Maass, H.
Math. Annalen, Bd. 137, S. 142—149 (1959)

127

Zur Theorie der harmonischen Formen

Von

Hans Maass in Heidelberg

Einleitung

Es sei $\mathfrak{x}$ die Spalte mit den reellen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ als Elementen und $\mathfrak{x}'$ die Zeile, die aus $\mathfrak{x}$ durch Transposition entsteht. Allgemein werde die Transponierte einer Matrix W mit W' bezeichnet. $W = W^{(m,n)}$ soll besagen, daß die Matrix m Zeilen und n Spalten hat. Die Bildung der Determinante $|W|$ setzt voraus, daß W quadratisch, also $m = n$ ist. Es wird dann auch $W = W^{(n)}$ geschrieben. Unter einer Form wird durchweg ein homogenes Polynom verstanden.

Die Bedeutung der (im gewöhnlichen Sinne) harmonischen Formen kommt im wesentlichen in den folgenden beiden Eigenschaften zum Ausdruck:

1. Zu jeder Form $u(\mathfrak{x})$ vom Grad k gibt es eindeutig bestimmte harmonische Formen $u_\nu(\mathfrak{x})$ vom Grad $k - 2\nu \left(0 \leqq \nu \leqq \frac{k}{2}\right)$, so daß

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_\nu (\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^\nu u_\nu(\mathfrak{x})$$

gilt.

2. Die harmonischen Formen k-ten Grades sind mit den endlichen Summen $\Sigma(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k$ identisch, wobei $\mathfrak{a}'\mathfrak{a} = 0$ ist.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die Verallgemeinerung dieser Sätze auf Formen $u(X)$ in einer Matrixvariablen $X = X^{(m,n)}$ $(m > n)$ mit einer Homogenitätsforderung bezüglich der Substitutionen $X \to XV$ $(|V| \neq 0)$. Damit werden in [1] ausgesprochene Vermutungen und spezielle für $n = 2$ gültige Ergebnisse in voller Allgemeinheit bewiesen. Es erübrigt sich der Gebrauch expliziter Operatorenidentitäten, die nur sehr mühsam abzuleiten sind. Mit $\mathfrak{F}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ in der Bedeutung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_k^{(n)} &= \{u(X) : u(XV) = |V|^k u(X) \text{ für } |V| \neq 0\} \\ \mathfrak{H}_k^{(n)} &= \left\{u(X) : u(X) \in \mathfrak{F}_k^{(n)}, \left|\frac{\partial}{\partial X'}\frac{\partial}{\partial X}\right| u(X) = 0\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

wird nun behauptet:

Satz 1. *Zu jeder Form $u(X) \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$ gibt es eindeutig bestimmte Formen $u_\nu(X) \in \mathfrak{H}_{k-2\nu}^{(n)} \left(0 \leqq \nu \leqq \frac{k}{2}\right)$, so daß*

$$u(X) = \sum_\nu |X'X|^\nu u_\nu(X) \tag{2}$$

gilt.

Satz 2. *Die Formen der Schar* $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ *bestehen aus den endlichen Summen* $\Sigma\,|L'X|^k$ *mit* $|L'L| = 0$.

Daß die endlichen Summen $\Sigma\,|L'X|^k$ in $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ liegen, falls $|L'L| = 0$ ist, wurde bereits in [1] gezeigt. Satz 1 besagt de facto, daß

$$\mathfrak{F}_k^{(n)} = \mathfrak{H}_k^{(n)} + |X'X|\,\mathfrak{F}_{k-2}^{(n)} \tag{3}$$

gilt und daß dies eine direkte Summe ist. Damit ergibt sich die Dimensionsrelation

$$\dim \mathfrak{H}_k^{(n)} = \dim \mathfrak{F}_k^{(n)} - \dim \mathfrak{F}_{k-2}^{(n)}\,. \tag{4}$$

