

Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik

Von

HANS MAASS in Heidelberg

Einleitung

Während das Problem der räumlichen Verteilung der Punkte und Untergitter in einem euklidischen Gitter einer Behandlung zugänglich, wenngleich auch noch nicht in voller Allgemeinheit gelöst ist [4], zeigte sich bisher kein Ansatzpunkt, um analoge Fragestellungen für Gitter mit indefiniter Metrik in Angriff nehmen zu können. In dieser Hinsicht scheint sich, wie im folgenden dargetan werden soll, das Prinzip der Fourierentwicklung in der Siegelschen Theorie der indefiniten quadratischen Formen [8] in gewisser Weise als nützlich zu erweisen.

Zu einer vorgegebenen rationalen symmetrischen Matrix $S = S^{(m)}$ der Signatur $(n, m - n)$ mit $0 < n < m$ bilde man in bekannter Weise die Thetareihe

$$(1) \quad f(z; S, P) = \sum_{\mathfrak{g}} e^{\pi i R |\mathfrak{g}|^2},$$

wobei über alle ganzen Spalten \mathfrak{g} summiert wird und $R = xS + iyP$ mit reellen x, y sowie $z = x + iy$ gesetzt ist. P bezeichnet eine Majorante von S , d. h. eine Lösung von

$$(2) \quad PS^{-1}P = S, \quad P > 0.$$

Eine Parameterdarstellung für die P wird durch

$$(3) \quad P = 2K - S, \quad K = W^{-1}[X'S], \quad W = S[X] > 0, \quad X = X^{(m, n)}$$

geliefert. Die Automorphismen U von S , d. h. die reellen U mit $S[U] = S$ bilden den zu S gehörigen Majorantenraum $\mathfrak{P}(S)$ vermöge $P \rightarrow P[U^{-1}]$ auf sich ab und lassen die durch

$$(4) \quad ds^2 = \sigma(P^{-1}dP P^{-1}dP) \quad (\sigma = \text{Spur})$$

definierte Metrik von $\mathfrak{P}(S)$ invariant. dv bezeichne das zugehörige invariante Volumenelement in $\mathfrak{P}(S)$. Die ganz rationalen U in der Gruppe $\Omega(S)$ aller Automorphismen von S bilden die volle Einheitengruppe von S . $\Gamma(S)$ sei irgendeine ihrer Untergruppen von endlichem Index und $\mathfrak{F}(S)$ ein Fundamentalbereich bezüglich $\Gamma(S)$ in $\mathfrak{P}(S)$. Das Volumen $V(S)$ von $\mathfrak{F}(S)$ ist endlich, wenn wir den Fall ausschließen, daß zugleich $m = 2$ und $\sqrt{-|S|}$ rational ist, was im folgenden geschehen soll. Im ternären Fall $m = 3, n = 1$, der uns besonders beschäftigen wird, ist $\Gamma(S)$ stets eine in gewisser Weise ausgewählte echte Untergruppe der vollen Einheitengruppe von S .

Für jede Funktion $f(P)$, die wie $f(z; S, P)$ gegenüber den Substitutionen $P \rightarrow P\{U\}$ ($U \in F(S)$) invariant ist, kann formal der Integralmittelwert

$$(5) \quad I\{f(P)\} = \frac{1}{V(S)} \int_{\mathfrak{F}(S)} f(P) dv$$

gebildet werden. Durch eingehendes Studium der Mittelwerte

$$(6) \quad g(z, S) = I\{f(z; S, P)\}$$

gelangt C. L. SIEGEL sodann zu seiner analytischen Theorie der indefiniten quadratischen Formen. Im Hinblick auf gewisse Untersuchungen im Bereich der positiv definiten quadratischen Formen war es nun naheliegend, allgemein automorphe Funktionen der Art $f(P)$ in eine Reihe nach invarianten Eigenfunktionen des Laplace-Beltramischen Operators Δ_S von $\mathfrak{F}(S)$ zu entwickeln. Wir denken uns eine solche Eigenfunktion als zweimal stetig differenzierbare Funktion von X dargestellt und haben demgemäß zu fordern

1. $u(UXV) = u(X)$ für $U \in F(S)$, $|V| \neq 0$, $S[X] > 0$,
- (7) 2. $\Delta_S u(X) + \lambda u(X) = 0$ mit konstantem $\lambda (\geq 0)$,
3. die quadratische Integrierbarkeit von $u(X)$ über $\mathfrak{F}(S)$.

Der Reihenentwicklung von $f(P)$ entspricht die Bildung der Fourierkoeffizienten $I\{f(P)u(X)\}$. Damit werden wir auf die Funktionen

$$(8) \quad g(z; S, u) = I\{f(z; S, P)u(X)\}$$

geführt.

Hinsichtlich der Vollständigkeit des Ansatzes ist zu bemerken, daß das kontinuierliche Spektrum von Δ_S hier außer acht bleibt. Mit dem Auftreten eines solchen ist immer dann zu rechnen, wenn $S[x]$ eine Nullform ist, d. h. stets im Falle $m \geq 5$. Die Existenz von $g(z; S, u)$ ist dann gewährleistet, wenn $f(z; S, P)$ über $\mathfrak{F}(S)$ quadratisch integrierbar ist. Auf Grund der Abschätzungen in [8], S. 29 ist festzustellen, daß $m - q - 3 > 0$ eine hinreichende Bedingung für die quadratische Integrierbarkeit von $f(z; S, P)$ über $\mathfrak{F}(S)$ ist. Dabei ist q eine gewisse ganze Zahl im Intervall $0 \leq q \leq \text{Min}(n, m - n)$, die genau dann verschwindet, wenn $S[x]$ keine Nullform ist. Diese etwas summarische Betrachtung ergibt die Gültigkeit aller Betrachtungen unter der Voraussetzung $m > 3 + \text{Min}(n, m - n)$ oder der Annahme, daß $S[x]$ keine Nullform ist. Im besonderen ist zu beachten, daß im Falle $m = 3$ ein kompakter Fundamentalbereich $\mathfrak{F}(S)$ genau dann existiert, wenn $S[x]$ nicht Nullform ist, worauf bereits in [2], S. 530—532 hingewiesen wurde. Da in den Abschätzungen in [8], S. 29 an Stelle der unendlichen Reihen $f(z; S, P)$ jeweils die zugehörigen Betragreihen genommen werden, so sind auch die in den folgenden Rechnungen erforderlichen Vertauschungen von Summationen und Integrationen zu rechtfertigen.

Die explizite Bestimmung der Fourierentwicklung von $g(z; S, u)$ ist im wesentlichen mit der Berechnung des Integrals

$$(9) \quad \chi(y) = \chi(y; S, g, u) = |W|^{\frac{n+1-m}{2}} \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{F}_s(S, g)}} e^{-2\pi y w} u(X) \frac{[dX]}{[dW]}$$

geleistet. Hierin ist \mathfrak{g} eine ganze Spalte, $w = (S[X])^{-1} [X' S \mathfrak{g}]$, W eine positive Matrix und $\mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})$ ein Fundamentalbereich in $S[X] > 0$ bezüglich der Gruppe der Substitutionen $X \rightarrow UX$ mit $U \in \Gamma(S, \mathfrak{g}) = \{U : U \in \Gamma(S), U\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$. Der Quotient der Volumenelemente $|dX|$ und $|dW|$ ist im Sinne von SIEGEL [8] zu verstehen. Die Methode, mit der $\chi(y)$ in [8] im Falle $u = 1$ berechnet wurde, beruht auf geschickter Anwendung von Teilintegrationen und Integraltransformationen; sie läßt sich aber nicht unmittelbar auf den allgemeinen Fall anwenden. Hier ist entscheidend, daß mit Hilfe einer Greenschen Formel zunächst die Differentialgleichung

$$(10) \quad y^2 \chi''(y) + y \left(2\pi t y + \frac{m}{2} \right) \chi'(y) + \left(\pi t y n + \frac{\lambda}{4} \right) \chi(y) = 0$$

mit $t = S[\mathfrak{g}]$ bewiesen werden kann. Man erhält sie, indem man die Differentiationen nach y unter dem Integralzeichen ausführt. Die Zusammenfassung aller Integrale ergibt einen Integranden, der, wie eine längere Rechnung zeigt, mit $\frac{1}{4} u(X) (A_S + \lambda) e^{-2\pi y w}$ identisch ist. Verschiebt man nun mit Hilfe der Greenschen Formel den Operator A_S von $e^{-2\pi y w}$ auf $u(X)$, so wird das Integral unmittelbar in 0 übergeführt, womit (11) bewiesen ist. Es sei v eine Lösung von $v(v + m - 2) + \lambda = 0$. Als Lösung von (10) ist dann $\chi(y)$ von der Gestalt

$$(11) \quad \chi(y) = \begin{cases} a_0 y^{\frac{r}{2}} W_0(y, \frac{m}{2} + v) + b_0 y^{\frac{r}{2}} & \text{für } t = 0, \\ a(\pi|t|y)^{\frac{r}{2}} e^{-\pi|t|y} W(\pi|t|y; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}, \text{sgnt}) & \text{für } t \neq 0, \end{cases}$$

wenn

$$(12) \quad W_0(y, \gamma) = \frac{y^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(\log y)^\alpha}{\alpha!} (1-\gamma)^{\alpha-1}$$

und

$$(13) \quad W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \quad (\varepsilon^2 = 1)$$

gesetzt wird. $W_{\alpha, \mu}(y)$ bezeichnet die Whittakersehe Funktion.

Man sieht nun leicht, daß die Funktion

$$(14) \quad h(z; S, u) = (\pi y)^{\frac{r}{2}} g(z; S, u)$$

eine Fourierentwicklung der folgenden Art gestattet:

$$(15) \quad h(z; S, u) = \alpha_0(S, u) W_0(y, \frac{m}{2} + v) + \beta_0(S, u) + \sum_{t \neq 0} \alpha_t(S, u) |t|^{\frac{m+v}{2}-1} W(\pi|t|y; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}, \text{sgnt}) e^{\pi i x t}.$$

Eine genauere Diskussion, die auf die Einführung der Maßzahlen in [8] Bezug nimmt, zeigt, daß $\alpha_t(S, u)$ von der Gestalt

$$(16) \quad \alpha_t(S, u) = \frac{2^{-\frac{m}{4}} \pi^{\frac{m}{2}} \|S\|^{-\frac{1}{2}} M(S, t, u)}{\Gamma\left(\frac{m+(2n-m)\varepsilon}{4}\right) \mu(S)} \quad (\varepsilon = \text{sgnt})$$

ist, wobei $\mu(S)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $V(S)$ übereinstimmt und

$$(17) \quad M(S, t, u) = \sum_{S[\mathfrak{g}] = t} \mu(S, \mathfrak{g}, u)$$

ist mit gewissen Gewichtsfunktionen $\mu(S, \mathfrak{g}, u)$, die in jedem Fall Integralmittelwerte von $u(X)$ über gewissen Bereichen sind. Summiert wird hier über ein volles System ganzer, bezüglich $\Gamma(S)$ paarweise nicht assoziierter Lösungen \mathfrak{g} von $S[\mathfrak{g}] = t$. Genauere Aussagen sind nur im Fall $n = 1$ möglich. Dann ist der Majorantenraum mit dem $(m - 1)$ -dimensionalen hyperbolischen Raum identisch. Besonders einfach gestalten sich daher die Verhältnisse im ternären Fall $m = 3, n = 1$ in welchem

$$(18) \quad \mu(S, \mathfrak{g}, u) = \begin{cases} \frac{\pi \|S\|^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{E(S, \mathfrak{g})} u(\mathfrak{g}) & \text{für } t > 0, \\ \|S\|^{-\frac{3}{2}} |t|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) u(\mathfrak{g}) & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gilt. Dabei ist $E(S, \mathfrak{g})$ die Ordnung von $\Gamma(S, \mathfrak{g})$ im Falle $t > 0$ und $l(S, \mathfrak{g})$ die Verschiebungslänge einer erzeugenden Substitution in $\Gamma(S, \mathfrak{g})$ sowie $u(\mathfrak{g})$ der Integralmittelwert von $u(x)$ längs der hyperbolischen Geraden, die als Polare zu \mathfrak{g} gekennzeichnet werden kann, sofern $t < 0$ ist. Hinsichtlich der ersten Koeffizienten in (15) wird nur gezeigt, daß

$$(19) \quad \alpha_0(S, u) = 0, \quad \beta_0(S, u) = I\{u\}$$

ist, wenn $S[x]$ keine Nullform ist.

