten einer solchen Linearkombination sind in Abhängigkeit von s elementare Funktionen, in Abhängigkeit von ϱ — cum grano salis — eine Art von Teilersummen und gestatten eine im s Bereich

$$\text{(36)} \qquad \begin{aligned} -\tfrac{1}{4} &\leqq \Re s \leqq 1 \\ -1 &\leqq \Im s \leqq 1 \end{aligned}$$

gleichmäßige Abschätzung für $|N\varrho| \to \infty$, aus der hervorgeht, daß sie höchstens wie eine feste Potenz von $|N\varrho|$ wachsen. Im Fall 2 setzt sich $T(\frac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ aus Quotienten der Art

$$\frac{L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-2(\varrho+\eta)}{x}\right)\right)}{L(2+2s, \chi^2(x))}$$

zusammen, und es gilt der entsprechende Sachverhalt. Nach der Bedeutung von η ist daher der Ausdruck

$$T(\tfrac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)\, N\, A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, \tfrac{3}{2}) \tag{37}$$

bei $s=0$ stets regulär und hat überdies bei $s=0$ eine Nullstelle, falls $\varrho+\eta \not\equiv 1\ (p_\infty)$; denn das Doppelintegral hat in diesen Fällen eine Nullstelle im allgemeinen von erster, im besonderen für

$$\varrho+\eta=0 \quad \text{und} \quad -(\varrho+\eta) \equiv 1\ (p_\infty)$$

von zweiter Ordnung.

Bei der Abschätzung des Ausdrucks (37) ist jetzt folgendes zu beachten: Falls $r \geqq \frac{3}{2}$ und $\lambda \leqq 0$, so ist

$$A_\lambda(0, \tau, r) = 0 \qquad (\Im\mathfrak{m}\, \tau > 0)$$

und es resultiert eine im Bereich (36) gleichmäßige Abschätzung

$$\frac{1}{s} A_\lambda(s, \tau, r) = O(e^{-\delta|\lambda|}) \qquad (\lambda \to -\infty)$$

für ein gewisses $\delta > 0$. Kommt nun in (37) eine L-Reihe mit Hauptcharakter vor, so erhält man eine ausreichende Abschätzung, wenn man vom Doppelintegral den Faktor s abspaltet und ihn der L-Reihe anheftet. Handelt es sich um einen Nicht-Hauptcharakter, so gilt gleichmäßig im Bereich (36)

$$L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-\varrho}{x}\right)\right) = O(|N\varrho|^\varkappa) \qquad (|N\varrho| \to \infty).^{8)}$$

$$(\varkappa \text{ konstant} > 0).$$

Es gibt also (für $\varrho+\eta \neq 0$) für den Betrag des Ausdrucks (37) stets eine im Bereich (36) von s unabhängige Schranke der Gestalt

$$c_2 |N(\varrho+\eta)|^\varkappa e^{-\delta(|\varrho+\eta|+|\varrho'+\eta'|)}.$$

(c_1, c_2, $\varkappa$, δ bedeuten positive Konstanten.) Die Eisensteinreihe $G_{-\frac{3}{2}}$ in der Gestalt (25) besitzt also die von s unabhängige konvergente Majorante

$$c_1 + c_2 \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} |N(\varrho+\eta)|^\varkappa e^{-\delta(|\varrho+\eta|+|\varrho'+\eta'|)}. \tag{38}$$

[8]) Vgl. E. Landau, Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 152.

Damit ist die analytische Fortsetzung von $G_{-\frac{3}{2}}$ in eine volle Umgebung von $s=0$ bewerkstelligt und wir erhalten Formen zur Dimension $-\frac{3}{2}$. Trägt man die Nullwerte der Doppelintegrale in die Entwicklung (25) ein, so erhält man für $r \geqq \frac{3}{2}$ die Darstellungen

$$(39)\quad G_{-r}(\tau, 0; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0\,\delta(A)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_0 \sqrt{D}}$$
$$+ \frac{(2\pi)^k e_0 v_0(\gamma, \alpha_2)}{D^{\frac{k-1}{2}} (\Gamma(r))^2 |N\nu|^r} \cdot \sum_{\frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \gg 0} T(r, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)\, |N(\varrho+\eta)|^{r-1} e^{2\pi i S \frac{(\varrho+\eta)\tau}{\nu^* \sqrt{D}}},$$

wo über alle ganzen ϱ summiert wird, für die

$$\frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \gg 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \equiv 1 \quad (p_\infty).$$