Aus einer allgemeinen in [2] angegebenen Formel erhalten wir durch Spezialisierung schließlich

$$\dim \mathfrak{F}_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \binom{m-1+k}{k} & \binom{m-2+k}{k-1} & \cdots & \binom{m-n+k}{k-n+1} \\ \binom{m-1+k}{k+1} & \binom{m-2+k}{k} & \cdots & \binom{m-n+k}{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{m-1+k}{k+n-1} & \binom{m-2+k}{k+n-2} & \cdots & \binom{m-n+k}{k} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Die Beweise der Sätze 1 und 2 werden durch ein allgemeines Entwicklungstheorem ermöglicht, welchem ein System von Formen zugrunde liegt und welches im einzelnen folgendes besagt:

Satz 3. *Es sei* $F_1(\mathfrak{x}), F_2(\mathfrak{x}), \ldots, F_q(\mathfrak{x})$ *ein System von nicht konstanten Formen mit reellen Koeffizienten. Das von diesen Formen erzeugte Polynomideal* $\mathfrak{P}$ *enthalte alle Polynome, die auf dem Nullstellengebilde* $\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{P}$ *verschwinden. Dann läßt sich jede Form* $u(\mathfrak{x})$ *als endliches Kompositum der Art*

$$u(\mathfrak{x}) = \Sigma (F_1(\mathfrak{x}))^{\mu_1} (F_2(\mathfrak{x}))^{\mu_2} \ldots (F_q(\mathfrak{x}))^{\mu_q} (\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^{\nu} \tag{6}$$

mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{N}$ *darstellen.*

Für unsere Beweisführung ist außerdem eine sinngemäße Verallgemeinerung des Begriffs der harmonischen Form von Bedeutung, wobei an Stelle von $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ eine beliebige nicht konstante irreduzible Form $F(\mathfrak{x})$ mit reellen Koeffizienten tritt. Eine Form $u(\mathfrak{x})$ wird F-harmonisch genannt, wenn sie von dem Operator $F\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right)$ annulliert wird. Demnach ist

$$\mathfrak{H}_k(F) = \left\{ u(\mathfrak{x}) : u(\mathfrak{x}a) = a^k u(\mathfrak{x})\,,\ F\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) u(\mathfrak{x}) = 0 \right\} \tag{7}$$

die lineare Schar aller F-harmonischen Formen k-ten Grades. Auch jetzt gilt in Analogie zum Fall $F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}$:

Satz 4. *Es sei* $F(\mathfrak{x})$ *eine irreduzible Form vom Grad* $g > 0$ *mit reellen Koeffizienten. Zu jeder Form* $u(\mathfrak{x})$ *vom Grad* k *gibt es dann eindeutig bestimmte Formen* $u_\nu(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{H}_{k-g\nu}(F)$ $\left(0 \leqq \nu \leqq \frac{k}{g}\right)$, *so daß*

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu} (F(\mathfrak{x}))^{\nu} u_\nu(\mathfrak{x}) \tag{8}$$

gilt.

Satz 5. *Die Formen der Schar* $\mathfrak{H}_k(F)$ *bestehen aus den endlichen Summen* $\Sigma(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k$ *mit* $F(\mathfrak{a}) = 0$.

Wir beginnen nun mit der Ausführung des Programms.

§ 1. Der allgemeine Entwicklungssatz

Zum Beweis von Satz 3 machen wir uns zunächst klar, daß zu einer vorgegebenen ganzen Zahl $k \geqq 0$ ein endliches System von Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ in

$$\mathfrak{N} = \{\mathfrak{a} : F_i(\mathfrak{a}) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, q\} \tag{9}$$

gefunden werden kann, so daß

$$u(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{P} \text{ oder, damit gleichwertig, } u(\mathfrak{a}) = 0 \text{ für } \mathfrak{a} \in \mathfrak{N}$$

für Formen $u(\mathfrak{x})$ vom Grad k bereits aus

$$u(\mathfrak{a}_i) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r \tag{10}$$

folgt. Das ist trivial, da $u(\mathfrak{a}) = 0$ für die unbestimmten Koeffizienten von $u(\mathfrak{x})$ eine lineare homogene Gleichung darstellt und es höchstens s linear unabhängige Gleichungen dieser Art geben kann, wenn s die Anzahl der Elemente von $u(\mathfrak{x})$ bezeichnet. Wir denken uns r minimal gewählt; sodann ist r durch k eindeutig bestimmt und $r \leqq s$. Es sei $\mathfrak{F}_k$ die lineare Schar aller Formen vom Grad k. Da das Gleichungssystem (10) den Rang r hat, so ist

$$\dim(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{P}) = s - r\,,$$

wegen $\dim \mathfrak{F}_k = s$ also

$$\dim(\mathfrak{F}_k / \mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{P}) = r\,. \tag{11}$$

