MAASS, H.
Math. Annalen, Bd. 137, S. 319—327 (1959)

2 ℓ

Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter

Von

HANS MAASS in Heidelberg

Die linearen Unterräume gegebener Dimension n in einem reellen linearen Vektorraum $\mathfrak{V}$ von der Dimension $m(>n)$ bilden eine kompakte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_0$. Zu jedem diskreten Modul $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{V}$ — ein solcher wird auch kurz Gitter genannt — gibt es einen linearen Unterraum kleinster Dimension, der $\mathfrak{T}$ enthält. Er ist eindeutig bestimmt und wird mit $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ bezeichnet. Dem Vektorraum $\mathfrak{V}$ sei eine euklidische Metrik aufgeprägt. Sodann kann von der Klasse $\langle\mathfrak{T}\rangle$ der Gitter gesprochen werden, die $\mathfrak{T}$ ähnlich sind. $\mathfrak{G}_0$ sei die von den Klassen ähnlicher Gitter der Dimension n gebildete Mannigfaltigkeit. Unter $|\mathfrak{T}|$ verstehen wir den n-dimensionalen euklidischen Inhalt einer Gittermasche des n-dimensionalen Gitters $\mathfrak{T}$. Damit kann ein Verteilungsproblem der folgenden Art formuliert werden: *Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ vorgegebene Teilmengen von $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{G}_0$. Man bestimme das asymptotische Verhalten der Anzahl $\alpha_q(\mathfrak{S};\mathfrak{R},\mathfrak{G})$ der n-dimensionalen Untergitter eines gegebenen m-dimensionalen Gitters $\mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\in\mathfrak{R}$, $\langle\mathfrak{T}\rangle\in\mathfrak{G}$, $|\mathfrak{T}|\leqq q$ für $q\to\infty$.* Es ist von vornherein klar, daß eine vernünftige Behandlung dieses Problems nur dann möglich sein wird, wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ in gewisser Weise meßbar sind.

Um eine geeignete rechnerische Grundlage zu haben, auf der das genannte Problem in Angriff genommen werden kann, denken wir uns zunächst die Vektoren $\mathfrak{x}\in\mathfrak{V}$ als m-Tupel reeller Zahlen in Form von Spaltenvektoren realisiert. Die Elemente der Spalte $\mathfrak{x}$ seien die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ bezüglich eines cartesischen Koordinatensystems, so daß die Metrik in $\mathfrak{V}$ durch $|\mathfrak{x}|=\sqrt{\mathfrak{x}'\mathfrak{x}}$ definiert wird, wobei $\mathfrak{x}'$ die Zeile bezeichnet, die durch Transposition aus $\mathfrak{x}$ entsteht. Allgemein werde die Transponierte einer Matrix W mit W' bezeichnet. Die n-dimensionalen Unterräume $\mathfrak{L}$ und Gitter $\mathfrak{T}$ lassen sich nun durch Matrizen X vom Typus $X^{(m,n)}$ und Rang n so repräsentieren, daß $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{T}$ von den Spaltenvektoren von X erzeugt wird. Die durch X_1 und X_2 definierten Räume $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ sind dann und nur dann identisch, wenn $X_2=X_1V$ mit einer nicht-singulären Matrix V gilt. Die zu X_1 und X_2 gehörigen Gitter $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sind genau dann ähnlich, wenn es eine positive Zahl λ und eine ganze unimodulare Matrix U gibt, so daß für $Y_i=X_i'X_i\,(i=1,2)$ die Beziehung

$$Y_2=\lambda Y_1[U]=\lambda U'Y_1U \tag{1}$$

gilt.

Zu dem vorgegebenen m-dimensionalen Gitter $\mathfrak{S}$ möge die nicht-singuläre Matrix $Q = Q^{(m)}$ gehören. Wir setzen $S = Q'Q$. Durch geeignete Wahl des cartesischen Koordinatensystems kann erreicht werden, daß Q symmetrisch und positiv ist, also mit der eindeutig bestimmten positiven Wurzel von S übereinstimmt. Das wird im folgenden vorausgesetzt. Das zur Matrix $X = X^{(m,n)}$ gehörige n-dimensionale Gitter $\mathfrak{T}$ ist genau dann Untergitter von $\mathfrak{S}$, wenn $G = Q^{-1}X$ eine ganze Matrix vom Rang n ist. Wir bemerken noch, daß

$$|\mathfrak{T}|^2 = |X'X| = |S[G]| \tag{2}$$

gilt.