Aus der Transformationsformel

$$(20) \quad f\left(-\frac{1}{z}; S, P\right) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{n}{2}} (i\bar{z})^{\frac{m-n}{2}} f(z; S^{-1}, P^{-1}),$$

die in der üblichen Weise zu beweisen ist, erhält man nach Multiplikation mit $u(X)$ und Bildung der Integralmittelwerte unmittelbar

$$(21) \quad h\left(-\frac{1}{z}; S, u\right) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{n+p}{2}} (i\bar{z})^{\frac{m-n+p}{2}} h(z; S^{-1}, \tilde{u})$$

mit $\tilde{u}(X) = u(S^{-1}X)$. Die Entwicklung (15) setzt

$$(22) \quad \left\{ y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{m-2n}{2} iy \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{m}{2} + \nu \right) y \frac{\partial}{\partial y} \right\} h(z; S, u) = 0$$

in Evidenz. Damit ist der Anschluß an die Theorie der Funktionen mit Dirichletscher Reihenentwicklung und Riemannscher Funktionalgleichung [6] gewonnen. Hier sei nur hervorgehoben, daß gewisse Linearkombinationen $\xi(s; S, u)$ und $\eta(s; S, u)$ von

$$(23) \quad \begin{aligned} \varphi\left(s - \frac{\nu}{2}; S, u\right) &= \sum_{t > 0} \alpha_t(S, u) t^{\frac{m+p}{2} - 1 - s}, \\ \psi\left(s - \frac{\nu}{2}; S, u\right) &= \sum_{t < 0} \alpha_t(S, u) (-t)^{\frac{m+p}{2} - 1 - s} \end{aligned}$$

mit Gammafaktoren der Art

$$(24) \quad \Gamma(s; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} W(y; \alpha, \beta, 1) y^{s-1} dy$$

als Koeffizienten meromorphe Funktionen von s sind. Um daraus den mero-

morphen Charakter von $q(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ erschließen zu können, muß man wissen, daß sich die Nennerdeterminante

$$(25) \quad D(s; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \Gamma(s; \alpha, \beta) & \Gamma(s; \beta, \alpha) \\ \Gamma(s+1; \alpha, \beta) & \Gamma(s+1; \beta, \alpha) \end{vmatrix}$$

die bei der Auflösung nach $q(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ erscheint, vernünftig verhält. Es ergibt sich die bemerkenswert einfache Formel

$$(26) \quad D(s; \alpha, \beta) = 2 \Gamma(s) \Gamma(s+1 - \alpha - \beta),$$

die alle erforderlichen Schlüsse gestattet. Dieser Sachverhalt ist auch noch für das allgemeine Theorem in [6], S. 256 von Bedeutung.

Die letzten Betrachtungen sind einem Gitterpunktproblem im ternären Fall $m = 3, n = 1$ gewidmet. Hier ist voranzusetzen, daß $S[x]$ keine Nullform ist. Die Theorie der Eigenfunktionen $u(X)$ zu A_S gestaltet sich nun besonders einfach, weil das Spektrum des Operators A_S diskret ist und jeder Eigenwert λ endliche Vielfachheit hat. Wir denken uns den Fundamentalbereich $\mathfrak{F}(S)$ als Normalpolygon gewählt. \mathfrak{B} bezeichne einen beliebigen, im Riemannschen Sinne meßbaren Teilbereich von $\mathfrak{F}(S)$. \mathfrak{B}_0 sei der entsprechende Bereich in $S[x] > 0$, der mit x auch rx ($r > 0$) enthalte. Schließlich sei $\alpha_q(S, \mathfrak{B})$ die Anzahl der ganzen $\mathfrak{g} \in \mathfrak{B}_0$ mit $0 < S[\mathfrak{g}] \leq q$. Aus den analytischen Eigenschaften der Funktionen $q(s; S, u)$ wird dann nach einem Verfahren, das ursprünglich auf HECKE zurückgeht, und das sich auch in [4] bewährt hat, die asymptotische Formel

$$(27) \quad \alpha_q(S, \mathfrak{B}) \sim \frac{2\pi}{3} \|S\|^{-\frac{1}{2}} V(\mathfrak{B}) q^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } q \rightarrow \infty$$

gewonnen. Hierbei ist $V(\mathfrak{B})$ der hyperbolische Inhalt von \mathfrak{B} .

§ 1. Transformationen im Majorantenraum

Allgemein sei $E^{(k)}$ die k -reihige Einheitsmatrix und $C = C^{(m)}$ eine feste reelle Matrix mit der Eigenschaft

$$(28) \quad S[C] = S_0 \begin{pmatrix} E^{(m)} & 0 \\ 0 & E^{(m-n)} \end{pmatrix}.$$

Sodann wird mit reellem $Y = Y^{(n, m-n)}$ und nicht-singulärem $H = H^{(n)}$

$$(29) \quad X = C \begin{pmatrix} E \\ -Y' \end{pmatrix} H$$

gesetzt. Die über (3) hergestellte Beziehung $Y \rightarrow P$ bildet das Gebiet $E - Y Y' > 0$, wie bereits in [8] festgestellt wurde, umkehrbar eindeutig auf den Majorantenraum $\mathfrak{B}(S)$ ab. Die metrische Fundamentalform und das zugehörige Volumenelement stellen sich in der Gestalt

$$(30) \quad ds^2 = \sigma \{ (E - Y Y')^{-1} dY (E - Y' Y)^{-1} dY \}$$

und

$$(31) \quad dv = |E - Y Y'|^{-\frac{m}{2}} [dY]$$

dar. Die Isometrie $P \rightarrow P[U^{-1}] (U \in \Omega(S))$ entspricht der Abbildung $X \rightarrow UX$ und induziert im Y -Raum die Transformation

$$(32) \quad Y \rightarrow (YC_0 + D_0)^{-1} (YA_0 + B_0),$$

wobei

$$(33) \quad U_0 = C^{-1}UC = \begin{pmatrix} -D'_0 & C'_0 \\ B'_0 & -A'_0 \end{pmatrix}, \quad S_0[U_0] = S_0$$

ist.

Der Fall $n = 1$ gestattet eine etwas ausführlichere Diskussion. Wir setzen nun

$$(34) \quad \begin{aligned} Y &= y' = (y_\beta) & (\beta = 1, 2, \dots, m-1), \\ X &= x = (x_\alpha) & (\alpha = 0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Die Elemente von x können zufolge $x = C \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix} h (h \neq 0)$ als ein System homogener Koordinaten in $\mathfrak{P}(S)$ angesehen werden. $\mathfrak{P}(S)$ erscheint nun als Bild der offenen Kugel $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{m-1}^2 < 1$. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{P}(S)$ in den Halbraum $\xi_1 > 0$ vermittelt das System der Gleichungen

$$(35) \quad y_1 = \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_{m-1}^2 - 1}{\xi_1^2 + \dots + \xi_{m-1}^2 + 1}, \quad y_\alpha = \frac{2\xi_\alpha}{\xi_1^2 + \dots + \xi_{m-1}^2 + 1} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, m-1)$$

und das dazu inverse System

$$(36) \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_{m-1}^2}}{1 - y_1}, \quad \xi_\alpha = \frac{y_\alpha}{1 - y_1} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, m-1).$$

Für die metrische Fundamentalf orm ergibt sich nun nach einfacher Rechnung der Ausdruck

$$(37) \quad ds^2 = \xi_1^{-2} (d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_{m-1}^2).$$

$\mathfrak{P}(S)$ ist demnach mit dem $(m-1)$ -dimensionalen hyperbolischen Raum identisch und der Laplace-Beltramische Operator lautet

$$(38) \quad \Delta_S = \xi_1^{m-1} \sum_{\alpha=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\xi_1^{3-m} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right).$$

Von besonderem Interesse ist eine geometrische Interpretation der Funktion $w = (S[X])^{-1} [X' Sg]$, wobei g eine von 0 verschiedene Spalte bezeichnet. Im vorliegenden Fall ist also, wenn $q = (q_\alpha) (\alpha = 0, 1, \dots, m-1)$ durch $g = Cq$ eingeführt wird,

$$(39) \quad \begin{aligned} w &= \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{m-1} y_\alpha^2 \right)^{-1} \left(q_0 + \sum_{\alpha=1}^{m-1} q_\alpha y_\alpha \right) \\ &= \frac{1}{4\xi_1^2} \left\{ (q_0 + q_1) \sum_{\alpha=1}^{m-1} \xi_\alpha^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^{m-1} q_\alpha \xi_\alpha + q_0 - q_1 \right\}^2. \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, daß

$$(40) \quad S[g] = S_0[q] = t$$

von 0 verschieden ist. Entsprechend dem Vorzeichen von t läßt sich eine Isometrie $(\xi_x) \rightarrow (\hat{\xi}_x)$ angeben, so daß

$$(41) \quad w = \begin{cases} t \left(\frac{\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + \cdots + \hat{\xi}_{m-1}^2 + 1}{\hat{\xi}_1} \right)^2 & \text{für } t > 0, \\ -t \left(\frac{\hat{\xi}_2}{\hat{\xi}_1} \right)^2 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

wird. Nun ist, wie leicht festgestellt werden kann,

$$(42) \quad \frac{\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + \cdots + \hat{\xi}_{m-1}^2 + 1}{\hat{\xi}_1} = 2 \operatorname{Cos} \varrho,$$

wenn ϱ den hyperbolischen Abstand vom Punkt $\hat{\xi}_1 = 1$, $\hat{\xi}_x = 0$ ($x > 1$) bezeichnet und

$$(43) \quad \frac{\hat{\xi}_2}{\hat{\xi}_1} = \operatorname{Sin} \varrho,$$

wobei jetzt $|\varrho|$ den hyperbolischen Abstand von der hyperbolischen Ebene $\hat{\xi}_2 = 0$ bedeutet. Beachtet man noch, daß im Falle $t < 0$ die durch

$$(44) \quad (q_0 + q_1) \sum_{\alpha=1}^{m-1} \xi_\alpha^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{m-1} q_\alpha \xi_\alpha + q_0 - q_1 = 0$$

bestimmte hyperbolische Ebene mit dem in $S[x] > 0$ gelegenen Teil der Polaren zu \mathfrak{g} bezüglich der Hyperfläche $S[x] = 0$ identisch ist, so kann auf Grund des Invarianzcharakters von ϱ leicht geschlossen werden, daß

$$(45) \quad w = \begin{cases} t \operatorname{Cos}^2 \varrho & \text{für } t > 0, \\ -t \operatorname{Sin}^2 \varrho & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gilt, wobei $\varrho = \varrho(x, \mathfrak{g})$ im Falle $t > 0$ den hyperbolischen Abstand der Punkte x und \mathfrak{g} und im Falle $t < 0$ vom Vorzeichen abgesehen den hyperbolischen Abstand des Punktes x von der zu \mathfrak{g} gehörigen Polaren bezeichnet.