Offenbar ist

$$A = (a_{i1}^{\nu_1}\, a_{i2}^{\nu_2} \ldots a_{im}^{\nu_m}) \qquad (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = k) \tag{12}$$

die Koeffizientenmatrix des Systems (10), wenn wir mit $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ die Elemente von $\mathfrak{a}_i$ bezeichnen. Die Zeilen von A werden durch den Index i und die Spalten durch die Exponentensysteme $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ bestimmt, die wir uns in irgend einer Weise angeordnet denken. A ist vom Typus $A^{(r,s)}$ und hat den Rang r. Wir zeigen nun, daß die Formen $(\mathfrak{a}_i'\mathfrak{x})^k$ $(i = 1, 2, \ldots, r) \bmod \mathfrak{P}$ unabhängig sind. Sei

$$\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathfrak{a}_i'\,\mathfrak{x})^k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

mit gewissen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Das bedeutet

$$\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathfrak{a}_i'\,\mathfrak{b})^k = 0 \text{ für } \mathfrak{b} \in \mathfrak{N}\,.$$

Da gemäß den Voraussetzungen von Satz 3 das Gebilde $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{a}$ auch den konjugiert komplexen Vektor $\bar{\mathfrak{a}}$ enthält, so kann $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_r$ gewählt werden. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{r} c_i(\mathfrak{a}_i'\,\bar{\mathfrak{a}}_j)^k = 0 \text{ für } j = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Aus der Entwicklung

$$(\mathfrak{a}_i' \overline{\mathfrak{a}}_j)^k = \Sigma \frac{k!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}\, a_{i1}^{\nu_1} a_{i2}^{\nu_2} \ldots a_{im}^{\nu_m} \overline{a}_{j1}^{\nu_1} \overline{a}_{j2}^{\nu_2} \ldots \overline{a}_{jm}^{\nu_m},$$

wobei über alle ganzen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m \geqq 0$ mit $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = k$ summiert wird, ist zu ersehen, daß die Matrizenrelation

$$((\mathfrak{a}_i' \overline{\mathfrak{a}}_j)^k) = A D \overline{A}' \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

gilt, wenn $D = D^{(s)}$ die Diagonalmatrix mit den Elementen $\frac{k!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}$ bezeichnet. Wegen Rang $A = r$ ist also

$$|(\mathfrak{a}_i' \overline{\mathfrak{a}}_j)^k| \neq 0\,,$$

mithin $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$, q.e.d. Damit ist auch gezeigt, daß jede Form $u(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{F}_k \bmod \mathfrak{P}$ eindeutig als Linearkombination der $(\mathfrak{a}_i'\mathfrak{x})^k$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ geschrieben werden kann:

$$u(\mathfrak{x}) \equiv \sum_{i=1}^{r} c_i (\mathfrak{a}_i'\mathfrak{x})^k \pmod{\mathfrak{P}}\,. \tag{13}$$

Wird $\mathfrak{b}_i = \sqrt[k]{c_i}\, \mathfrak{a}_i$ gesetzt, so resultiert eine Beziehung der Art

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{r} (\mathfrak{b}_i'\mathfrak{x})^k + \sum_{i=1}^{q} F_i(\mathfrak{x})\, u_i(\mathfrak{x}) \tag{14}$$

mit $\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und gewissen $u_i(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{F}_{k-g_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$, wobei g_i den Grad von $F_i(\mathfrak{x})$ bezeichnet. Vollständige Induktion nach dem Grad von $u(\mathfrak{x})$ ergibt nun in evidenter Weise den Beweis von Satz 3.