Die Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ können durch Matrizenmengen $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{G}^*$ vollständig gekennzeichnet werden. $\mathfrak{R}^*$ sei die Menge aller Matrizen $X^{(m,n)}$, denen Räume in $\mathfrak{R}$ entsprechen. Analog sei $\mathfrak{G}^*$ die Menge aller positiven $Y^{(n)}$, welche Ähnlichkeitsklassen in $\mathfrak{G}$ definieren. Den vollen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{G}_0$ seien in diesem Sinne die Matrizenmengen $\mathfrak{R}_0^*$ und $\mathfrak{G}_0^*$ zugeordnet. Auf Grund der Definitionen ist klar, daß mit X auch XV in $\mathfrak{R}^*$ und mit Y auch $\lambda Y[U]$ in $\mathfrak{G}^*$ liegt. Hierbei ist V eine nicht-singuläre Matrix, λ eine positive Zahl und U eine ganze unimodulare Matrix.

Im Raum der positiven $Y^{(n)}$ denken wir uns auf irgend eine Weise einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ (im strengen Sinne) bezüglich der Gruppe der Transformationen $Y \to Y[U]$ mit ganzer unimodularer Matrix U ausgewählt. Mit Y möge auch λY $(\lambda > 0)$ in $\mathfrak{F}$ liegen. Wenn

$$Y_2 = Y_1[U], \quad Y_1\, Y_2 \in \mathfrak{F}$$

mit ganzer unimodularer Matrix U gilt, so ist notwendig $Y_1 = Y_2$, also U eine Einheit von Y_1. Es gibt nur endlich viele solche; ihre Anzahl sei $\varepsilon(Y_1)$. Es zeigt sich nun, daß $\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{G})$ übereinstimmt mit der Maximalzahl der ganzen, paarweise nicht assoziierten Matrizen $G = G^{(m,n)}$, welche den Bedingungen

$$QG \in \mathfrak{R}^*, \quad S[G] \in \mathfrak{G}^*, \quad |S[G]| \leqq q^2 \tag{3}$$

genügen. Assoziiert sollen G_1 und G_2 dann heißen, wenn $G_2 = G_1 U$ mit ganzer unimodularer Matrix U gilt. Auf Grund der letzten Bemerkungen ist nun

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{G}) = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{F} \\ |T| \leqq q^2}} \frac{a(Q, T; \mathfrak{R}^*)}{\varepsilon(T)} \tag{4}$$

festzustellen, wobei $a(Q, T; \mathfrak{R}^*)$ die Anzahl aller ganzen Matrizen G ist, für die $QG \in \mathfrak{R}^*$ und $S[G] = T$ gilt. Damit sind wir, wenn wir vom Nenner $\varepsilon(T)$ absehen, auf die schon in [2] angegebene Problemstellung geführt.

Das Problem der asymptotischen Berechnung von $\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{G})$ erfordert die Einführung geeigneter Maße in $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{G}_0$. Ein solches wird für $\mathfrak{R}_0$ durch

$$I(\mathfrak{R}) = \int\limits_{\substack{X \in \mathfrak{R}^* \\ X'X = E}} d\omega \tag{5}$$

geliefert, wobei (s. auch [3], § 1)

$$d\omega = |Y|^{1/2(n+1-m)} \frac{[dX]}{[dY]} \text{ mit } Y = X'X \tag{6}$$

zu wählen ist und E die Einheitsmatrix bezeichnet. Für $\mathfrak{G}_0$ erweist sich als zweckmäßig

$$I(\mathfrak{G}) = \int\limits_{\substack{Y \in \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{F} \\ |Y| = 1}} d\varrho \tag{7}$$

mit dem invarianten Volumenelement $d\varrho$ der Metrik, die durch die metrische Fundamentalform

$$ds^2 = \sigma(Y^{-1} dY\, Y^{-1} dY) \qquad (\sigma = \text{Spur}) \tag{8}$$

auf der Determinantenfläche $|Y| = 1$ im Raum $Y > 0$ induziert wird.