Die Relationen zwischen den Automorphismen U von S und den Bewegungen des hyperbolischen Raumes lassen sich im ternären Fall $m = 3$, $n = 1$, auf den sich die letzten Betrachtungen dieses Paragraphen beziehen, auf Grund einer speziellen Parameterdarstellung besonders einfach beschreiben. Gemäß (33) genügt die Kenntnis der Automorphismen U_0 von S_0 . Da nur die Abbildungen $P \rightarrow P[U^{-1}]$ interessieren, wir folglich zwischen U_0 und $-U_0$ nicht zu unterscheiden brauchen, genügt es, aus den Restklassen der Faktorgruppe $\Omega(S_0)/\{\pm E\}$ jeweils einen Repräsentanten auszuwählen. Das geschieht bekanntlich [2] durch die Parameterdarstellung

$$(46) \quad U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2) & -ab - cd \\ \frac{1}{2}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) & \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) & ab - cd \\ -ac - bd & ac - bd & ad + bc \end{pmatrix},$$

wobei a, b, c, d reelle Zahlen mit der Determinante $ad - bc = \varepsilon(\varepsilon^2 = 1)$ sind. Die Abbildung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow U_0$ ist ein Homomorphismus mit dem Kern $\{\pm E\}$. Es sei nun $I(S)$ die Gruppe derjenigen Einheiten $U = CU_0C^{-1}$ von S , die

durch (46) mit $\varepsilon = 1$ geliefert werden. Das heißt $\Gamma(S)$ hat in der Gruppe aller Einheiten von S den Index 2 oder 4. Diese Auswahl von $\Gamma(S)$ entspricht der Beschränkung in der Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene auf die winkeltreuen Abbildungen. Wird

$$(47) \quad \xi = \xi_2, \quad \eta = \xi_1, \quad \tau = \xi + i\eta$$

gesetzt, so ist

$$(48) \quad \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

die Darstellung der Bewegung, welche durch die Abbildung $P \rightarrow P[U^{-1}]$ ($U \in \Gamma(S)$) definiert wird.

Wir betrachten die Automorphismen U von S , die durch (46) geliefert werden und eine von 0 verschiedene Spalte \mathfrak{g} festlassen: $U\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Gleichwertig damit ist $U_0\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{g} = C\mathfrak{q}$. Ist U_0 vorgegeben, so existiert stets eine Lösung $\mathfrak{q} \neq 0$; denn es ist $|U_0 - E| \neq 0$ bei jeder Wahl der Parameter. Sind $A_{\alpha\beta}$ die algebraischen Komplemente zu den Elementen der Matrix $U_0 - E$, so ist

$$(49) \quad (A_{\beta\alpha}) = q_0 q'_0 S_0 \quad \text{mit} \quad q'_0 = (b - c, -b - c, a - d).$$

Unter der Voraussetzung $U \neq E$ ist $q_0 \neq 0$, also \mathfrak{q} durch U_0 bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt:

$$(50) \quad \mathfrak{q} = \gamma q_0, \quad \gamma \neq 0.$$

Hieraus ist $t = S_0[\mathfrak{q}] = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 = \gamma^2(4 - (a + d)^2)$ zu schließen. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist also elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem $t > 0$, $t = 0$ oder $t < 0$, d. h. \mathfrak{g} ein elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Punkt ist. Die Fixpunkte der Substitution (48) sind durch \mathfrak{q} eindeutig bestimmt. Es sind dies die Punkte $(-q_2 \pm \sqrt{t})(q_0 + q_1)^{-1}$, die wir im folgenden mit τ_1, τ_2 bezeichnen werden. Es sei $\Im \tau_1 > \Im \tau_2$ bzw. $\tau_1 > \tau_2$ je nachdem $t > 0$ bzw. $t < 0$ ist. Ist $t < 0$, so schneidet die Polare zu \mathfrak{g} den Kegelschnitt $S[x] = 0$ in den Punkten τ_1, τ_2 . Normalkoordinaten ϑ, ϱ werden zu einem gegebenen nicht parabolischen Punkt \mathfrak{q} durch folgende Gleichungen eingeführt:

$$(51) \quad \hat{\tau} = \hat{\xi} + i\hat{\eta} = \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}.$$

$$(52) \quad \hat{\tau} = \text{Tg} \frac{\varrho}{2} \cdot e^{i\vartheta} \quad \text{für } t > 0; \quad |\hat{\tau}| = e^\vartheta, \quad \frac{\hat{\xi}}{\hat{\eta}} = \text{Sin} \varrho \quad \text{für } t < 0.$$

Einfache Rechnungen ergeben

$$(53) \quad dv = \begin{cases} \text{Sin} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta & \text{für } t > 0, \\ \text{Cos} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und

$$(54) \quad A_S = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sin} \varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\text{Sin} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\text{Sin} \varrho} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right\} & \text{für } t > 0, \\ \frac{1}{\text{Cos} \varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\text{Cos} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\text{Cos} \varrho} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right\} & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Offenbar hat ϱ in (45) und (52) ein und dieselbe Bedeutung.

§ 2. Der Laplace-Beltramische Differentialoperator

Eine für $S[X] > 0$ erklärte Funktion $\varphi(X)$ stellt eine Funktion über $\mathfrak{F}(S)$ dar, wenn $\varphi(XV) = \varphi(X)$ für nicht-singuläres V gilt. $\Omega_1 \cong \Omega_2$ für zwei Differentialoperatoren Ω_1 und Ω_2 bedeute, daß diese auf Funktionen über $\mathfrak{F}(S)$ dieselbe Wirkung haben. In diesem Sinne ist

$$(55) \quad \sigma(L^2) \cong 2\sigma \left\{ (E - Y'Y') \left((E - Y'Y') \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \frac{\partial}{\partial Y'} \right\} - 4\sigma \left\{ (E - Y'Y') Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right\}$$

mit

$$(56) \quad L = SX \frac{\partial}{\partial X'} S^{-1} - \left(X \frac{\partial}{\partial X'} \right)'$$

Zum Beweis wird

$$dX = C \begin{pmatrix} 0 \\ -dY' \end{pmatrix} H + C' \begin{pmatrix} E \\ -Y' \end{pmatrix} dH$$

in $d\varphi = \sigma \left(dX' \frac{\partial}{\partial X'} \right) \varphi$ eingetragen. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{\partial}{\partial Y'} \varphi = -H \frac{\partial}{\partial X'} C \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial H} \varphi = (E - Y'Y') C' \frac{\partial}{\partial X'}$$

und damit

$$C' \frac{\partial}{\partial X'} = \begin{pmatrix} E & -Y' \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial H} \\ \frac{\partial}{\partial Y'} H'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial H} \varphi \cong 0$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial X'} C \cong -H'^{-1} \left(\left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)', \frac{\partial}{\partial Y'} \right)$$

und

$$C^{-1} X \frac{\partial}{\partial X'} C \cong \begin{pmatrix} -E \\ Y' \end{pmatrix} \left(\left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)', \frac{\partial}{\partial Y'} \right),$$

mithin

$$SX \frac{\partial}{\partial X'} S^{-1} \cong -C'^{-1} \begin{pmatrix} E \\ Y' \end{pmatrix} \left(\left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)', \frac{\partial}{\partial Y'} \right) C',$$

$$\left(X \frac{\partial}{\partial X'} \right)' \cong -C'^{-1} \begin{pmatrix} Y' \frac{\partial}{\partial Y'} & -Y' \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \\ \frac{\partial}{\partial Y'} & \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \end{pmatrix} C'.$$

Differenzbildung führt auf

$$L \cong C'^{-1} \begin{pmatrix} Y' \frac{\partial}{\partial Y'} - \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' & \frac{\partial}{\partial Y'} - Y' \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \\ \frac{\partial}{\partial Y'} - Y' \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' & Y' \frac{\partial}{\partial Y'} - \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \end{pmatrix} C',$$

woraus

$$\begin{aligned} \sigma(L^2) &\cong \sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} - \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \right)^2 + \sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} - \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \right)^2 + \\ &\quad + 2\sigma \left(\frac{\partial}{\partial Y'} - Y' \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \right) \left(\frac{\partial}{\partial Y'} - Y' \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'} \right)' \right) \end{aligned}$$

erhält. Mit Hilfe der Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} \left(Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' Y &= \left(Y' Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' + Y, \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' Y' = \left(Y' Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' + Y' \\ \frac{\partial}{\partial Y'} Y &= \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' + nE, \quad \frac{\partial}{\partial Y'} Y' = \left(Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' + (m-n)Y, \\ \sigma \left(Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)^2 &= \sigma \left(Y \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' \frac{\partial}{\partial Y'}\right) + n\sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right), \\ \sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)^2 &= \sigma \left(Y' \left(Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' \frac{\partial}{\partial Y'}\right) + (m-n)\sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right), \\ \sigma \left(\frac{\partial}{\partial Y'} Y' \left(Y \frac{\partial}{\partial Y'}\right)'\right) &= \sigma \left(Y \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right)' \frac{\partial}{\partial Y'}\right) + m\sigma \left(Y' \frac{\partial}{\partial Y'}\right) \end{aligned}$$

läßt sich dieser Ausdruck schließlich in (55) überführen.

Die Transformation $X \rightarrow UX$ ($U \in \Omega(S)$) bewirkt $L \rightarrow U'^{-1}LU'$, läßt also $\sigma(L^2)$ invariant. An der Stelle $Y=0$ ist der Operator $\frac{1}{2}\sigma(L^2)$ und zufolge $ds^2 = \sigma(dY' dY)$ auch der Laplace-Beltramische Operator Δ_S mit $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial Y'} \frac{\partial}{\partial Y'}\right)$ identisch. Da $\mathfrak{P}(S)$ ein homogener Raum und auch Δ_S ein invarianter Operator ist, gilt

$$(57) \quad \Delta_S \cong \frac{1}{2} \sigma(L^2)$$

allgemein.

Um die Wirkung von $\sigma(L^2)$ auf eine beliebige Funktion von $w = (S[X])^{-1}[X' Sg]$ zu ermitteln, führen wir

$$(58) \quad T = (X'X)^{-1}[X'], \quad A = X \frac{\partial}{\partial X'} - \left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)'$$

ein und stellen zunächst fest, daß

$$X \frac{\partial}{\partial X'} \varphi(T) = 2 \left(T \frac{\partial}{\partial T} - T \left(T \frac{\partial}{\partial T}\right)'\right) \varphi(T)$$

mit der für symmetrische T üblichen Definition

$$T = (t_{\alpha\beta}), \quad \frac{\partial}{\partial T} = \left(e_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha\beta}}\right), \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} + 1)$$

identisch in X gilt. Mithin ist

$$A\varphi(T) = 2 \left(T \frac{\partial}{\partial T} - \left(T \frac{\partial}{\partial T}\right)'\right) \varphi(T).$$

Speziell für $\varphi(T) = T[p]$ mit konstanter Spalte p ergibt sich

$$A(T[p]) = 2(Tpp' - pp'T).$$

Beachtet man noch, daß $\sigma(T) = n$ und daher

$$\left(T \frac{\partial}{\partial T}\right)' T = \frac{n}{2} E + \frac{1}{2} T \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial T} T = \frac{m+1}{2} E$$

und mit konstanter Matrix $A = A^{(m)}$ auch

$$\frac{\partial}{\partial T} AT = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} \sigma(A) E, \quad \left(T \frac{\partial}{\partial T}\right)' AT = \frac{1}{2} \sigma(TA) E + \frac{1}{2} A'T$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} A^2(T[p]) &= 4 \left(T \frac{\partial}{\partial T} - \left(T \cdot \frac{\partial}{\partial T} \right)' \right) (T p p' - p p' T) \\ &= 2(m-1) T p p' + 2 p p' T + 2(T[p]) E - 2(p' p) T - 2 n p p' \end{aligned}$$

und somit

$$(59) \quad \sigma(A^2)(T[p]) = 4(m T[p] - n p' p).$$

Wegen $T^2 = T$ ist ferner

$$\begin{aligned} (\Lambda(T[p]))^2 &= 4(T p p' - p p' T)^2 \\ &= 4\{(T p p' + p p' T - p p') T[p] - T p p' T(p' p)\}, \end{aligned}$$

also

$$(60) \quad \sigma(\Lambda(T[p]))^2 = 8 T[p] (T[p] - p' p).$$

Ist $S = Q' Q$, $Q = Q^{(m)}$ und wird die Substitution $X \rightarrow QX$, $p \rightarrow Qg$ ausgeführt, demzufolge auch $\Lambda \rightarrow Q'^{-1} \Lambda Q'$, $p' p \rightarrow S[g] = t$, $T[p] \rightarrow w$, so gehen (59) und (60) in

$$(61) \quad \sigma(L^2)w = 4(mw - nt), \quad \sigma(Lw)^2 = 8w(w - t)$$

über. Damit erhalten wir die gewünschte Formel

$$\begin{aligned} (62) \quad \sigma(L^2) \varphi(w) &= \sigma(L \varphi'(w) L w) \\ &= \varphi''(w) \sigma(Lw)^2 + \varphi'(w) \sigma(L^2)w \\ &= 8w(w - t) \varphi''(w) + 4(mw - nt) \varphi'(w), \end{aligned}$$

insbesondere also

$$(63) \quad \begin{aligned} \sigma(L^2) e^{-2\pi y w} \\ = 16\pi y \left\{ 2\pi y w^2 - \left(2\pi t y + \frac{m}{2} \right) w + \frac{n}{2} t \right\} e^{-2\pi y w}. \end{aligned}$$