Für $r=\frac{3}{2}$ gilt (39) nur unter den eingeführten Einschränkungen. Aus den Transformationsformeln der Reihen

$$G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = G_{-r}(\tau, 0; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$$

entnimmt man, daß $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ nur in den zu $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalenten Spitzen nicht verschwindet. Lineare Relationen mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten können demnach nur zwischen solchen Reihen bestehen, die in dem genannten Sinne zu demselben System äquivalenter Spitzen gehören. Indem man auf die Reihen $G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ zurückgreift, zeigt man mühelos, daß für eine beliebige Einheit ε die Relationen

$$(40)\quad \begin{aligned} G_{-r}(\tau; \varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \nu) &= e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)_{\!*} G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \text{ für } \alpha_1 \equiv 0\,(2),\\ G_{-r}(\tau; \varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \nu) &= e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)_{\!*} G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \text{ für } \alpha_1 \not\equiv 0\,(2) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dies sind auch alle, wenn man von vornherein die G_{-r} identifiziert, die sich im zweiten und dritten Argument nur um Zahlen $\equiv 0\,(\nu)$ unterscheiden. Es ist also bewiesen:

Satz 3. *Die Klassenzahl des reell quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante $D \equiv 5\,(8)$ sei gleich 1. Dann ist die Maximalzahl linear unabhängiger Eisensteinreihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ halbzahliger Dimension $-r \leqq -\frac{3}{2}$ zur Stufe $\nu \equiv 0\,(4)$ mit ϑ-Multiplikatoren gleich der Anzahl aller nach $\Gamma(\nu)$ inäquivalenten parabolischen Spitzen. Ist $\varphi(\tau)$ eine beliebige ganze Form der Dimension $-r$ zur Stufe ν mit ϑ-Multiplikatoren, so gibt es eine Linearkombination $A(\tau)$ der Reihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ derart, daß $\varphi(\tau) - A(\tau)$ eine Form ist, die in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Im Falle der Dimension $-\frac{3}{2}$ hat man noch vorauszusetzen, daß die Norm der Grundeinheit von $R(\sqrt{D})$ gleich -1 ist.*

Die mit $\varkappa^{-k}(A)$, $\underline{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$, multiplizierte Reihe

$$\varkappa^{-k}(A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{A},\, \nu)$$

hängt nur von dem System der zu $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalenten Spitzen ab, falls $\nu \equiv 0\ (8)$ vorausgesetzt wird. Sind nämlich $-\frac{\beta_2}{\beta_1}$ (reduzierter Bruch) und $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalent, so gibt es eine Einheit ε derart, daß

$$\beta_1 \equiv \varepsilon\alpha_1, \quad \beta_2 \equiv \varepsilon\alpha_2 \quad (\nu),$$

und es wird

$$\varkappa^{-k}(B)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{B},\, \nu) = \varkappa^{-k}(S_0 A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{S_0 A},\, \nu)$$
$$(\underline{B} = (\beta_1, \beta_2), \quad \underline{S_0} = (0,\, \varepsilon)).$$

Die Behauptung

$$\varkappa^{-k}(S_0 A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{S_0 A},\, \nu) = \varkappa^{-k}(A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{A},\, \nu)$$

ist dann auf Grund der Relationen (40) mit

$$\frac{\varkappa^{k}(S_0 A)}{\varkappa^{k}(A)} = \begin{cases} e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)_* & \text{für } \alpha_1 \not\equiv 0\ (2), \\ e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)_* & \text{für } \alpha_1 \equiv 0\ (2) \end{cases}$$

gleichwertig. Dies ergibt sich aber aus dem Reziprozitätsgesetz (Hecke, loc. cit. [7])). Mit Hilfe von

$$8^{-1}\, C\left(\frac{-\alpha}{4\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\alpha^3}{\sqrt{D}}} \qquad \text{für } 2 \nmid \alpha$$

folgt nämlich aus

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)_* = \frac{C\left(\frac{-\alpha\varepsilon}{4\sqrt{D}}\right)\cdot 8}{C\left(\frac{-\alpha}{4\sqrt{D}}\right) C\left(\frac{-\varepsilon}{4\sqrt{D}}\right)},$$

daß

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)_* = e^{\frac{\pi i r}{2} S \frac{\alpha^3(\varepsilon^3 - 1)}{\sqrt{D}}}\; e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}},$$

was jeweils behauptet wird.