Eine Lösung unseres Verteilungsproblems wurde für den Spezialfall $n = 2$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ von W. Roelcke [5] mit Hilfe seiner Untersuchungen über automorphe Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators zur hyperbolischen Ebene geliefert. Nachdem das analytische Verhalten der allgemeinen, zu $n = 2$ gehörigen Zetafunktionen in ausreichendem Maße untersucht worden ist [4], kann der Fall $n = 2$ nach dem in [5] entwickelten Verfahren für beliebige Mengen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$ behandelt werden. Es ergibt sich

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{G}) \sim \frac{I(\mathfrak{R})\, I(\mathfrak{G})}{I(\mathfrak{R}_0)\, I(\mathfrak{G}_0)} \cdot \frac{(2\pi q)^m}{24\, |\mathfrak{S}|^2\, m\, \Gamma(m-1)} \text{ für } q \to \infty \; (n = 2), \tag{9}$$

vorausgesetzt, daß die Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ im Riemannschen Sinne meßbar sind, d. h. daß sich die Integrale (5) und (7) als Riemannsche Integrale interpretieren lassen. Auf die Notwendigkeit einer solchen Annahme hat W. Roelcke hinsichtlich der Menge $\mathfrak{G}$ gelegentlich selbst hingewiesen. Beim Beweis von (9) wird eine genaue Kenntnis von [5] vorausgesetzt. Es genügt dann, nur diejenigen Betrachtungen weiter auszuführen, die sich auf die Verteilung der zweidimensionalen Gitter in $\mathfrak{R}_0$ beziehen.

Im Raum der reellwertigen Funktionen $w(X)$ und $v(Y)$, die im Bereich $X'X = E$ bzw. $|Y| = 1$, $Y > 0$ definiert sind, werden Skalarprodukte durch

$$(w_1, w_2) = \int\limits_{X'X = E} w_1(X)\, w_2(X)\, d\omega \tag{10}$$

und

$$(v_1, v_2) = \int\limits_{\substack{Y \in \mathfrak{F} \\ |Y| = 1}} v_1(Y)\, v_2(Y)\, d\varrho \tag{11}$$

erklärt. Das letztere ist unabhängig von der Auswahl von $\mathfrak{F}$, wenn die Invarianz der Funktionen $v_i(Y)$ $(i = 1, 2)$ gegenüber den Substitutionen $Y \to Y[U]$ (U ganz und unimodular) vorausgesetzt wird. Eine in $X'X > 0$ definierte Funktion $w(X)$ ist als Funktion auf $\mathfrak{R}_0$ anzusehen, wenn $w(XV) = w(X)$ für nicht-singuläre V gilt. Analog wird durch eine in $Y > 0$ definierte Funktion $v(Y)$ eine Funktion über $\mathfrak{G}_0$ erklärt, wenn $v(\lambda Y[U]) = v(Y)$ für $\lambda > 0$ und ganzes unimodulares U ist. Bezeichnen wir nun mit $w(X)$ und $v(Y)$ die charakteristischen Funktionen von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{G}$, so ist einerseits

$$I(\mathfrak{R}) = (w, 1), \quad I(\mathfrak{G}) = (v, 1). \tag{12}$$

Andererseits ist $\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{G})$ identisch mit

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; w, v) = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{F} \\ |T| \leq q^2}} \frac{v(T)}{\varepsilon(T)} a(Q, T; w), \tag{13}$$

wobei

$$a(Q, T; w) = \sum_{\substack{G \text{ ganz} \\ S[G] = T}}' w(QG) \tag{14}$$

gesetzt ist. Unsere Behauptung stellt sich damit in der Form

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; w, v) \sim \frac{(w, 1)\,(v, 1)}{I(\mathfrak{R}_0)\,I(\mathfrak{G}_0)} \frac{(2\pi q)^m}{24\,|\mathfrak{S}|^2\, m\, \Gamma(m-1)} \text{ für } q \to \infty \ (n = 2) \tag{15}$$

dar. Das Beweisverfahren, welches ursprünglich auf HECKE [1] zurückgeht, besteht darin, (15) zunächst für spezielle Funktionen w, v auf $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\mathfrak{G}_0$ zu beweisen, aus denen die charakteristischen Funktionen dann in gewisser Weise zusammengesetzt werden können. Verschwindet eines von den Skalarprodukten, so soll (15) dasselbe bedeuten wie

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; w, v) = o(q^m)$$

in Landauscher Bezeichnung.