§ 3. Eine Greensche Formel

Im folgenden sei $[dX]$ das alternierende Produkt der Differentiale $dx_{\alpha\beta}$ aller Elemente $x_{\alpha\beta}$ von X in festgelegter Reihenfolge. $\omega_{\alpha\beta}$ entstehe aus $[dX]$, vom Vorzeichen abgesehen, durch Streichen von $dx_{\alpha\beta}$; das Vorzeichen von $\omega_{\alpha\beta}$ sei durch $[dX] = dx_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$ festgelegt. Sind $A = A^{(m)}$ und $B = B^{(m)}$ Matrizen mit Funktionen von X als Elementen und ist Λ der durch (58) eingeführte Operator, so gilt mit $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$, wie in [5] gezeigt wurde,

$$(64) \quad \begin{aligned} A A^2 B [dX] &= (B' A^2 A') [dX] \\ &= d\{A(X \Omega' - \Omega X') (AB) + (AA')(X \Omega' - \Omega X') B\}. \end{aligned}$$

Sind $p_{\alpha\beta}$ die Elemente der Matrix $P = X' X$, so daß

$$d p_{\alpha\beta} = \sum_{\rho} (x_{\rho\beta} dx_{\rho\alpha} + x_{\rho\alpha} dx_{\rho\beta})$$

gilt, so folgt gemäß der Definition der $\omega_{\alpha\beta}$ leicht

$$d p_{\alpha\beta} (X \Omega' - \Omega X') = 0.$$

Die Elemente der Matrix $X \Omega' - \Omega X'$ sind demnach durch das Produkt $[dP] = \prod d p_{\alpha\beta}$ teilbar; denn die Funktionen $p_{\alpha\beta}$ ($\alpha \leq \beta$) sind unabhängig,

lassen sich also durch $mn - \frac{n(n+1)}{2}$ weitere Funktionen zu einem System von mn unabhängigen Funktionen von X ergänzen. Es gibt also eine Matrix M mit Differentialformen vom Grad $mn - \frac{n(n+1)}{2} - 1$ als Elementen, so daß

$$X \Omega' - \Omega X' = [dP]M$$

wird. (64) wird nun nach bekannter Regel in

$$(65) \quad \begin{aligned} & A A^2 B [dX] - (B' A^2 A')' [dX] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} [dP] d\{A M (A B) + (A A')' M B\} \end{aligned}$$

übergeführt. Die Substitution $X \rightarrow QX$ mit einem durch $S = Q'Q$ bestimmten quadratischen Q bewirke $M \rightarrow M^*$; im übrigen hat sie

$$[dX] \rightarrow |Q|^n [dX], \quad A \rightarrow Q'^{-1} L Q', \quad P \rightarrow W = S[X]$$

zur Folge. Die spezielle Wahl $A = |Q|^{-\frac{n}{2}} Q' \varphi$ und $B = |Q|^{-\frac{n}{2}} Q'^{-1} \psi$ mit willkürlichen Funktionen $\varphi = \varphi(X)$, $\psi = \psi(X)$ ergibt damit nach erfolgter Spurbildung

$$(66) \quad \{\varphi \sigma(L^2) \psi - \psi \sigma(L^2) \varphi\} [dX] = [dW] d\sigma\{N(\varphi L \psi - \psi L \varphi)\}$$

mit

$$N = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} |Q|^{-n} Q' M^* Q'^{-1},$$

wobei noch von $(S^{-1} L S)' = -L$ Gebrauch gemacht wurde. Da der Kalkül der alternierenden Differentialformen gegenüber Variablensubstitutionen invariant ist und die Beschränkung auf $W = \text{konstant}$ einer solchen Substitution entspricht, so folgt nun

$$(67) \quad \{\varphi \sigma(L^2) \psi - \psi \sigma(L^2) \varphi\} \frac{[dX]}{[dW]} = d\sigma\{N(\varphi L \psi - \psi L \varphi)\}.$$

Dieser Ausdruck ist gegenüber der Substitution $X \rightarrow UX$ mit $S[U] = S, |U| = 1$ invariant, wenn dies für die Funktionen $\varphi(X)$, $\psi(X)$ zutrifft. Die Anwendung der Stokesschen Integralformel ergibt schließlich

$$(68) \quad \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{B}_0}} \{\varphi \sigma(L^2) \psi - \psi \sigma(L^2) \varphi\} \frac{[dX]}{[dW]} = \int_{\mathfrak{R}_0} \sigma\{N(\varphi L \psi - \psi L \varphi)\}$$

für einen beliebigen Bereich \mathfrak{B}_0 im X -Raum, wenn wir mit \mathfrak{R}_0 den Rand des Durchschnitts von \mathfrak{B}_0 mit $S[X] = W$ in bezug auf $S[X] = W$ bezeichnen, sofern nur \mathfrak{R}_0 hinreichend glatt ist und die Integrale existieren.

§ 4. Der Gammafaktor

Es sei $W_{\alpha, \beta}(y)$ die Whittakersche Funktion,

$$(69) \quad W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

und

$$\Gamma(s; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} W(y; \alpha, \beta, 1) y^{s-1} dy.$$

Diese Funktion trat als „Gammafaktor“ in Funktionalgleichungen Dirichlet-scher Reihen bereits an anderer Stelle [6] in Erscheinung. Dort wurde auch

$$(70) \quad \Gamma(s; \alpha, \beta) = 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(\beta, 1-\alpha; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right)$$

bewiesen, wobei $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ die hypergeometrische Funktion bezeichnet. Die Anwendung der Identität

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; x)$$

ergibt

$$(71) \quad \begin{aligned} & \Gamma(s; \alpha, \beta) \\ &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Zu einer Funktionalgleichung für $\Gamma(s; \alpha, \beta)$ gelangen wir auf Grund der Differentiationsformeln

$$F'(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x),$$

$$F''(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2; \gamma+2; x),$$

die in ersichtlicher Weise

$$\begin{aligned} & \Gamma(s+1; \alpha, \beta) \\ &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Gamma(s+2; \alpha, \beta) \\ &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F''\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

ergeben, wenn wir noch die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion ins Treffen führen. Dazufolge ist

$$\begin{aligned} & F''\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) + 2(\beta-\alpha)F'\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) - \\ & - 4s(s+1-\alpha-\beta)F\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

woraus

$$(72) \quad \Gamma(s+2; \alpha, \beta) + (\beta-\alpha)\Gamma(s+1; \alpha, \beta) - s(s+1-\alpha-\beta)\Gamma(s; \alpha, \beta) = 0$$

erhält.

Eine Berechnung der Determinante

$$(73) \quad D(s; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \Gamma(s; \alpha, \beta) & \Gamma(s; \beta, \alpha) \\ -\Gamma(s+1; \alpha, \beta) & \Gamma(s+1; \beta, \alpha) \end{vmatrix}$$

wird durch den Umstand begünstigt, daß diese Funktion der Funktionalgleichung

$$(74) \quad D(s+1; \alpha, \beta) = s(s+1-\alpha-\beta) D(s; \alpha, \beta)$$

genügt. Nach (72) ist in der Tat

$$D(s+1; \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \Gamma(s+1; \alpha, \beta) & \Gamma(s+1; \beta, \alpha) \\ -\Gamma(s+2; \alpha, \beta) & \Gamma(s+2; \beta, \alpha) \end{vmatrix} \\ = s(s+1-\alpha-\beta) \begin{vmatrix} \Gamma(s+1; \alpha, \beta) & \Gamma(s+1; \beta, \alpha) \\ -\Gamma(s; \alpha, \beta) & \Gamma(s; \beta, \alpha) \end{vmatrix} = s(s+1-\alpha-\beta) D(s; \alpha, \beta).$$

Man stellt nun fest, daß

$$H(s) = \frac{D(s; \alpha, \beta)}{\Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)}$$

eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist. Da $H(s)$ für hinreichend große Werte von $\sigma = \Re s$ regulär ist, ist $H(s)$ eine ganze Funktion von s . Wir zeigen, daß $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} H(s) = 2$ ist, woraus dann $H(s) = 2$ identisch in s folgt. Die Existenz des Grenzwerts ist evident auf Grund der Darstellung

$$H(s) = \frac{\Gamma(s) \Gamma(s+2-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha) \Gamma(s+1-\beta)} \cdot \\ \left| \begin{array}{cc} F\left(\beta, 1-\alpha; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) & F\left(\alpha, 1-\beta; s+1-\beta; \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{s}{s+1-\alpha} F\left(\beta, 1-\alpha; s+2-\alpha; \frac{1}{2}\right) & \frac{s}{s+1-\beta} F\left(\alpha, 1-\beta; s+2-\beta; \frac{1}{2}\right) \end{array} \right|,$$

die mit Hilfe von (70) gewonnen wird. Denn es ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s)} e^{-a \log s} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta; s; \frac{1}{2}\right) = 1$$

und daher $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} H(s) = 2$, wie behauptet wurde. Damit ist auch

$$(75) \quad D(s; \alpha, \beta) = 2 \Gamma(s) \Gamma(s+1-\alpha-\beta)$$

bewiesen.

§ 5. Thetareihen

Um die Bildung des Integralmittelwertes $g(z; S, u)$ der Funktion $f(z; S, P) u(X)$ explizit auszuführen, bedürfen wir einer geeigneten Umformung der durch (1) erklärten Thetareihe, wobei zunächst wie in [8] verfahren wird. Die Anwendung von (3) ergibt die Aufspaltung

$$(76) \quad f(z; S, P) = \sum_{\mathfrak{g}} e^{\pi i \bar{z} S[\mathfrak{g}] - 2\pi y K[\mathfrak{g}]} \\ = \sum_{\mathfrak{g} \in \Gamma(S)} e^{\pi i \bar{z} S[\mathfrak{g}]} \sum_{\substack{U \in \Gamma(S) \\ U \tau \Gamma(S, \mathfrak{g})}} e^{-2\pi y K[U \mathfrak{g}]}.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{g} \in \Gamma(S)$ die Summation über ein volles Repräsentantensystem der Linksrestklassen $\Gamma(S)\mathfrak{g}$ ganzer Spalten und $U \tau \Gamma(S, \mathfrak{g})$ die Summation über ein volles Repräsentantensystem der Rechtsrestklassen $U \Gamma(S, \mathfrak{g})$ (in $\Gamma(S)$), wobei $\Gamma(S, \mathfrak{g})$ die Gruppe

$$\Gamma(S, \mathfrak{g}) = \{U : U \in \Gamma(S), U \mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$$

bezeichnet. Durchläuft U ein volles Repräsentantensystem der Rechtsrestklassen $U \Gamma(S, \mathfrak{g})$ in $\Gamma(S)$, so bildet die Vereinigung der Bereiche $\mathfrak{F}(S) [U]$ einen einfach überdeckten Fundamentalbereich $\mathfrak{F}(S, \mathfrak{g})$ von $\Gamma(S, \mathfrak{g})$ in $\mathfrak{Q}(S)$, wenn $\mathfrak{g} \neq 0$ oder $-E \notin \Gamma(S)$ ist. Eine doppelte Überdeckung findet im Falle $\mathfrak{g} \neq 0$, $-E \in \Gamma(S)$ statt. Mit

$$(77) \quad \delta_S(\mathfrak{g}) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \mathfrak{g} \neq 0, -E \in \Gamma(S) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird also

$$(78) \quad g(z; S, u) = I \{f(z; S, P) u(X)\} \\ = \sum_{g \in \Gamma(S)} \delta_S(\mathfrak{g}) e^{\pi i \bar{z} S |g|} \cdot \frac{1}{V(S)} \int_{\mathfrak{F}(S, \mathfrak{g})} e^{-2\pi y K |g|} u(X) dv$$

unter der Voraussetzung, daß $u(X)$ den Bedingungen (7) genügt. Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen

$$(79) \quad W = S[X], \quad w = X' S \mathfrak{g}, \quad w = W^{-1} [w] = K[\mathfrak{g}], \\ X = C X_0, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y' \end{pmatrix} H, \quad W_0 = E - Y Y', \quad S[\mathfrak{g}] = t.$$