Das Beweisverfahren liefert noch eine schärfere Aussage, die wir für spätere Zwecke hier formulieren als

Hilfssatz 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gibt es in der Restklasse* $u(\mathfrak{x}) \bmod \mathfrak{P}$ *einer jeden Form* $u(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{F}_k$ *genau eine Form* $v(\mathfrak{x})$, *die sich als endliche Summe der Art* $v(\mathfrak{x}) = \Sigma\, (\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k$ *mit* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{N}$ *darstellen läßt.*

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß Potenzen $(\mathfrak{b}_i'\mathfrak{x})^k$ mit $\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, die linear unabhängig sind, auch $\bmod \mathfrak{P}$ unabhängig sind. Sodann ist

$$\Sigma\, (\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}} \text{ mit } \Sigma\, (\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k = 0$$

gleichwertig.

Es seien $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}$ die Elemente von $\mathfrak{b}_i$. Aus der linearen Unabhängigkeit der Formen $(\mathfrak{b}_i'\mathfrak{x})^k$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ folgt, daß die Koeffizientenmatrix dieses Formensystems:

$$\left(\frac{k!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}\, b_{i1}^{\nu_1} b_{i2}^{\nu_2} \ldots b_{im}^{\nu_m}\right) = BD$$

den Rang t hat. Folglich ist die Determinante

$$|(\mathfrak{b}_i' \overline{\mathfrak{b}}_j)^k| = |BD\overline{B}'| \neq 0\,.$$

Hieraus konnte aber geschlossen werden, daß das Formensystem $(\mathfrak{b}_i'\mathfrak{x})^k$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ auch $\bmod \mathfrak{P}$ unabhängig ist, q.e.d.

§ 2. Die F-harmonischen Formen

Hilfssatz 2. *Es sei $F(\mathfrak{x})$ eine von Null verschiedene Form vom Grad g und $v(\mathfrak{x})$ eine beliebige Form von Grad h. Dann existiert immer eine Form $u(\mathfrak{x})$ vom Grad $k = g + h$ derart, daß $F\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) u(\mathfrak{x}) = v(\mathfrak{x})$ wird.*

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Variablenzahl m. Für $m = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig. Sei also $m > 1$ und Hilfssatz 2 für $m - 1$ an Stelle von m bewiesen. Wir zeichnen die Variable $x = x_m$ aus und fassen $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ zu einem Vektor $\mathfrak{y}$ zusammen. In den Entwicklungen

$$F(\mathfrak{x}) = \sum_{i=a}^{g} F_i(\mathfrak{y}) x^{g-i}, \quad u(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{k} u_j(\mathfrak{y}) x^{k-j}, \quad v(\mathfrak{x}) = \sum_{i=0}^{h} v_i(\mathfrak{y}) x^{h-i}$$

sind $F_i(\mathfrak{y}), u_i(\mathfrak{y}), v_i(\mathfrak{y})$ Formen vom Grad i. Die Zahl a sei so gewählt, daß $F_a(\mathfrak{y}) \neq 0$ ist. Die Differentialgleichung des Hilfssatzes geht nun in

$$\sum_{i=a}^{g} \sum_{j=0}^{k} F_i\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}}\right) u_j(\mathfrak{y}) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{g-i} x^{k-j} = \sum_{i=0}^{h} v_i(\mathfrak{y}) x^{h-i}$$

und damit in

$$\sum_{i=a}^{g} \sum_{r=0}^{k-g} (g-i)! \binom{k-i-r}{g-i} F_i\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}}\right) u_{i+r}(\mathfrak{y}) x^{h-r} = \sum_{r=0}^{h} v_r(\mathfrak{y}) x^{h-r}$$

über. Diese Gleichung zerfällt in das System

$$\sum_{i=a}^{g} (g-i)! \binom{k-i-r}{g-i} F_i\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) u_{i+r}(\mathfrak{y}) = v_r(\mathfrak{y}) \qquad (0 \leqq r \leqq h).$$