Das analytische Hilfsmittel hat man in den Zetafunktionen

$$\zeta(s, S; w, v) = \sum_{\substack{\{G\} \\ G'G > 0}} w(QG)\, v(S[G]) |S[G]|^{-s}. \tag{16}$$

Summiert wird hier über ein volles System ganzer, paarweise nicht assoziierter Matrizen G vom Rang n. Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ die Folge der Werte von $|S[G]|$ in wachsender Anordnung, so daß

$$\zeta(s, S; w, v) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n(w, v)\, \lambda_n^{-s} \tag{17}$$

mit

$$a_n(w, v) = \sum_{\substack{\{G\} \\ G'G > 0 \\ |S[G]| = \lambda_n}} w(QG)\, v(S[G]) = \sum_{\substack{G \text{ ganz} \\ S[G] \in \mathfrak{F} \\ |S[G]| = \lambda_n}} \frac{w(QG)\, v(S[G])}{\varepsilon(S[G])}$$

gilt. Für die summatorische Funktion der Koeffizienten erhalten wir damit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(w, v) = \alpha_q(\mathfrak{S}; w, v), \text{ falls } \lambda_n \leq q^2 < \lambda_{n+1} \tag{18}$$

angenommen wird.

Da wir eine genauere Kenntnis von den Zetafunktionen (16) benötigen, beschränken wir uns von nun an auf die Betrachtung der zweidimensionalen Untergitter von $\mathfrak{S}$. Wir verwenden die Parameterdarstellung

$$Y = t\begin{pmatrix}(x^2+y^2)\,y^{-1} & x\,y^{-1}\\ x\,y^{-1} & y^{-1}\end{pmatrix},\; t > 0,\; y > 0 \tag{19}$$

und setzen $\tau = x + i\,y$. Als Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ kann und soll diejenige Menge im Bereich $Y > 0$ genommen werden, welche dem Bereich

$$\{(u,\tau) : u > 0,\; y > 0,\; 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},\; x^2 + y^2 \geqq 1\}$$

entspricht. Eine Funktion auf $\mathfrak{G}_0$ stellt sich nun als automorphe Funktion $v(\tau)$ der Gruppe Γ dar, die von den Spiegelungen an den Geraden $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und an dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ erzeugt wird. Offenbar ist

$$\mathfrak{B}_0 = \{\tau : 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},\; y > 0,\; x^2 + y^2 \geqq 1\}$$

ein Fundamentalbereich von Γ in der oberen τ-Halbebene. Die Abbildung, welche $\mathfrak{G}_0$ umkehrbar eindeutig in $\mathfrak{B}_0$ überführt, bilde $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{B}$ ab. Bei geeigneter Normierung wird $d\varrho = y^{-2}\,d\,x\,d\,y$ und daher

$$I(\mathfrak{G}) = \int_{\mathfrak{B}} y^{-2}\,d\,x\,d\,y\,.$$

Wir vereinbaren noch die abkürzende Bezeichnung $v(\tau(Y)) = v(Y)$ für Funktionen, die in Y homogen vom Grad 0 sind. An Stelle von (11) ist nun

$$(v_1, v_2) = \int_{\mathfrak{B}_0} v_1(\tau)\,v_2(\tau)\,y^{-2}\,d\,x\,d\,y$$

zu verwenden.