Um eine Integration im Y -Raum in eine solche auf $W = \text{konstant}$ im X -Raum zu verwandeln, führen wir zunächst die Umrechnung der Volumenelemente aus. Auf Grund der Differentialrelationen

$$dX = C dX_0, \quad dX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -dY' H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ -Y' \end{pmatrix} dH'$$

stellt man fest, daß

$$[dX] = \|C\|^n [dX_0] = \|S\|^{-\frac{n}{2}} \|H\|^{m-n} [dY] [dH], \\ dv \|H\|^{-n} [dH] = |E - Y Y'|^{-\frac{m}{2}} \|H\|^{-n} [dY] [dH] \\ = |S[X]|^{-\frac{m}{2}} \|H\|^{m-n} [dY] [dH] = \|S\|^{\frac{n}{2}} |W|^{-\frac{m}{2}} [dX],$$

also

$$(80) \quad \|S\|^{\frac{n}{2}} |W|^{-\frac{n+1}{2}} \frac{[dX]}{[dW]} \cdot dv |W_0|^{\frac{n}{2}} |W|^{\frac{1}{2}} \frac{[dH]}{[dW]}$$

ist. Ferner gilt nach Hilfssatz 3 in [8] S. 31

$$(81) \quad \int_{w_0[H] = W} \frac{[dH]}{[dW]} = \varrho_n |W_0|^{-\frac{n}{2}} |W|^{-\frac{1}{2}}$$

mit

$$\varrho_n = \prod_{k=1}^n \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Sei nun \mathfrak{B} ein beliebiger Bereich im Y -Raum, \mathfrak{B}_0 die Menge aller X , denen ein Y in \mathfrak{B} entspricht und $\varphi(X)$ eine willkürliche Funktion über \mathfrak{B} , so daß also

$\varphi(XV) = \varphi(X)$ für $|V| \neq 0$ gilt. Dann ist

$$(82) \quad \int_{Y \in \mathfrak{B}} \varphi(X) dv = \frac{1}{\varrho_n} \|S\|^{\frac{n}{2}} |W|^{\frac{n+1}{2}-m} \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{B}_0}} \varphi(X) \frac{[dX]}{[dW]};$$

denn die rechte Seite dieser Gleichung ist mit Hilfe von (80) und (81) in

$$\frac{1}{\varrho_n} |W|^{\frac{1}{2}} \int_{Y \in \mathfrak{B}} \varphi(X) |W_0|^{\frac{n}{2}} \int_{W_0[H]=W} \frac{[dH]}{[dW]} \cdot dv = \int_{Y \in \mathfrak{B}} \varphi(X) dv$$

überzuführen, q. e. d.

Wir wenden (82) auf das Integral in (78) an, setzen also $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(S, \mathfrak{g})$ und $\varphi(X) = e^{-2\pi y w} u(X)$. An Stelle von \mathfrak{B}_0 tritt dann ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})$ in $S[X] > 0$ bezüglich der Gruppe der Substitutionen $X \rightarrow UX$ ($U \in I(S, \mathfrak{g})$). Damit ergibt sich

$$(83) \quad g(z; S, u) = \sum_{\mathfrak{g} \in I(S)} \delta_S(\mathfrak{g}) e^{\pi i z \bar{t}} \frac{\|S\|^{\frac{n}{2}}}{\varrho_n V(S)} \chi(y; S, \mathfrak{g}, u).$$

Hier ist zur Abkürzung

$$(84) \quad \chi(y) = \chi(y; S, \mathfrak{g}, u) = |W|^{\frac{n+1}{2}-m} \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} e^{-2\pi y w} u(X) \frac{[dX]}{[dW]}$$

gesetzt. Zu einer Differentialgleichung für $\chi(y)$ gelangt man durch Bildung des Ausdrucks

$$(85) \quad \begin{aligned} & \left\{ y^2 \chi''(y) + y \left(2\pi t y + \frac{m}{2} \right) \chi'(y) + \pi t y n \chi(y) \right\} |W|^{\frac{m-n-1}{2}} \\ &= \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} \left\{ 4\pi^2 y^2 w^2 - 2\pi y w \left(2\pi t y + \frac{m}{2} \right) + \pi t y n \right\} e^{-2\pi y w} u(X) \frac{[dX]}{[dW]} \\ &= \frac{1}{8} \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} u(X) \sigma(L^2) e^{-2\pi y w} \frac{[dX]}{[dW]}, \end{aligned}$$

wobei von (63) Gebrauch gemacht wurde. Die Funktionen $u(X)$, $e^{-2\pi y w}$ sind gegenüber den Substitutionen $X \rightarrow UX$ ($U \in I(S, \mathfrak{g})$) invariant. Es ist zweckmäßig, hier vorauszusetzen, daß $I(S)$, damit auch $I(S, \mathfrak{g})$ nur solche Einheiten U enthält, deren Determinante $|U| = 1$ ist. Die Greensche Formel (68) erlaubt nun, (85) wegen (57) in

$$\frac{1}{8} \int_{\substack{S[X]=W \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} e^{-2\pi y w} \sigma(L^2) u(X) \frac{[dX]}{[dW]} = -\frac{\lambda}{4} \chi(y) |W|^{\frac{m-n-1}{2}}$$

überzuführen; denn das Randintegral verschwindet, da sich der Rand des Integrationsbereiches aus paarweise bezüglich $I(S, \mathfrak{g})$ äquivalenten Stücken mit entgegengesetzter Orientierung zusammensetzt und der Integrand des Randintegrals gegenüber $I(S, \mathfrak{g})$ invariant ist. Damit ist die Differentialgleichung

$$(86) \quad y^2 \chi''(y) + y \left(2\pi t y + \frac{m}{2} \right) \chi'(y) + \left(\pi t y n + \frac{\lambda}{4} \right) \chi(y) = 0$$

bewiesen. Sie besagt im Falle $g = 0$, daß

$$(87) \quad \lambda I\{u\} = 0$$

ist. Fortan sei $g \neq 0$.

Im Falle $t \neq 0$ ist, wie man leicht bestätigt, die allgemeine Lösung von (86) in der Form

$$(88) \quad \chi(y) = a_0 y^{\frac{v}{2}} W_0\left(y, \frac{m}{2} + v\right) + b_0 y^{\frac{v}{2}}$$

mit gewissen Konstanten a_0, b_0 darstellbar, wobei v die Lösung von

$$(89) \quad v(v + m + 2) + \lambda = 0, \quad \Re v \geq \frac{2-m}{2}, \quad \Im v \geq 0$$

und

$$(90) \quad W_0(y, \gamma) = \frac{y^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(\log y)^\alpha}{\alpha!} (1-\gamma)^{\alpha-1}$$

gesetzt ist.

Im Falle $t \neq 0$ ergibt der Ansatz

$$(91) \quad \chi(y) = a(\pi|t|y)^{\frac{v}{2}} e^{-\pi t y} W\left(\pi|t|y, \frac{n+v}{2}, \frac{m+n-v}{2}, \operatorname{sgn} t\right)$$

mit konstantem a für die Funktion

$$W(y) = W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) \quad (\varepsilon^2 = 1)$$

zufolge (86) die Differentialgleichung

$$(92) \quad y W''(y) + (\alpha + \beta) W'(y) + ((\alpha - \beta)\varepsilon - y) W(y) = 0.$$

Wir werden damit wie in [6] auf die schon in § 4 genannte Funktion

$$(93) \quad W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y)$$

geführt. Eine andere, von (93) linear unabhängige Lösung von (92) kann wegen ihres Verhaltens für $y \rightarrow \infty$ in der Darstellung von $\chi(y)$ nicht auftreten.

Nachdem die Integrale $\chi(y)$ explizit berechnet sind, können wir nun daran gehen, für die elliptischen und hyperbolischen g (d. h. also $t \neq 0$) Gewichtsfunktionen $\mu(S, g, w)$ in vernünftiger Weise so einzuführen, daß $\mu(S, g, 1)$ mit dem Siegelschen Ausdruck

$$(94) \quad \mu(S, g) = \varrho_{m-n-1} \|S\|^{-\frac{n-m}{2}} \{(w-t)|W|\}^{1-\frac{m-n}{2}} \int \frac{[dX]}{[dW][dW]} \begin{matrix} S[X] = W \\ X'Sg = w \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, g) \end{matrix}$$

übereinstimmt. Die Invarianzbetrachtungen in [8] zeigen, daß $\mu(S, g)$ von W, w , also auch von $W^{-1}[w] = w$ nicht abhängt. Eine formale Umformung ergibt zunächst

$$(95) \quad \chi(y) = \int_{w_0}^{\infty} e^{-2\pi y w} (w-t)^{\frac{m-n}{2}-1} w^{\frac{n}{2}-1} \varphi(w) dw$$

mit $w_0 = \text{Max}(0, t)$ und

$$(96) \quad \varphi(w) = \varphi(w, S, \mathfrak{g}, u) = \int_{\substack{S\{X\} = W \\ W^{-1}X'S\mathfrak{g} = w \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} u(X) \omega,$$

wobei ω das in gewissem Sinne invariante Volumenelement

$$(97) \quad \omega = (w-t)^{1-\frac{m-n}{2}} w^{1-\frac{n}{2}} |W|^{-\frac{n+1-m}{2}} \frac{[dX]}{dw[dW]}$$

bezeichnet. Speziell für $u = 1$ ergibt die Anwendung von Hilfssatz 3 in [8], S. 31

$$\begin{aligned} \varphi(w, S, \mathfrak{g}, 1) &= \int_{W^{-1}\{w\} = w} \left\{ \int_{\substack{S\{X\} = W \\ X'S\mathfrak{g} = w \\ X \in \mathfrak{F}_0(S, \mathfrak{g})}} \left\{ (w-t) |W|^{1-\frac{m-n}{2}} \frac{[dX]}{[dw][dW]} \right\} |W|^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{n}{2}-1} \frac{[dw]}{dw} \right. \\ &= \frac{\mu(S, \mathfrak{g})}{\varrho_{m-n-1}} \|S\|^{\frac{m-n}{2}} \int_{W^{-1}\{w\} = w} |W|^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{n}{2}-1} \frac{[dw]}{dw} = \frac{\mu(S, \mathfrak{g}) \varrho_n}{\varrho_{m-n-1} \varrho_{n-1}} \|S\|^{-\frac{m-n}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Definition

$$(98) \quad \mu(S, \mathfrak{g}, u) = \frac{\varrho_{m-n-1} \varrho_{n-1}}{\varrho_n} \|S\|^{-\frac{m-n}{2}} \varphi(w_0, S, \mathfrak{g}, u) \quad (t \neq 0)$$

nahegelegt. Es bleibt zu zeigen, daß $\varphi(w)$ an der Stelle w_0 vernünftig, d. h. stetig oder zumindest stetig erklärbar ist. $\varphi(w)$ kann nun aber explizit angegeben werden. Zunächst

$$\chi(y) e^{2\pi y w_0} = \int_0^\infty e^{-2\pi y w} (w + w_0 - t)^{\frac{m-n}{2}-1} (w + w_0)^{\frac{n}{2}-1} \varphi(w + w_0) dw$$

und (91) ist

$$a \left(\frac{|t|y}{2} \right)^{\frac{v}{2}} e^{-\frac{|t|y}{2}} W \left(\frac{|t|y}{2}; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}, \text{sgnt} \right)$$

die Laplace-Transformierte der Funktion

$$(99) \quad (w + w_0 - t)^{\frac{m-n}{2}-1} (w + w_0)^{\frac{n}{2}-1} \varphi(w + w_0),$$

diese also durch erstere eindeutig bestimmt. Mit $\varepsilon = \text{sgnt}$ gilt nun nach (93) und [1], S. 294 (9):

$$\begin{aligned} (100) \quad & \left(\frac{|t|y}{2} \right)^{\frac{v}{2}} e^{-\frac{|t|y}{2}} W \left(\frac{|t|y}{2}; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}, \text{sgnt} \right) \\ &= \left(\frac{|t|y}{2} \right)^{\frac{m}{4}} e^{-\frac{|t|y}{2}} W_{\frac{(2n-m)\varepsilon}{4}, \frac{m+2v-2}{4}} \left(\frac{|t|y}{2} \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-yw} f(w) dw \end{aligned}$$

mit

$$f(w) = 2^{\frac{m}{4}} |t|^{\frac{(2n-m)\varepsilon-m}{4}} w^{\frac{m+(m-2n)\varepsilon}{4}-1} \left(1 - \left(\frac{m+(m-2n)\varepsilon}{4} \right) \right)^{-1} F \left(\frac{(m-2n)\varepsilon+m+2v}{4}, \frac{(m-2n)\varepsilon-m-2v}{4} + 1; \frac{m+(m-2n)\varepsilon}{4}; -\frac{w}{|t|} \right).$$