Wir versuchen nun unter der Voraussetzung $\nu \equiv 0\ (8)$ aus den Reihen G_{-r} Formen zur ϑ-Gruppe Γ_{10} mit ϑ-Multiplikatoren $v(S)$ zu konstruieren. Es zeigt sich, daß dies auf genau eine Weise möglich ist. Die parabolischen Spitzen $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (in reduzierter Gestalt) zerfallen entsprechend der Tatsache, daß $\alpha_1\alpha_2 \equiv 0\ (2)$ oder $\alpha_1\alpha_2 \not\equiv 0\ (2)$, in zwei Klassen. Man sieht leicht ein, daß zwei Spitzen aus derselben Klasse stets, aus verschiedenen Klassen nie nach Γ_{10} äquivalent sind. In gleicher Weise zerfallen auch die Reihen $G_{-r}, (\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ in zwei Klassen. Gibt es nun eine Linearkombination der G_{-r}, die eine Form zu Γ_{10} darstellt, so auch schon eine solche, in der nur Reihen aus einer Klasse vorkommen. Mit einer Reihe kommen aber auch alle übrigen dieser Klasse vor; daraus folgt unter Berücksichtigung der Relationen (40) die eindeutige Bestimmtheit der Linearkombination durch die Klasse. Es gibt also zu jeder Klasse höchstens eine Form. Ich habe mich nun durch Rechnung überzeugt, daß es zu der Klasse, die durch $\alpha_1 \alpha_2 \not\equiv 0\ (2)$ gekennzeichnet ist, keine Linearkombination gibt. Zur anderen Klasse kann ich eine solche explizit angeben: Sei S_i, $i = 1, \ldots, v$, ein vollständiges System von Matrizen aus Γ_{10} derart, daß die Spitzen $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, $\underline{S_i} = (\gamma_i, \delta_i)$, nach $\Gamma(\nu)$ nicht äquivalent sind. Dann ist

$$G_{-r}(\tau) = \sum_{i=1}^{v} \varkappa^{-k}(S_i)\, G_{-r}(\tau; \underline{S_i}, \nu) \tag{41}$$

eine Form zu Γ_{10} mit ϑ-Multiplikatoren. Wenn nämlich $S \subset \Gamma_{10}$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, so folgt aus (17) und (22)

$$\frac{\varkappa^{-k}(S_i)\, G_{-r}(S\tau; \underline{S_i}, \nu)}{N(\gamma\tau + \delta)^r} = v(S) \cdot \varkappa^{-k}(S_i S)\, G_{-r}(\tau; \underline{S_i S}, \nu),$$

woraus die Behauptung erhellt. Im Rahmen einer systematischen Untersuchung werden wir im nächsten Paragraphen noch einmal auf die Form $G_{-r}(\tau)$ stoßen; es ist nämlich die Geschlechtsinvariante zur quadratischen Form $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$.

§ 3.

Aufstellung der analytischen Invariante des Formengeschlechts einer total positiv definiten quadratischen Form ungerader Variablenzahl.

Über den Körper Z sei nur

$$D \equiv 5\ (8)$$

vorausgesetzt.

Es sei

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{k} q_{\nu\mu}\, x_\nu\, x_\mu, \quad 2 \nmid k,$$

eine primitive total positiv definite quadratische Form, dabei

$$\mathfrak{Q} = (q_{\nu\mu})$$

eine ganzzahlige, symmetrische Matrix über Z mit den Hauptunterdeterminanten Δ_i, $i = 1, \ldots, k$; insbesondere ist

$$|\mathfrak{Q}| = \Delta = \Delta_k.$$

Setzen wir in fester Bedeutung

$$\nu = 8\, D\, \Delta_1\, \Delta_2 \ldots \Delta_k,$$

dann ist die ϑ-Reihe

$$f(\mathfrak{Q};\tau) = \sum_{u_1,\ldots,u_k \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{Q(u)\tau}{\sqrt{D}}}$$