In (16) werden wir zunächst

$$w(X) = \frac{u\,(X)}{|X'X|^k} \tag{20}$$

wählen, wobei $u\,(X)$ eine beliebige Kugelfunktion vom Typus $(m, 2)$ und Grad $4\,k$ ist (vgl. hierzu [3]). Da $u\,(X)$ nicht durch $|X'X|$ teilbar ist, so ist die Quotientendarstellung (20) eindeutig. Im Hinblick auf [4] entwickelten wir $u(X)$ nach harmonischen Formen:

$$u(X) = \sum_{\nu=0}^{2k}{}' (\sigma(X'X))^\nu u_\nu(X)\,. \tag{21}$$

Hierbei ist $u_\nu(X)$ homogen vom Grad $4\,k - 2\,\nu$ und

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right) u_\nu(X) = 0\,.$$

Wir berechnen das Skalarprodukt

$$(u, 1) = \int_{X'X = E} u(X)\,d\,\omega_X\,,$$

wobei der größeren Deutlichkeit halber $d\,\omega = d\,\omega_X$ gesetzt ist. Sei $P = X\,R$

mit nicht-singulärer Matrix R und $T = R'R$. Zufolge der Transformationsinvarianz von $d\omega_X$ wird dann

$$(u, 1) \int\limits_{\substack{\sigma(T) \leqq 1 \\ T > 0}} |T|^{k + \frac{1}{2}(m-3)} [dT]$$

$$= \int\limits_{\substack{\sigma(T) \leqq 1 \\ T > 0}} |T|^{k + \frac{1}{2}(m-3)} \int\limits_{P'P = T} u(PR^{-1})\, d\omega_P [dT]$$

$$= \int\limits_{\sigma(P'P) \leqq 1} u(P)\, [dP]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2k} \int\limits_{\sigma(P'P) \leqq 1} (\sigma(P'P))^\nu u_\nu(P)\, [dP]$$

$$= u_{2k}(0) \int\limits_{\sigma(P'P) \leqq 1} (\sigma(P'P))^{2k} [dP];$$

denn der über eine Kugelfläche $\sigma(P'P) =$ konst. gemittelte Wert einer nicht-konstanten harmonischen Form ist Null. Nun ist aber, wie in [3] gezeigt wurde, $(u, 1) = 0$ für nicht-konstante Kugelfunktionen $u(X)$. In jedem Fall ist also

$$u(0) = u_{2k}(0)\,. \tag{22}$$

Unter $v(Y) = v(\tau)$ werde nun eine beschränkte, bezüglich Γ invariante Eigenfunktion des Laplaceschen Operators der hyperbolischen Ebene verstanden:

$$\left\{y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4} + r^2\right\} v(\tau) = 0\,. \tag{23}$$

Auf Grund der Formeln [4], (1), (12) sowie einer weiteren zwischen (51) und (52) erhalten wir für unsere Zetafunktion die Darstellung

$$\zeta(s, S; w, v) \tag{24}$$

$$= \frac{\Gamma(s-\alpha_1)\,\Gamma(s-\alpha_2)}{\Gamma(s+k-\alpha_1)\,\Gamma(s+k-\alpha_2)} \sum_{\mu=0}^{2k} \pi^{2k-\mu} \frac{\Gamma(2s+2k)}{\Gamma(2s+2k-\mu)}\, \varphi(s, S; u_\mu, v)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{ir}{2}\,, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} - \frac{ir}{2}$$

und

$$\varphi(s, S; u_\mu, v) = \sum_{\substack{\{G\} \\ G'G > 0}}{}' L_\mu\left(QG\frac{\partial}{\partial G'}Q^{-1}\right)\{v(S[G])|S[G]|^{-s}\}\,. \tag{25}$$

Dabei ist der lineare Operator $L_\mu\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$ durch

$$L_\mu\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} = u_\mu(X)\, e^{-\pi\sigma(X'X)} \tag{26}$$

hinreichend erklärt. Für die Reihen (25) gilt der in [4], S. 28 formulierte Sachverhalt, woraus erhellt, daß $\zeta(s, S; w, v)$ für $\Re e\, s > \frac{m}{2} - \frac{1}{4}$, $s \neq \frac{m}{2}$ regulär ist, in $s = \frac{m}{2}$ einen Pol höchstens erster Ordnung hat und daß

$$\zeta(s, S; w, v) = O(e^{C|t|}) \qquad \text{für } |t| \to \infty \tag{27}$$

gleichmäßig in $\Re s \geqq \frac{m}{2}$ mit einer gewissen positiven Konstanten C gilt. Das trifft offenbar auch für