Diese Funktion ist also bis auf den konstanten Faktor a mit (99) identisch. Damit erhält man für $t > 0$:

$$\begin{aligned} (w+t)^{\frac{n}{2}-1} q(w+t) &= \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)} t^{-\frac{m-n}{2}} F\left(\frac{m-n+v}{2}, 1-\frac{n+v}{2}; \frac{m-n}{2}; -\frac{w}{t}\right) \\ &= \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)} t^{-\frac{m-n}{2}} \left(1+\frac{w}{t}\right)^{\frac{n}{2}-1} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{m+v}{2}-1; \frac{m-n}{2}; -\frac{w}{t}\right), \end{aligned}$$

also

$$(101) \quad q(w) = \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)} t^{\frac{m-n}{2}} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{m+v}{2}-1; \frac{m-n}{2}; 1-\frac{w}{t}\right) \quad (t > 0)$$

für $t < 0$ hingegen:

$$\begin{aligned} (w-t)^{\frac{m-n}{2}-1} q(w) &= \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} |t|^{\frac{n}{2}} F\left(\frac{n+v}{2}, 1-\frac{m-n+v}{2}; \frac{n}{2}; \frac{w}{t}\right) \\ &= \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} |t|^{-\frac{n}{2}} \left(1-\frac{w}{t}\right)^{\frac{m-n}{2}-1} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{m+v}{2}-1; \frac{n}{2}; \frac{w}{t}\right), \end{aligned}$$

also

$$(102) \quad q(w) = \frac{a2^{\frac{m}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} |t|^{\frac{m-n}{2}} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{m+v}{2}-1; \frac{n}{2}; \frac{w}{t}\right) \quad (t < 0).$$

Allgemein ist demnach

$$(103) \quad a = 2^{-\frac{m}{4}} \Gamma\left(\frac{m+(m-2n)\varepsilon}{4}\right) |t|^{\frac{m-n}{2}-1} q(w_0)$$

oder, wenn wir die Gewichtsfunktion einführen,

$$(104) \quad a = 2^{-\frac{m}{4}} |t|^{\frac{m-n}{2}-1} \frac{\mu(S, \mathfrak{g}, w) \varrho_n}{\varrho_{m-n-1} \varrho_{n-1}} \|S\|^{\frac{m-n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+(m-2n)\varepsilon}{4}\right).$$

Schließlich führen wir noch in Analogie zu [8], (13) das Maß

$$(105) \quad \mu(S) = \frac{1}{j} \varrho_n \varrho_{m-n} \|S\|^{\frac{m+1}{2}} V(S)$$

mit

$$(106) \quad j = \begin{cases} 1 & \text{im Falle } -E \notin I(S), \\ 2 & \text{im Falle } -E \in I(S) \end{cases}$$

ein, so daß nach (77) im Falle $\mathfrak{g} \neq 0$ auch $j = \delta_S(\mathfrak{g})$ gilt.

Auf eine Definition der Gewichtsfunktionen $\mu(S, g, u)$ für die parabolischen g soll hier verzichtet werden. Wird zur Abkürzung noch

$$(107) \quad M(S, t, u) = \sum_{\substack{g \in I(S) \\ S(g) = t}} \mu(S, g, u) \quad (t \neq 0)$$

und

$$(108) \quad \alpha_t(S, u) = \frac{2^{-\frac{m}{4}} \pi^{\frac{m}{2}} \|S\|^{-\frac{1}{2}} M(S, t, u)}{\Gamma\left(\frac{m + (2n - m)\varepsilon}{4}\right) \mu(S)} \quad (t \neq 0)$$

gesetzt, so kann auf Grund der Formeln (83), (88), (91), (104), (105), (107), (108) mit gewissen Konstanten $\alpha_0(S, u)$, $\beta_0(S, u)$ für

$$(109) \quad h(z; S, u) = (\pi y)^{-\frac{r}{2}} g(z; S, u)$$

die folgende Entwicklung notiert werden:

$$(110) \quad h(z; S, u) = \alpha_0(S, u) W_0\left(y, \frac{m}{2} + v\right) + \beta_0(S, u) + \\ + \sum_{t \neq 0} \alpha_t(S, u) |t|^{\frac{m}{2} + v - 1} W\left(\pi |t| y; \frac{n + v}{2}, \frac{m - n + v}{2}, \text{sgnt}\right) e^{\pi i x t}.$$

Ist $S[x]$ keine Nullform, also notwendig $m < 5$, so gilt diese Darstellung mit $\alpha_0(S, u) = 0$, $\beta_0(S, u) = I\{u\}$; denn wenn $I\{u\} \neq 0$, dann ist nach (87) $\lambda \neq 0$, also auch $v \neq 0$, so daß stets $I\{u\} = I\{u\} (\pi y)^{-\frac{r}{2}}$ ist.

Der Beweis der Funktionalgleichung

$$(111) \quad f\left(-\frac{1}{z}; S, P\right) = \|S\|^{\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{n}{2}} (i\bar{z})^{\frac{m-n}{2}} f(z; S^{-1}, P^{-1})$$

ist nach den Angaben in [8] mühelos zu erbringen, so daß hier nicht darauf eingegangen zu werden braucht. Da zur Darstellung von $\mathfrak{P}(S^{-1})$ die Matrix $\hat{X} = SX = SC \begin{pmatrix} E \\ -Y \end{pmatrix} H$ in gleicher Weise dienen kann wie $X = C \begin{pmatrix} E \\ -Y \end{pmatrix} H$ für $\mathfrak{P}(S)$, so erhält man aus (111) durch Bildung der Integralmittelwerte mit $\tilde{u}(\hat{X}) = u(X)$ die Transformationsformel

$$(112) \quad g\left(-\frac{1}{z}; S, u\right) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{n}{2}} (i\bar{z})^{\frac{m-n}{2}} g(z; S^{-1}, \tilde{u}).$$

Man sieht leicht ein, daß u und \tilde{u} zu demselben Eigenwert λ gehören. Zusammen mit

$$\left(\frac{\pi y}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{r}{2}} = (-iz)^{\frac{r}{2}} (i\bar{z})^{\frac{r}{2}} (\pi y)^{-\frac{r}{2}}$$

folgt damit

$$(113) \quad h\left(-\frac{1}{z}; S, u\right) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{n+r}{2}} (i\bar{z})^{\frac{m-n+r}{2}} h(z; S^{-1}, \tilde{u}).$$

Auf Grund der Entwicklung (110) ist nach [6] bereits evident, daß $h(z; S, u)$ von dem Operator

$$(114) \quad y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{m - 2n}{2} i y \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{m}{2} + v \right) y \frac{\partial}{\partial y}$$

annulliert wird. Damit ist auch bereits nahegelegt, die in [6] entwickelte Theorie der Dirichletreihen mit Funktionalgleichungen auf $h(z; S, u)$ anzuwenden.

Die Beziehung, die zwischen g und $u(X)$ in der Gewichtsfunktion $\mu(S, g, u)$ zum Ausdruck kommt, kann nur im Falle $n = 1$ relativ einfach beschrieben werden, weil g und X dann gleichartige oder duale Gebilde der projektiven Geometrie bezeichnen. Bis auf einen konstanten Faktor stimmt $\mu(S, g, u)$ im Falle $t > 0$ mit $u(g)$ überein und im Falle $t < 0$ mit dem Integralmittelwert von $u(x)$ über einem Fundamentalbereich auf der Polaren zu g bezüglich der Gruppe $\Gamma(S, g)$, sofern $n = 1$ ist. Für den ternären Fall ($m = 3$) soll dies nun unabhängig von den bisherigen Untersuchungen näher ausgeführt werden, wobei wir uns der speziellen, in § 1 angegebenen Parameterdarstellungen des Majorantenraumes bedienen.

§ 6. Der ternäre Fall

Im folgenden wird angenommen, daß $S[x]$ eine ternäre Form der Signatur $(1, 2)$ ist, welche 0 rational nicht darstellt, womit das Auftreten parabolischer Punkte g ausgeschlossen ist. $u(x)$ ist nun eine eindeutige Funktion der durch (47) eingeführten komplexen Variablen $\tau = \xi + i\eta$. An Stelle von $u(x)$ werden wir daher meist $u(\tau)$ schreiben. $\Gamma(S)$ wählen wir gemäß den Angaben von § 1, so daß stets $\delta_S(g) = 1$ ist. Der Einheitengruppe $\Gamma(S)$ entspricht eine Gruppe $\Gamma^*(S)$ von Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit reellen a, b, c, d und $ad - bc = 1$. $\Gamma^*(S, g)$ sei die Untergruppe von $\Gamma^*(S)$, welche der Einheitengruppe $\Gamma(S, g)$ entspricht. Wir setzen voraus, daß $-E$ in $\Gamma^*(S)$ und $\Gamma^*(S, g)$ liegt. $\Gamma^*(S)$ ist, worauf dem Sinn nach bereits in [2] hingewiesen wurde, eine Grenzkreisgruppe erster Art im PETERSSON'SCHEN Sinne ohne parabolische Substitutionen, so daß es einen kompakten Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*(S)$ bezüglich $\Gamma^*(S)$ in der Halbebene $\eta > 0$ gibt. $\mathfrak{F}^*(S, g)$ bezeichne einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma^*(S, g)$.

Ein Vergleich von (78) mit (83) zeigt, daß im vorliegenden Fall

$$(115) \quad \chi(y) = \chi(y; S, g, u) = \|\mathfrak{F}^*\|^{-\frac{1}{2}} \iint_{\mathfrak{F}^*(S, g)} e^{-2\pi y v} u(\tau) dv$$

ist. Die Berechnung dieses Integrals wird für elliptische und hyperbolische g getrennt durchgeführt. Wir operieren in jedem Fall mit den durch (51), (52) eingeführten Normalkoordinaten.