Die Formen $u_\nu(\mathfrak{y})$ für $a + h < \nu \leqq k$ können willkürlich vorgegeben werden. Nach Induktionsvoraussetzung kann $u_{a+h}(\mathfrak{y})$ so gewählt werden, daß die letzte Gleichung befriedigt wird. Aus der vorletzten Gleichung kann $u_{a+h-1}(\mathfrak{y})$ berechnet werden usw. Schließlich liefert die erste Gleichung $u_a(\mathfrak{y})$. Für die noch fehlenden Formen $u_\nu(\mathfrak{y})$ $(0 \leqq \nu < a)$ ergeben sich keine Bedingungen, sie sind also auch willkürlich zu wählen. Die Auflösbarkeit des Systems ist so bewiesen, damit auch Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3. *Es sei $F(\mathfrak{x})$ eine nicht konstante irreduzible Form vom Grad g mit reellen Koeffizienten. Dann ist*

$$\dim \mathfrak{H}_k(F) = \dim \mathfrak{F}_k - \dim \mathfrak{F}_{k-g} \tag{15}$$

und $\mathfrak{H}_k(F)$ besteht aus den endlichen Summen $\Sigma(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k$ mit $F(\mathfrak{a}) = 0$.

Beweis: Durch $u(\mathfrak{x}) \to F\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right) u(\mathfrak{x})$ wird nach Hilfssatz 2 ein Modulhomomorphismus von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{F}_{k-g}$ definiert. $\mathfrak{H}_k(F)$ ist der Kern dieser Abbildung. Daraus folgt die Dimensionsrelation. Der Irreduzibilität von $F(\mathfrak{x})$ zufolge sind die Voraussetzungen von Satz 3 für das Polynomideal $\mathfrak{P} = (F(\mathfrak{x}))$ erfüllt. Wird $\mathfrak{L}_k$ durch

$$\mathfrak{L}_k = \{\Sigma(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k : F(\mathfrak{a}) = 0\}$$

erklärt, so folgt nach Hilfssatz 1, daß

$$\mathfrak{F}_k = \mathfrak{L}_k + F(\mathfrak{x})\,\mathfrak{F}_{k-g} \tag{16}$$

eine direkte Summendarstellung ist. Mithin ist

$$\dim \mathfrak{L}_k = \dim \mathfrak{F}_k - \dim \mathfrak{F}_{k-g} = \dim \mathfrak{H}_k(F)\,.$$

Wendet man die Identität

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\right)(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^k = g!\binom{k}{g} F(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{x})^{k-g} \tag{17}$$

auf die Nullstellen von $F(\mathfrak{x})$ an, so zeigt sich, daß $\mathfrak{L}_k$ in $\mathfrak{H}_k(F)$ liegt. Die Gleichheit der Dimensionen hat $\mathfrak{L}_k = \mathfrak{H}_k(F)$ zur Folge, q.e.d. Satz 5 ist als Teilaussage von Hilfssatz 3 auch bewiesen. Aus der direkten Summendarstellung

$$\mathfrak{F}_k = \mathfrak{H}_k(F) + F(\mathfrak{x})\,\mathfrak{F}_{k-g} \tag{18}$$

ergibt sich, wie man sofort sieht, mit Hilfe von vollständiger Induktion nach dem Grad von $u(\mathfrak{x})$ ein Beweis von Satz 4.

Mit mn Variablen an Stelle von m ergibt die Anwendung von Satz 4 auf $F(X) = |X'X|$ folgenden Sachverhalt. Zu jeder Form $u(X)$ vom Grad nk existieren eindeutig bestimmte Formen $u_0(X)$ und $v(X)$, so daß

$$u(X) = u_0(X) + |X'X|\,v(X)\,, \tag{19}$$

$$\operatorname{Grad} u_0(X) = nk\,,\quad \left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right| u_0(X) = 0$$

gilt. Hat $u(X)$ überdies die Invarianzeigenschaft

$$u(XV) = |V|^k u(X) \quad \text{für } |V| \neq 0\,,$$

was soviel wie $u(X) \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$ bedeutet, so erhält man aus (19) für $|V| \neq 0$ die Beziehung

$$u(X) = |V|^{-k} u_0(XV) + |X'X|\,|V|^{2-k} v(XV)\,, \tag{20}$$

wobei $|V|^{-k} u_0(XV)$ ebenfalls von $\left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right|$ annulliert wird. Auf Grund der eindeutigen Bestimmung von $u_0(X)$ und $v(X)$ sind die Zerlegungen (19) und (20) identisch, woraus