eine Form der Dimension $-r = -\frac{k}{2}$ zu $\Gamma(\nu)$ mit dem Multiplikatorsystem v_0 [9]). Das Verhalten von $f(\mathfrak{Q};\tau)$ bei Annäherung von (τ, τ') an die Spitze $(-\omega, -\omega')$ $(\omega \subset Z)$ untersucht man mit der aus der Theorie der ϑ-Reihen in einer Variablen geläufigen Methode mit dem Resultat:

$$(42) \quad N(\tau+\omega)^r f(\mathfrak{Q};\tau) = \begin{cases} N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}^{-k} H(\mathfrak{Q},\omega) + o(1) & \text{für } 2 \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \\ o(1) & \text{für } 2 \nmid \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \end{cases}$$

dabei ist

$$\omega = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

$\mathfrak{a}$ der Idealnenner von ω und

$$H(\mathfrak{Q},\omega) = \sum_{\substack{\lambda_i \bmod \mathfrak{a} \\ i=1,\ldots,k}} e^{\pi i S \frac{Q(\lambda)\omega}{\sqrt{D}}} \qquad (2 \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Im weiteren Verlauf setzen wir $2 \mid \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ voraus. Ersetzt man in der asymptotischen Formel (42) τ durch $\tau_1 = S\tau$, also ω durch $\omega_1 = -S(-\omega)$, so gilt also auch, wenn ω_1 endlich und $\mathfrak{a}_1$ der Idealnenner von ω_1 ist,

$$N(\tau_1+\omega_1)^r f(\mathfrak{Q};\tau_1) = N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}_1^{-k} H(\mathfrak{Q},\omega_1) + o(1).$$

Für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, vermittelt dann die Gleichung

$$(43) \qquad f(\mathfrak{Q};\tau_1) = v_0(S)\, N(\gamma\tau+\delta)^r f(\mathfrak{Q};\tau)$$

zwischen den Hauptgliedern der asymptotischen Entwicklungen (42) und (43) eine Beziehung, aus der man nach einiger Rechnung schließlich

$$(44)\ N\mathfrak{a}_1^{-r} H(\mathfrak{Q},\omega_1) = v_0(S^{-1})\,\sigma_Z(\Omega, S^{-1})\, e^{-\frac{\pi i r}{2} S\, \mathrm{sgn}(-\gamma\omega+\delta)\sqrt{D}}\, N\mathfrak{a}^{-r} H(\mathfrak{Q},\omega)$$

gewinnt; dabei ist

$$\underline{\Omega} = (1, \omega).$$

Stellt man ω als Quotient ganzer Zahlen dar:

$$\omega = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

[9]) Vgl. H. D. Kloosterman, Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern, Math. Annalen **103** (1930), S. 279.

so wird (44) durch

$$\sigma_Z(\Omega, S^{-1}) = \sigma_Z(M, S^{-1})\, N\sigma_{\mu_1,\,-\gamma\omega+\delta}, \quad \underline{M} = (\mu_1, \mu_2),$$

$$N\sigma_{\mu_1,\,-\gamma\omega+\delta}\, e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}(-\gamma\omega+\delta)\sqrt{D}} = e^{-\frac{\pi i r}{2} S(\operatorname{sgn}(-\gamma\mu_2+\delta\mu_1)\sqrt{D} - \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D})}$$

in

$$(45)\quad N\mathfrak{a}_1^{-r} H(\mathfrak{Q}, \omega_1)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}(-\gamma\mu_2+\delta\mu_1)\sqrt{D}}$$

$$= v_0(S^{-1})\,\sigma_Z(M, S^{-1})\, N\mathfrak{a}^{-r} H(\mathfrak{Q}, \omega)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D}}$$

übergeführt. Wir definieren nun

$$w(M) = w(\mu_1, \mu_2) = N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}^{-r} H\left(\mathfrak{Q}, \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D}} \quad (\mu_1 \neq 0).$$