1. Es sei $t > 0$. Dann ist $\Gamma(S, g)$ eine endliche zyklische Gruppe. Ihre Ordnung — wir nennen sie $E(S, g)$ — stimmt mit der halben Ordnung von $\Gamma^*(S, g)$ überein. Ein erzeugendes Element von $\Gamma(S, g)$ bewirkt in der hyperbolischen Ebene eine Drehung um den Winkel $2\pi/E(S, g)$. Mithin ist

$$\chi(y) = \frac{\|\mathfrak{F}^*\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\pi t y \cos^2 \varrho} \omega(\varrho, \vartheta) \sin \varrho d\varrho d\vartheta,$$

wenn $u(\tau) = \omega(\varrho, \vartheta)$ gesetzt wird. Wird $\omega(\varrho, \vartheta)$ in eine Fourierreihe entwickelt:

$$\omega(\varrho, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(\cos \varrho) e^{in\vartheta},$$

so ist die Integration über ϑ auszuführen. Man erhält

$$\chi(y) = \frac{2\pi \|S\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} \int_1^{\infty} e^{-2\pi t y p^2} \omega_0(p) dp.$$

Mit $\omega(\varrho, \vartheta)$ genügt auch $\omega_0(\cos \varrho)$ der Wellengleichung, so daß zufolge (54)

$$(1 - p^2) \omega_0''(p) - 2p \omega_0'(p) + \nu(\nu + 1) \omega_0(p) = 0$$

ist. Die Substitution $p^2 = 1 - q$ führt auf die hypergeometrische Differentialgleichung

$$q(q-1) \frac{d^2 \omega_0}{dq^2} + \left(\frac{3}{2}q-1\right) \frac{d\omega_0}{dq} - \frac{\nu(\nu+1)}{4} \omega_0 = 0$$

mit dem Hauptsystem

$$F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1; q\right), \quad F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1; q\right) \log q.$$

Die zweite Lösung scheidet wegen ihrer Singularität in $q = 0$ aus. Wie man leicht sieht, ist $\omega_0(1) = u(g)$ und folglich

$$\omega_0(p) = u(g) F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1; 1-p^2\right),$$

mithin

$$\begin{aligned} \chi(y) &= \frac{2\pi \|S\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} u(g) \int_1^{\infty} e^{-2\pi t y p^2} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1; 1-p^2\right) dp \\ &= \frac{\pi \|S\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} u(g) e^{-2\pi t y} \int_0^{\infty} e^{-2\pi t y q} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; 1; -q\right) \frac{dq}{\sqrt{1+q}} \\ &= \frac{\pi \|S\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} u(g) e^{-2\pi t y} \int_0^{\infty} e^{-2\pi t y q} F\left(1 + \frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1; -q\right) dq \\ &= \frac{2^{-\frac{3}{4}} \pi \|S\|^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} u(g) (\pi t y)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\pi t y} W\left(\pi t y; \frac{1+\nu}{2}, \frac{2+\nu}{2}, 1\right), \end{aligned}$$

wobei von (100) Gebrauch gemacht wurde. Der Vergleich mit (91) und (104) liefert die Formel

$$(116) \quad \mu(S, g, u) = \frac{\pi \|S\|^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{E(S, g)} u(g) \quad (t > 0).$$

2. Es sei $t < 0$. Nun ist $\Gamma(S, g)$ eine zyklische Gruppe von hyperbolischen Substitutionen. Hat $U \in \Gamma(S, g)$ in Normalkoordinaten die Wirkung $\hat{t} \rightarrow k\hat{t}$,

so nennen wir $|\log k|$ mit H. HUBER [3] die Verschiebungslänge von U . Die Verschiebungslänge einer erzeugenden Transformation in $\Gamma(S, \mathfrak{g})$ werde mit $l = l(S, \mathfrak{g})$ bezeichnet. Als Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*(S, \mathfrak{g})$ kann der Bereich $0 \leq \vartheta < l$ genommen werden. Wir stellen $u(\tau)$ als Funktion von ϱ, ϑ dar: $u(\tau) = \omega(\varrho, \vartheta)$ und erhalten so

$$\chi(y) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^l e^{2\pi t y \sin^2 \varrho} \omega(\varrho, \vartheta) \cos \varrho d\varrho d\vartheta.$$

$\omega(\varrho, \vartheta)$ gestattet offenbar eine Fourierreentwicklung der Art

$$\omega(\varrho, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(\sin \varrho) e^{-\frac{2\pi i \vartheta}{l} \cdot n}.$$

Die Integration über ϑ kann somit ausgeführt werden und ergibt

$$\chi(y) = \|S\|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t y v^2} \omega_0(p) dp.$$

Die Wellengleichung nimmt für $\omega_0(p)$ gemäß (54) die Gestalt

$$(p^2 + 1) \omega_0''(p) + 2p \omega_0'(p) - v(v+1) \omega_0(p) = 0$$

an. Die Substitution $q = -p^2$ führt auf die hypergeometrische Differentialgleichung

$$q(q-1) \frac{d^2 \omega_0}{dq^2} + \left(\frac{3}{2} q - \frac{1}{2} \right) \frac{d\omega_0}{dq} - \frac{v(v+1)}{4} \omega_0 = 0$$

mit dem Hauptsystem

$$F\left(-\frac{v}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{1}{2}; q\right), \quad q^{\frac{1}{2}} F\left(1 + \frac{v}{2}, \frac{1-v}{2}; \frac{3}{2}; q\right).$$

Da bei der Berechnung von $\chi(y)$ nur der in p gerade Bestandteil von $\omega_0(p)$ einen Beitrag liefern kann, so folgt

$$\begin{aligned} \chi(y) &= \|S\|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) \omega_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t y v^2} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{v+1}{2}; \frac{1}{2}; -p^2\right) dp \\ &= \|S\|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) \omega_0(0) \int_0^{\infty} e^{2\pi t y q} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{v+1}{2}, \frac{1}{2}; -q\right) \frac{dq}{\sqrt{q}} \\ &= 2^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\pi} \|S\|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) \omega_0(0) (\pi |t| y)^{\frac{v}{2}} e^{-\pi t y} W\left(\pi |t| y; \frac{1+v}{2}, \frac{2+v}{2}, -1\right), \end{aligned}$$

ebenfalls wieder mit Hilfe von (100). $\omega_0(0)$ kann offenbar als Integralmittelwert von $u(\mathfrak{x})$ längs der hyperbolischen Geraden $\xi = 0$, die wir schon als Polare zu \mathfrak{g} bezüglich des Kegelschnitts $S[\mathfrak{x}] = 0$ erkannt haben, angesprochen werden. Wir dürfen diesen Mittelwert mit $u(\mathfrak{g})$ bezeichnen, weil $u(\mathfrak{x})$ für $S[\mathfrak{x}] < 0$ noch nicht definiert ist. Der Vergleich mit den allgemeinen Formeln (91) und (104) ergibt schließlich

$$(117) \quad \mu(S, \mathfrak{g}, u) = \|S\|^{-\frac{3}{2}} |t|^{-\frac{1}{2}} l(S, \mathfrak{g}) u(\mathfrak{g}) \quad (t < 0).$$

§ 7. Dirichletreihen

Jeder Funktion $h(z; S, u)$ läßt sich nach dem in [6] entwickelten Verfahren ein Paar von meromorphen Funktionen zuordnen, die in Dirichletsche Reihen entwickelbar sind und Funktionalgleichungen vom Riemannschen Typus genügen. Zur Durchführung bedürfen wir der folgenden Reihen:

$$\begin{aligned}
 F(y; S, u) &= \sum_{t \neq 0} \alpha_t(S, u) |t|^{\frac{m+\nu}{2}-1} W\left(\pi|t|y; \frac{n+\nu}{2}, \frac{m-n+\nu}{2}, \operatorname{sgnt} t\right), \\
 G(y; S, u) &= \sum_{t \neq 0} \operatorname{sgnt} \alpha_t(S, u) |t|^{\frac{m+\nu}{2}} W\left(\pi|t|y; \frac{n+\nu}{2}, \frac{m-n+\nu}{2}, \operatorname{sgnt} t\right), \\
 (118) \quad H(y; S, u) &= G(y; S, u) + \frac{m-2n}{4\pi} F(y; S, u), \\
 F^*(y; S, u) &= \alpha_0(S, u) W_0\left(y, \frac{m}{2} + \nu\right) + \beta_0(S, u) + F(y; S, u), \\
 H^*(y; S, u) &= G(y; S, u) + \frac{m-2n}{4\pi} F^*(y; S, u).
 \end{aligned}$$

Die Beziehungen, die sich aus (113) ergeben, wenn man $x = 0$ setzt und die Ableitungen nach x an der Stelle $x = 0$ bildet, lassen sich in die Gestalt

$$\begin{aligned}
 (119) \quad F^*\left(\frac{1}{y}; S, u\right) &= \|S\|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} F^*(y; S^{-1}, \bar{u}), \\
 H^*\left(\frac{1}{y}; S, u\right) &= -\|S\|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} H^*(y; S^{-1}, \bar{u})
 \end{aligned}$$

bringen. Die ungestirnten Funktionen genügen daher den Transformationsformeln

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{y}; S, u\right) &= \|S\|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} F(y; S^{-1}, \bar{u}) + \\
 &+ \|S\|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} \left\{ \alpha_0(S^{-1}, \bar{u}) W_0\left(y, \frac{m}{2} + \nu\right) + \beta_0(S^{-1}, \bar{u}) \right\} - \\
 &- \left\{ \alpha_0(S, u) W_0\left(\frac{1}{y}, \frac{m}{2} + \nu\right) + \beta_0(S, u) \right\}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 H\left(\frac{1}{y}; S, u\right) &= -\|S\|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} H(y; S^{-1}, \bar{u}) + \\
 &+ \frac{2n-m}{4\pi} \|S\|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2}+\nu} \left\{ \alpha_0(S^{-1}, \bar{u}) W_0\left(y, \frac{m}{2} + \nu\right) + \beta_0(S^{-1}, \bar{u}) \right\} + \\
 &+ \frac{2n-m}{4\pi} \left\{ \alpha_0(S, u) W_0\left(\frac{1}{y}, \frac{m}{2} + \nu\right) + \beta_0(S, u) \right\}.
 \end{aligned}$$

Für die Funktionen

$$(120) \quad \xi(s; S, u) = \int_0^{\infty} F(y; S, u) y^{s-1} dy, \quad \eta(s; S, u) = \int_0^{\infty} H(y; S, u) y^{s-1} dy$$

ergeben sich damit nach elementaren Integrationen in bekannter Weise die Darstellungen

$$(121) \quad \xi(s; S, u) = \int_1^{\infty} \left\{ y^s F(y; S, u) + \|S\|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2} + v - s} F(y; S^{-1}, \bar{u}) \right\} \frac{dy}{y} + \\ + \frac{\alpha_0(S, u)}{s \left(s + 1 - \frac{m}{2} - v \right)} + \|S\|^{-\frac{1}{2}} \frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{(s-1) \left(s - \frac{m}{2} - v \right)} - \\ - \frac{\beta_0(S, u)}{s} + \|S\|^{-\frac{1}{2}} \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{s - \frac{m}{2} - v}$$

und

$$(122) \quad \eta(s; S, u) = \int_1^{\infty} \left\{ y^s H(y; S, u) + \|S\|^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{m}{2} + v - s} H(y; S^{-1}, \bar{u}) \right\} \frac{dy}{y} + \\ + \frac{2n-m}{4\pi} \left\{ \|S\|^{-\frac{1}{2}} \frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{(s-1) \left(s - \frac{m}{2} - v \right)} - \frac{\alpha_0(S, u)}{s \left(s + 1 - \frac{m}{2} - v \right)} + \right. \\ \left. + \|S\|^{-\frac{1}{2}} \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{s - \frac{m}{2} - v} + \frac{\beta_0(S, u)}{s} \right\}.$$

Andererseits erhält man durch gliedweise Integration unter Verwendung der in § 4 diskutierten Gammafaktoren, wenn man noch

$$W(y; \alpha, \beta, \dots, 1) = W(y; \beta, \alpha, 1)$$

berücksichtigt,

$$(123) \quad \xi(s; S, u) = \pi^{-s} \Gamma\left(s; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}\right) \varphi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right) + \\ + \pi^{-s} \Gamma\left(s; \frac{m-n+v}{2}, \frac{n+v}{2}\right) \psi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right)$$

und

$$(124) \quad \eta(s; S, u) = \frac{m-2n}{4\pi} \xi(s; S, u) + \\ + \pi^{-s-1} \Gamma\left(s+1; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}\right) \varphi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right) - \\ - \pi^{-s-1} \Gamma\left(s+1; \frac{m-n+v}{2}, \frac{n+v}{2}\right) \psi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right)$$

mit

$$(125) \quad \varphi(s; S, u) = \sum_{t>0} \alpha_t(S, u) t^{2s-1-s}, \quad \psi(s; S, u) = \sum_{t<0} \alpha_t(S, u) |t|^{2s-1-s}.$$

Der meromorphe Charakter der Funktionen $\xi(s; S, u)$ und $\eta(s; S, u)$ ist evident auf Grund der Darstellungen (121) und (122). Die Relationen (123) und (124) lassen sich nach φ und ψ auflösen, da die hier auftretende Nenner-

determinante $D\left(s; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}\right)$ nicht verschwindet. Mit (75) ergibt sich

$$(126) \quad \varphi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right) = \frac{\pi^s}{2} \frac{\Gamma\left(s+1; \frac{m-n+v}{2}, \frac{n+v}{2}\right)}{\Gamma(s) \Gamma\left(s+1 - \frac{m}{2} - v\right)} \xi(s; S, u) + \\ + \frac{\pi^{s+1}}{2} \frac{\Gamma\left(s; \frac{m-n+v}{2}, \frac{n+v}{2}\right)}{\Gamma(s) \Gamma\left(s+1 - \frac{m}{2} - v\right)} \left\{ \eta(s; S, u) + \frac{2n-m}{4\pi} \xi(s; S, u) \right\}$$

und

$$(127) \quad \psi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right) = \frac{\pi^s}{2} \frac{\Gamma\left(s+1; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}\right)}{\Gamma(s) \Gamma\left(s+1 - \frac{m}{2} - v\right)} \xi(s; S, u) - \\ - \frac{\pi^{s+1}}{2} \frac{\Gamma\left(s; \frac{n+v}{2}, \frac{m-n+v}{2}\right)}{\Gamma(s) \Gamma\left(s+1 - \frac{m}{2} - v\right)} \left\{ \eta(s; S, u) + \frac{2n-m}{4\pi} \xi(s; S, u) \right\}.$$

Man erkennt nun, daß auch die Funktionen $\varphi(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ meromorph sind.