$$u_0(X) \in \mathfrak{H}_k^{(n)},\quad v(X) \in \mathfrak{F}_{k-2}^{(n)} \tag{21}$$

erhellt. Mithin ist

$$\mathfrak{F}_k^{(n)} = \mathfrak{H}_k^{(n)} + |X'X|\,\mathfrak{F}_{k-2}^{(n)}$$

eine direkte Summendarstellung. Nunmehr ist Satz 1 mit vollständiger Induktion nach dem Grad von $u(X)$ in einfacher Weise zu beweisen. Die Anwendung von Satz 5 ergibt im vorliegenden Fall nur, daß die Formen der Schar $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ als endliche Summen der Art $\Sigma(\sigma(L'X))^{nk}$ darstellbar sind, wobei $|L'L| = 0$ und σ das Zeichen für die Spurbildung ist. Das bleibt unbefriedigend insofern, als nicht einzusehen ist, wann eine vorgegebene Summe dieser Art tatsächlich in $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ liegt. Hier liefert Satz 2 erst das Gewünschte. Der Beweis dieses Satzes basiert auf der Anwendung von Satz 3 mit beliebig großer Formenzahl q, während man bisher mit $q = 1$ ausgekommen ist.

§ 3. Die harmonischen Formen einer Matrixvariablen

Die Plückerschen Koordinaten des linearen Raumes, der von den Spaltenvektoren einer reellen Matrix $X = X^{(m,n)} = (x_{\mu\nu})$ vom Rang n aufgespannt wird, sind durch

$$y_\alpha = |x_{\alpha_\mu \nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

bestimmt. Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ein beliebiges Tupel ganzer Zahlen mit der Eigenschaft $1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqq m$. Daneben führen wir noch ein System von $\binom{m}{n}$ unabhängigen Variablen z_α ein, die wir in irgendeiner Weise zu einer Spalte $\mathfrak{z}$ zusammenfassen. In gleicher Weise bilden wir die Spalte $\mathfrak{y}$ aus den y_α. Im $\mathfrak{z}$-Raum interessiert die Graßmannsche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$, die durch die Parameterdarstellung $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$ geliefert wird. Wie bekannt existiert ein System quadratischer Formen $Q_1(\mathfrak{z}), Q_2(\mathfrak{z}), \ldots, Q_q(\mathfrak{z})$, so daß

$$\mathfrak{z} \in \mathfrak{G} \text{ gleichwertig mit } Q_i(\mathfrak{z}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q) \tag{23}$$

ist. Überdies weiß man, daß ein Polynom $u(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{G}$ genau dann verschwindet, wenn es dem Polynomideal

$$\mathfrak{P}_0 = (Q_1(\mathfrak{z}), Q_2(\mathfrak{z}), \ldots, Q_q(\mathfrak{z})) \tag{24}$$

angehört. Schließlich wird noch das Polynomideal $\mathfrak{P}$ durch

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{z}'\mathfrak{z}, Q_1(\mathfrak{z}), Q_2(\mathfrak{z}), \ldots, Q_q(\mathfrak{z})) \tag{25}$$

eingeführt. Es bleibt zu zeigen, daß jedes Polynom $u(\mathfrak{z})$, welches auf dem Nullstellengebilde $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}$ verschwindet, in $\mathfrak{P}$ liegt. Aus dem Verschwinden von $u(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{N}$ folgt zunächst auf Grund des Hilbertschen Nullstellensatzes eine Relation der Art

$$(u(\mathfrak{z}))^p = \mathfrak{z}'\mathfrak{z}\, u_0(\mathfrak{z}) + \sum_{i=1}^{q} Q_i(\mathfrak{z})\, u_i(\mathfrak{z})$$

mit gewissen Polynomen $u_\nu(\mathfrak{z})$ und einer natürlichen Zahl p. Mithin ist