Gleichung (45) besagt dann, wenn man S^{-1} durch S ersetzt, daß

$$(46)\qquad w(MS) = \sigma_Z(M, S)\, w(M)\, v_0(S) \qquad S \subset \Gamma(\nu).$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, daß die ersten Elemente der Zeilen $\underline{MS}$ und $\underline{M}$ nicht verschwinden. Aus der Invarianzeigenschaft von $f(\mathfrak{Q};\tau)$ ergibt sich ferner, daß $w(S) = v_0(S)$ für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, $\gamma \neq 0$. Definieren wir noch für $\mu_2 \neq 0$:

$$w(M) = e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_2\sqrt{D}}, \quad \underline{M} = (0, \mu_2),$$

so folgt mühelos, indem man auf die Definition der Symbole zurückgeht, die Gültigkeit von (46) auch für $\mu_1 = 0$ oder $\alpha\mu_1 + \gamma\mu_2 = 0$. Wir fassen zusammen:

Satz 4. *Für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{M} = (\mu_1, \mu_2)$ gilt*

$$w(MS) = \sigma_Z(M, S)\, w(M)\, w(S), \quad w(S) = v_0(S),$$

falls $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ nicht prim zu 2, oder gleich ∞ ist.

Die asymptotischen Formeln (42) führen nun zur Aufstellung der Reihen

$$(47)\qquad F(\mathfrak{Q};\tau, s) = 1 + \sum_{\substack{\omega \\ 2 \mid \mathfrak{a}^2\omega \\ (\mathfrak{a}\omega,\, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}}} \frac{H(\mathfrak{Q}, \omega)}{N\Delta^{\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}^{k+s} N(\tau+\omega)^r\, |\tau+\omega|^s},$$

welche die Invarianzeigenschaft

$$\frac{F(\mathfrak{Q}; S\tau, s)}{N(\gamma\tau+\delta)^r\, |\gamma\tau+\delta|^s} = v_0(S)\, F(\mathfrak{Q};\tau, s) \text{ für } S \subset \Gamma(\nu),\ \underline{S} = (\gamma, \delta),$$

aufweisen. Wir bezeichnen den Wert $F(\mathfrak{Q};\tau)$ der in s analytischen Funktion $F(\mathfrak{Q};\tau, s)$ im Punkte $s = 0$ als die Geschlechtsinvariante zu $\mathfrak{Q}$; das rechtfertigt sich insofern, als sich $H(\mathfrak{Q}, \omega)$ nicht ändert, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch einen anderen Repräsentanten des Formengeschlechts zu $\mathfrak{Q}$ ersetzt. Der Nachweis, daß $F(\mathfrak{Q};\tau)$ für $k = 3$ existiert und sich aus den in § 2 konstruierten Eisensteinreihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ linear kombinieren läßt (vorausgesetzt, daß Z die Klassenzahl 1 hat und die Norm der Grundeinheit gleich -1 ist), bildet den wesentlichen Inhalt dieses Paragraphen. Da $H(\mathfrak{Q}, \omega)$ nur von ω mod 2 abhängt, so findet man mit Hilfe der Lipschitz-Formel (23) auf dem schon gewohnten Wege die Entwicklung

$$F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = 1 + \frac{1}{4^{r+s}\sqrt{D}\, N\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} T_\mu(s, r)\, B_\mu\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right), \tag{48}$$

dabei ist

$$T_\mu(s, r) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}} \frac{a_{\mathfrak{a}}(\mu)}{N\mathfrak{a}^{r+s}},$$

$$a_{\mathfrak{a}}(\mu) = \sum_{\substack{\omega \bmod 2 \\ 2 \mid \mathfrak{a}^2 \omega \\ (\mathfrak{a}\omega, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}}} \frac{H(\mathfrak{Q}, \omega)\, e^{\pi i S \frac{\mu\omega}{\sqrt{D}}}}{N\mathfrak{a}^r}$$

und $B_\mu\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right)$ in § 2 erklärt.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der singulären Reihe $T_\mu(s, r)$. Es bezeichne $A_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{Q}, \mu)$ die Anzahl der mod $\mathfrak{a}$ verschiedenen Darstellungen mod $\mathfrak{a}$ von μ durch die quadratische Form Q; dann gilt

$$\sum_{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}} \frac{a_{\mathfrak{a}}(\mu)}{N\mathfrak{a}^r} = \begin{cases} N\mathfrak{b}^{1-k} A_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{Q}, \mu) & \text{für } 2 \nmid \mathfrak{b}, \\ N(2\mathfrak{b})^{1-k} A_{2\mathfrak{b}}(\mathfrak{Q}, \mu) & \text{für } 2 \mid \mathfrak{b}. \end{cases} \tag{49}$$