Die Formel (71) zeigt unmittelbar, daß $\Gamma(s; \alpha, \beta)$ in der Halbebene

$$\sigma = \Re s > \text{Max}(0, \Re(\alpha + \beta) - 1)$$

regulär ist. Aus (89) entnehmen wir noch

$$(128) \quad v = \frac{1}{2} (2 - m + \sqrt{(m-2)^2 - 4\lambda}),$$

wobei die Wurzel eine nicht-negative reelle Zahl ist oder positiven Imaginärteil hat, je nachdem $0 \leq \lambda \leq \frac{m-2}{2}$ oder $\lambda > \frac{m-2}{2}$ gilt. Mithin sind $\varphi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right)$ und $\psi\left(s - \frac{v}{2}; S, u\right)$ in der Halbebene

$$(129) \quad \sigma > \text{Max}\left(0, \frac{m}{2} + \Re v - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{(m-2)^2 - 4\lambda} & \text{für } 0 \leq \lambda \leq \frac{m-2}{2}, \\ 0 & \text{für } \lambda \geq \frac{m-2}{2}. \end{cases}$$

höchstens dort singular, wo $\xi(s; S, u)$ und $\eta(s; S, u)$ singular sind. Nach (121) und (122) kann es sich höchstens um die Stellen 1 und $\frac{m}{2} + v$ in der s -Ebene handeln. Hieraus schließt man, daß $\varphi(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ in der Halbebene

$$(130) \quad \sigma > \Re \frac{m+v}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4} (m+2 + \sqrt{(m-2)^2 - 4\lambda}) & \text{für } 0 \leq \lambda \leq \frac{m-2}{2}, \\ \frac{1}{4} (m+2) & \text{für } \lambda \geq \frac{m-2}{2}. \end{cases}$$

regulär sind. Es kann also zu jedem Eigenwert $\lambda \geq 0$ eine positive Zahl $\delta = \delta(\lambda)$ so bestimmt werden, daß für $m \geq 3$ die Funktionen $\varphi(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{m}{2} - \delta$ regulär sind mit Ausnahme des Punktes $s = \frac{m}{2}$

falls $\lambda = 0$ ist. In diesem Fall sind noch die Residuen von Interesse. Sie lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s = \frac{m}{2}} \varphi(s; S, u) &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \|S\|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{m-2} + \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{2} \right) \gamma_1, \\ \operatorname{Res}_{s = \frac{m}{2}} \psi(s; S, u) &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \|S\|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{m-2} + \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{2} \right) \gamma_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1; \frac{m-n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \frac{2n-m}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}; \frac{m-n}{2}, \frac{n}{2}\right), \\ \gamma_2 &= \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1; \frac{n}{2}, \frac{m-n}{2}\right) + \frac{m-2n}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}, \frac{m-n}{2}\right). \end{aligned}$$

Allgemein handelt es sich bei diesen Zahlenwerten um den Wert der Funktion

$$\Gamma(s+2; \alpha, \beta) + (\beta - \alpha) \Gamma(s+1; \alpha, \beta),$$

welche mit Hilfe von (71) und (72) in

$$\begin{aligned} & s(s+1-\alpha-\beta) \Gamma(s; \alpha, \beta) \\ &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}-s} \frac{\Gamma(s+1) \Gamma(s+2-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)} F\left(s, s+1-\alpha-\beta; s+1-\alpha; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

übergeführt wird, an der Stelle $s = \alpha + \beta - 1$. Man erhält

$$\Gamma(\alpha + \beta + 1; \alpha, \beta) + (\beta - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta; \alpha, \beta) = 2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)},$$

damit auch

$$(131) \quad \operatorname{Res}_{s = \frac{m}{2}} \varphi(s; S, u) = 2^{1-\frac{m}{4}} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \|S\|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{m-2} + \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{2} \right),$$

$$(132) \quad \operatorname{Res}_{s = \frac{m}{2}} \psi(s; S, u) = 2^{1-\frac{m}{4}} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)} \|S\|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_0(S^{-1}, \bar{u})}{m-2} + \frac{\beta_0(S^{-1}, \bar{u})}{2} \right),$$

wobei $\lambda = 0$ vorausgesetzt wurde.

Bezüglich des Verhaltens in einer Halbebene $\sigma \geq \sigma_0$ ist mit den üblichen Schlüssen zu zeigen, daß $\varphi(s; S, u)$ und $\psi(s; S, u)$ für $|\Im s| \rightarrow \infty$ gleichmäßig in σ höchstens wie $e^{C|\Re s|}$ wachsen, wobei C eine positive Konstante ist.

§ 8. Verteilung von Gitterpunkten im ternären Fall

Die Voraussetzungen von § 6 bezüglich S werden wieder eingeführt und bis zum Schluß beibehalten. Nun ist, wie in § 5 ausgeführt wurde,

$$\alpha_0(S, u) = \alpha_0(S^{-1}, \bar{u}) = 0, \quad \beta_0(S, u) = \beta_0(S^{-1}, \bar{u}) = I\{u\},$$

also

$$(133) \quad \begin{aligned} \operatorname{Res}_{s = \frac{3}{2}} \varphi(s; S, u) &= 2^{\frac{3}{4}} \pi \|S\|^{-\frac{1}{2}} I\{u\}, \\ \operatorname{Res}_{s = \frac{3}{2}} \psi(s; S, u) &= 2^{\frac{3}{4}} \pi^{\frac{3}{2}} \|S\|^{-\frac{1}{2}} I\{u\}, \end{aligned}$$

außerdem den Formeln (105), (107), (108), (116), (117), (125), (131), (132) zufolge

$$(134) \quad \begin{aligned} \varphi(s; S, u) &= \frac{2^{-\frac{3}{4}} \pi}{V(S)} \sum_{\substack{g \in \Gamma(S) \\ |S[g]| > 0}} \frac{u(g)}{E(S, g)} |S[g]|^{-s}, \\ \psi(s; S, u) &= \frac{2^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\pi}}{V(S)} \sum_{\substack{g \in \Gamma(S) \\ |S[g]| < 0}} l(S, g) u(g) |S[g]|^{-s}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (133) sind allgemein gültig, da im Falle $\lambda > 0$ der Mittelwert $I\{u\}$ verschwindet.

Da $\Gamma^*(S)$ Grenzkreisgruppe erster Art ohne parabolische Substitutionen ist, so hat Λ_S , wie W. ROELCKE [7] gezeigt hat, ein diskretes Spektrum; d. h. die Eigenwerte $\lambda (\geq 0)$ haben endliche Vielfachheit und häufen sich im Endlichen nicht. Insbesondere hat $\lambda = 0$ die Vielfachheit 1; die zugehörige Eigenfunktion ist konstant. Ferner läßt sich jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\tau)$, die gegenüber $\Gamma^*(S)$ invariant ist, in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $u(\tau)$ entwickeln und jede stetige, bezüglich $\Gamma^*(S)$ invariante Funktion durch endliche Linearkombinationen der $u(\tau)$ gleichmäßig approximieren.

Es sei \mathfrak{B}^* ein beliebiger, im Riemannschen Sinne meßbarer Teilbereich des kompakten und im gleichen Sinne meßbaren Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}^*(S)$, den wir uns als Normalpolygon gewählt denken können. \mathfrak{B}_0 und $\mathfrak{F}_0(S)$ seien die entsprechenden Bereiche in $S[x] > 0$, die mit x auch $r x$ ($r > 0$) enthalten mögen. Das Ziel der folgenden Überlegungen ist der Nachweis der asymptotischen Relation

$$(135) \quad \sum_{\substack{g \in \mathfrak{B}^* \\ 0 < S[g] \leq q}} \frac{1}{E(S, g)} \sim \frac{2\pi}{3} \|S\|^{-\frac{1}{2}} V(\mathfrak{B}_0) q^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } q \rightarrow \infty.$$

Dabei ist $V(\mathfrak{B}_0) = V(\mathfrak{B}^*)$ der hyperbolische Inhalt von \mathfrak{B}^* . Ist $f(x) = f(\tau)$ die charakteristische Funktion von \mathfrak{B}^* :

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau \in \mathfrak{B}^*, \\ 0 & \text{für } \tau \in \mathfrak{F}^*(S) - \mathfrak{B}^* \end{cases}$$

und ist $f(\tau)$ überdies gegenüber $\Gamma^*(S)$ invariant, so kann (135) in der Form

$$(136) \quad \sum_{\substack{g \in \mathfrak{F}_0(S) \\ 0 < S[g] \leq q}} \frac{f(g)}{E(S, g)} \sim \frac{2\pi}{3} \|S\|^{-\frac{1}{2}} (f, 1) q^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } q \rightarrow \infty$$

geschrieben werden, wenn allgemein unter (f, g) das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{\mathfrak{F}^*(S)} f(\tau) g(\tau) dv$$

zweier reeller, bezüglich $\Gamma^*(S)$ invarianter Funktionen $f(\tau), g(\tau)$ verstanden wird. Der Beweis von (136) kann wegen der Linearität dieser Beziehung in f mit den in [4] angegebenen Schlüssen erbracht werden, indem man die charakteristische Funktion $f(x)$ zunächst in gewisser Weise durch eine stetige

Funktion approximiert, diese wiederum durch endliche Linearkombinationen der Eigenfunktionen $u(x)$, so daß (136) nur noch für eine Eigenfunktion $u(x)$ an Stelle von $f(x)$ geprüft zu werden braucht. Diesen Spezialfall beweist man mit Hilfe eines allgemeinen Tauberschen Satzes (Hardy-Littlewood), der auf $q(s; S, u)$ angewendet wird. Daß $q(s; S, u)$ die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, wurde in § 7 festgestellt. Schließlich ist noch zu bemerken, daß es in $\mathfrak{F}^*(S)$ nur endlich viele elliptische Fixpunkte gibt, so daß $E(S, \mathfrak{g})$ meist 1 ist und (135) auch gültig bleibt, wenn man $E(S, \mathfrak{g})$ durch 1 ersetzt. So wird man auf die eingangs genannte asymptotische Gitterpunktsformel (27) geführt.

Literatur

- [1] *Bateman Manuscript Project*: Tables of Integral Transforms, Vol. I. New York 1954. — [2] FRICKE, R., u. F. KLEIN: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. I. Leipzig 1897. — [3] HUBER, H.: Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktsproblem in der hyperbolischen Ebene. *Comm. Math. Helvetici* **30**, 20–62 (1956). — [4] MAASS, H.: Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter. *Math. Ann.* **137**, 319–327 (1959). — [5] MAASS, H.: Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen. *Math. Ann.* **135**, 319–416 (1958). — [6] MAASS, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. *Math. Ann.* **125**, 235–263 (1953). — [7] ROELCKE, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. *Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.* **1953/55**, 4. Abh. 161–267. — [8] SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. I. *Math. Ann.* **124**, 17–54 (1951).

(Eingegangen am 7. Juni 1959)