$$\zeta(s,S;w+M,v+N) = \zeta(s,S;w,v) + M\,\zeta(s,S;1,v) + N\zeta(s,S;w,1) + MN\,\zeta(s,S;1,1) \tag{28}$$

zu, wobei M, N willkürliche Konstanten sind, die wir uns so gewählt denken, daß

$$w(X) + M > 0,\; v(Y) + N > 0$$

ist. Sodann ist (28) eine Dirichletsche Reihe vom Typus (17) mit reellen, nicht-negativen Koeffizienten, auf die der folgende Satz von HARDY und LITTLEWOOD angewendet werden kann:

1. Die mit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ sei für $\Re s > \sigma_0 > 0$ absolut konvergent.

2. Ist $\varphi(s)$ die durch die Reihe erklärte analytische Funktion, so sei $\varphi(s) - \frac{b}{s-c}$ mit geeignetem b und einem gewissen c im Intervall $0 < c \leqq \sigma_0$ regulär für $\Re s \geqq c$.

3. Es sei $\varphi(s) = O(e^{C|t|})$ für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in $\Re s \geqq c$ mit geeignetem $C > 0$.

4. Es sei $a_n \geqq 0$ für alle n.

Dann ist

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \sim \frac{b}{c}\lambda_n^c \qquad \text{für } n \to \infty\,. \tag{29}$$

Im Fall $\varphi(s) = \zeta(s,S;w+M,v+N)$ ist $c = \frac{m}{2}$ zu wählen. Auf Grund der Angaben in [4], S. 28 ergibt sich wegen (22)

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{m}{2}} \varphi(s,S;u_\mu,v) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu < 2k,\\ \dfrac{\delta(v)\,u(0)\,(2\pi)^m}{48\,|\mathfrak{S}|^2\,\Gamma(m-1)} & \text{für } \mu = 2k, \end{cases} \tag{30}$$

wobei

$$\delta(v) = \begin{cases} v \text{ für konstantes } v,\\ 0 \text{ für nicht-konstantes } v \end{cases} \tag{31}$$

gesetzt ist. Nach (24) ist also

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{m}{2}} \zeta(s,S;w,v) = \frac{\delta(v)\,u(0)\,(2\pi)^m}{48\,|\mathfrak{S}|^2\,\Gamma(m-1)}, \tag{32}$$

mithin

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{m}{2}} \zeta(s,S;w+M,v+N) = \frac{(\delta(v)+N)\,(u(0)+M)\,(2\pi)^m}{48\,|\mathfrak{S}|^2\,\Gamma(m-1)}\,. \tag{33}$$

Der Hardy-Littlewoodsche Satz liefert damit die asymptotische Beziehung

$$\sum_{\substack{G \text{ ganz}\\ S[G]\subset\mathfrak{F}\\ |S[G]|\leqq\lambda_n}} \frac{(w(QG)+M)\,(v(S[G])+N)}{\varepsilon(S[G])} \sim \frac{(\delta(v)+N)\,(u(0)+M)\,(2\pi\sqrt{\lambda_n})^m}{24\,|\mathfrak{S}|^2\,m\,\Gamma(m-1)} \qquad \text{für} \quad n\to\infty \tag{34}$$

und hinreichend große, sonst aber beliebige M, N. Offenbar ist (34) dann aber auch für $M = N = 0$ gültig. Da bereits $|S[Gt]| : |S[G(t+1)]| = t^4 : (t+1)^4$ für $t \to \infty$ den Limes 1 hat, so gilt erst recht $\lambda_n : \lambda_{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$. Damit kann

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; w, v) \sim \frac{\delta(v)\, u(0)\, (2\pi q)^m}{24\,|\mathfrak{S}^2|\, m\, \Gamma(m-1)} \qquad \text{für} \quad q \to \infty \tag{35}$$

festgestellt werden. Berücksichtigen wir noch, daß im vorliegenden Fall

$$u(0) = \frac{(w,1)}{I(\mathfrak{R}_0)}, \qquad \delta(v) = \frac{(v,1)}{I(\mathfrak{G}_0)} \tag{36}$$

ist, so ergibt sich schließlich (15) für die speziellen in (20) aufgeführten $w(X)$ und beschränkte Größencharaktere $v(Y)$.