Der Nachweis erfolgt durch identische Umformungen (vgl. Siegel, loc. cit. [3])), wenn man beachtet, daß

$$N\mathfrak{a}^k A_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{Q}, \mu) = \sum_{\substack{\mathfrak{r}_j \subset \mathfrak{o} \\ \mathfrak{r}_j \bmod \mathfrak{a}}} \sum_{\substack{\omega \subset \mathfrak{a}^{-1} \\ \omega \bmod 1}} e^{-2\pi i S \frac{(Q(\mathfrak{r}) - \mu)\omega}{\sqrt{D}}}$$

und eine Gaußsche Summe

$$\sum_{\substack{\mathfrak{r}_j \subset \mathfrak{o} \\ \mathfrak{r}_j \bmod \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S \frac{Q(\mathfrak{r})\omega}{\sqrt{D}}}$$

notwendig verschwindet, falls der Idealnenner $\mathfrak{a}$ von ω genau einmal durch 2 teilbar ist (dabei wird vorausgesetzt, daß die Diagonalelemente q_{ii} nicht alle gerade sind). Aus den Gleichungen (49) beweist man, etwa durch Induktion nach der Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{a}$, die Multiplikativität der $a_{\mathfrak{a}}(\mu)$:

$$a_{\mathfrak{a}_1}(\mu)\, a_{\mathfrak{a}_2}(\mu) = a_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}(\mu) \quad \text{für} \quad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{o};$$

diese ist nämlich für $A_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{Q}, \mu)$ fast selbstverständlich. Die Berechnung von $a_{\mathfrak{p}^\nu}(\mu)$, auf die es jetzt nur noch ankommt, wird für $\mathfrak{p} \neq 2$ dadurch ermöglicht, daß man $\mathfrak{Q}$ mod $\mathfrak{p}^\nu$ minmodular auf Diagonalgestalt transformieren kann. Für $\mathfrak{p} = 2$ beachte man, daß

(50) $$a_{2^\nu}(\mu) = 0,$$

sobald

$$\nu > 2h + 3, \quad (2^h \mid \mu,\ 2^{h+1} \nmid \mu).$$

Das ist so einzusehen: Falls $2 \nmid \alpha$, so ist

$$H\left(\mathfrak{Q}, \frac{\alpha}{2^\nu}\right) = N\,2^{a\,k} \sum_{\substack{\mu_j \subset \mathfrak{o} \\ \mu_j \bmod 2^{\nu - a} \\ \sum_l q_{j\,l}\mu_l \equiv 0\,(2^a) \\ j = 1, \ldots, k}} e^{-\pi i S \frac{Q(\mu)\,\alpha}{2^\nu \sqrt{D}}} \text{ für } 0 \leqq a \leqq \frac{\nu - 1}{2}$$

(Beweis durch Induktion nach a). $H\left(\mathfrak{Q}, \dfrac{\alpha}{2^\nu}\right)$ hängt also nur von $\alpha \bmod 2^{\nu + 1 - \left[\frac{\nu - 1}{2}\right]}$ ab; daraus folgt dann schließlich die Behauptung (50). $Q(\mu, \mathfrak{p})$ sei, wie folgt, erklärt:

$$Q(\mu, \mathfrak{p}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ vollständig zerfällt,} \\ -1, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ unzerlegt bleibt,} \\ 0, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ verzweigt ist.} \end{cases}$$

Dann ist für $\mu \neq 0$ $T_\mu(s, r)$ bis auf einen elementaren Faktor gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2} + s, Q\left((-1)^{\frac{k-1}{2}} \Delta\,\mu, \mathfrak{a}\right)\right)}{\zeta_Z(k - 1 + 2s)},$$

wobei ζ_Z die ζ-Funktion von Z ist, und $T_0(s, r)$ ist bis auf einen ebenfalls elementaren Faktor gleich

$$\frac{\zeta_Z(k - 2 + 2s)}{\zeta_Z(k - 1 + 2s)}.$$

Im Falle $k = 3$ folgt die analytische Fortsetzbarkeit bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ mit der Schlußweise des § 2. Wir erhalten demnach für $k \geqq 3$ die Geschlechtsinvarianten

$$F(\mathfrak{Q}; \tau) = 1 + \frac{\pi^k}{N\,\Delta^{\frac{1}{2}}\,D^{\frac{k-1}{2}}\,(\Gamma(r))^2} \sum_{\mu \gg 0} T_\mu(0, r)\,N\,\mu^{r-1}\,e^{\pi i S \frac{\mu\,\tau}{\sqrt{D}}},$$

deren weitere Diskussion sich im Hinblick auf die Siegelsche Theorie der quadratischen Formen (loc. cit. [3])) erübrigt.

Hat Z die Klassenzahl 1, was wir jetzt voraussetzen, so geht die Reihe (47) nach Definition von w über in

$$F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \frac{w(M)}{N(\mu_1\tau + \mu_2)^r\,|\mu_1\tau + \mu_2|^s}, \quad \underline{M} = (\mu_1, \mu_2),$$

dabei ist $\mathfrak{S}$ ein vollständiges System solcher Matrizen aus Γ_{10}, die zu je zweien mod 1 nicht assoziierte zweite Zeilen haben. Nach der Herleitung der Reihe hängt sie natürlich von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}$ nicht ab. Wir bestimmen jetzt:

1. Ein vollständiges System von Matrizen S_j, $j = 1, \ldots, v$, aus Γ_{10}, $\underline{S_i} = (\gamma_j, \delta_j)$, derart, daß die Spitzen $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ und $-\frac{\delta_j}{\gamma_j}$ für $i \neq j$ nach $\Gamma(\nu)$ nicht äquivalent sind,

2. ein vollständiges System $\mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ von Matrizen aus $S_j\Gamma(\nu)$ mit mod 1 nicht assoziierten zweiten Zeilen,

3. ein vollständiges System von mod p_∞ inkongruenten Einheiten $\varepsilon_i \equiv 1\ (\nu)$, $i = 1, \ldots, e_0$ (also $e_0 = 1$ oder 2), $H_i \subset \Gamma(\nu)$ derart, daß

$$\underline{H_i} = (0,\ \varepsilon_i).$$

Dann hat $\sum\limits_j \mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ die charakteristischen Eigenschaften von $\mathfrak{S}$, und $\sum\limits_i H_i\,\mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ ist ein vollständiges System von Matrizen aus $S_j\Gamma(\nu)$ mit mod νp_∞ nicht assoziierten zweiten Zeilen; ein solches System hatten wir mit $\mathfrak{S}(S_j, \Gamma(\nu))$ bezeichnet. Wählen wir demnach

$$\mathfrak{S} = \sum_j \mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu)),$$

so wird

$$\sum_i H_i\,\mathfrak{S} = \sum_j \mathfrak{S}(S_j, \Gamma(\nu)),$$

mithin auf Grund von Satz 4:

$$e_0\,F(\mathfrak{Q};\tau,s) = \sum_j \frac{w(S_j)}{v_0(S_j)} \cdot \sum_{M \subset \mathfrak{S}(S_j,\Gamma(\nu))} \frac{v_0(M)}{N(\mu_1\tau + \mu_2)^r\,|\mu^1\tau + \mu_2|^s}.$$

Damit erhalten wir das gewünschte Resultat

$$F(\mathfrak{Q};\tau) = \frac{1}{e_0} \sum_j \frac{w(S_j)}{v_0(S_j)}\,G_{-r}(\tau;\underline{S_j},\nu)$$

(für $k = 3$ nur unter den genannten Einschränkungen für $R(\sqrt{D})$). Insgesamt gilt also:

Satz 5. *Die Geschlechtsinvariante $F(\mathfrak{Q};\tau)$ zu einer primitiven total positiv definiten quadratischen Form $\mathfrak{Q}$ ungerader Variabelnzahl $k \geqq 3$ ist eine Form zur Stufe $\nu = 8\,D\,\Delta_1\,\Delta_2 \ldots \Delta_k$; dabei sind Δ_i $(i = 1, \ldots, k)$, die Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{Q}$. Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist $F(\mathfrak{Q};\tau)$ eine Linearkombination der Eisensteinreihen $G_{-r}(\tau;\alpha_1,\alpha_2,\nu)$*, wobei $r = \frac{k}{2}$.

(Eingegangen am 15. September 1937.)