Der nächste Schritt besteht darin, (15) für dieselben $w(X)$, aber solche Funktionen $v(Y) = v(\tau)$ über $\mathfrak{G}_0$ zu beweisen, die nach x, y beliebig oft stetig differenzierbar sind und in $\mathfrak{B}_0$ außerhalb eines gewissen Kompaktums identisch verschwinden. Dabei tritt das kontinuierliche Spektrum des Laplaceschen Operators $y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ in Erscheinung. Die Überlegungen verlaufen jedoch in völliger Analogie zu [5], so daß es sich erübrigt, hier näher darauf einzugehen. Mit der in [5] angegebenen Schlußweise ergibt sich nun die Gültigkeit von (15) auch für die charakteristische Funktion $v(Y)$ von $\mathfrak{G}$, während $w(X)$ unverändert eine Funktion vom Typus (20) oder auch eine endliche Summe von solchen Funktionen bezeichnet. Die Integrierbarkeit von $v(Y)$ im Riemannschen Sinne ist erforderlich, um eine zu [5], (53) analoge Formel erschließen zu können.

Jetzt muß noch der Übergang von der Funktionenklasse (20) zur charakteristischen Funktion von $\mathfrak{R}$ vollzogen werden. Im folgenden mögen $w(X)$ und $v(Y)$ die charakteristischen Funktionen von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{G}$ bezeichnen. Da $w(X)$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, können zu $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen $w_\varepsilon^-(X)$ und $w_\varepsilon^+(X)$ über $\mathfrak{R}_0$ bestimmt werden, so daß

$$w_\varepsilon^-(X) \leqq w(X) \leqq w_\varepsilon^+(X) \tag{37}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (w_\varepsilon^+ - w_\varepsilon^-, 1) = 0 \tag{38}$$

ist. Auf Grund des in [2] bewiesenen Approximationssatzes lassen sich endliche Summen $p_\varepsilon^\pm(X)$ der Art

$$\sum \frac{u(X)}{|X'X|^k},$$

wobei $u(X)$ eine Kugelfunktion vom Typus $(m, 2)$ und Grad $4k$ bezeichnet, so bestimmen, daß

$$w_\varepsilon^-(X) - \varepsilon < p_\varepsilon^-(X) < w_\varepsilon^-(X),\; w_\varepsilon^+(X) < p_\varepsilon^+(X) < w_\varepsilon^+(X) + \varepsilon \tag{39}$$

gilt. Die Abschätzung

$$(p_\varepsilon^+ - p_\varepsilon^-, 1) \leqq (w_\varepsilon^+ - w_\varepsilon^-, 1) + 2\varepsilon(1,1) \tag{40}$$

liefert dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (p_\varepsilon^+ - p_\varepsilon^-, 1) = 0 . \tag{41}$$

Beachtet man ferner, daß

$$p_\varepsilon^-(X) < w(X) < p_\varepsilon^+(X) \tag{42}$$

und (15) für $p_\varepsilon^\pm(X)$ an Stelle von $w(X)$ bereits bewiesen ist, so ergibt ein einfacher Grenzprozeß die Gültigkeit von (15) mit $w(X)$ und $v(Y)$ in der angenommenen Bedeutung. Der Beweis von (9) ist damit erbracht.

Literatur

[1] Hecke, E.: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I. Mitt. Math. Z. **1**, 357—376 (1918). — [2] Maass, H.: Spherical Functions and Quadratic Forms. J. Indian math. Soc. **20**, 117—162 (1956). — [3] Maass, H.: Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen. Math. Ann. **135**, 391—416 (1958). — [4] Maass, H.: Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen. Math. Ann. **134**, 1—32 (1957). — [5] Roelcke, W.: Über die Verteilung der Klassen eigentlich assoziierter zweireihiger Matrizen, die sich durch eine positiv-definite Matrix darstellen lassen. Math. Ann. **131**, 260—277 (1956).

(Eingegangen am 7. November 1958)