$$(u(\mathfrak{y}))^p = \mathfrak{y}'\mathfrak{y}\, u_0(\mathfrak{y});$$

denn $Q_i(\mathfrak{z})$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ verschwindet für $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$. Wenn nun $u_0(\mathfrak{y}) = 0$ ist, so verschwindet $u(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{G}$, ist also in $\mathfrak{P}_0$, somit auch in $\mathfrak{P}$ gelegen. Im Falle $u_0(\mathfrak{y}) \neq 0$ stelle man $u(\mathfrak{y})$ und $u_0(\mathfrak{y})$ als Polynome in den Elementen von X dar:

$$u(\mathfrak{y}) = v(X), \quad u_0(\mathfrak{y}) = v_0(X) .$$

Wegen $\mathfrak{y}'\mathfrak{y} = |X'X|$ ist dann

$$(v(X))^p = |X'X|\, v_0(X);$$

identisch in X. Da $|X'X|$ irreduzibel ist, gilt auch eine Relation der Art

$$v(X) = |X'X|\, v_1(X) ,$$

wobei das Polynom $v_1(X)$ ebenso wie $v(X)$ und $v_0(X)$ gegenüber den Substitutionen $X \to XV$ mit $|V| = 1$ invariant ist. Folglich ist $v_1(X)$ als Polynom in den y_α darstellbar: $v_1(X) = u_1(\mathfrak{y})$. Wir erhalten so

$$u(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}'\mathfrak{y}\, u_1(\mathfrak{y}) ,$$

woraus zu schließen ist, daß $u(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}'\mathfrak{z}\, u_1(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{P}_0$, also $u(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{P}$ liegt, q.e.d.

Auf Grund von Satz 3 können wir nun ein beliebiges Polynom $u(\mathfrak{z})$ als endliches Kompositum der Art

$$u(\mathfrak{z}) = \Sigma\, (\mathfrak{z}'\mathfrak{z})^{\mu}(Q_1(\mathfrak{z}))^{\mu_1} \ldots (Q_q(\mathfrak{z}))^{\mu_q}(\mathfrak{l}'\mathfrak{z})^{\nu} \tag{26}$$

ansetzen, wobei die $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{N}$, also erst recht in $\mathfrak{G}$ liegen. Es gibt daher eine Matrix $L = L^{(m,n)}$ derart, daß $\mathfrak{y}$ durch die Substitution $X \to L$ in $\mathfrak{l}$ übergeführt wird. Die Spezialisierung $\mathfrak{z} \to \mathfrak{y}$ ergibt

$$u(\mathfrak{y}) = \Sigma\, (\mathfrak{y}'\mathfrak{y})^{\mu}(\mathfrak{l}'\mathfrak{y})^{\nu}\,. \tag{27}$$

Jedes Polynom $v(X)$ mit der Invarianzeigenschaft $v(X\,V) = v(X)$ für $|V| = 1$ kann somit als endliches Kompositum der Art

$$v(X) = \Sigma\, |X'X|^{\mu}\, |L'X|^{\nu} \tag{28}$$

mit $|L'L| = 0$ geschrieben werden; denn $v(X)$ ist als Polynom $u(\mathfrak{y})$ darstellbar und es gilt $\mathfrak{l}'\mathfrak{y} = |L'X|$ sowie $\mathfrak{l}'\mathfrak{l} = |L'L|$. Das Verschwinden dieser Determinante ist eine Folge von $\mathfrak{l} \in \mathfrak{N}$. Damit ergibt sich insbesondere

Hilfssatz 4. *In der Restklasse* $u(X)$ mod $|X'X|$ *einer jeden Form* $u(X) \in \mathfrak{F}_k^{(n)}$ *liegt eine endliche Summe der Art* $\Sigma\, |L'X|^k$ *mit* $|L'L| = 0$.

In [1] wurde bereits gezeigt, daß alle Summen $\Sigma\, |L'X|^k$ mit $|L'L| = 0$ harmonisch sind, also in $\mathfrak{H}_k^{(n)}$ liegen. Die Anwendung von Hilfssatz 4 und Satz 1 auf eine beliebige Form $u(X) \in \mathfrak{H}_k^{(n)}$ ergibt nun die Möglichkeit der Darstellung

$$u(X) = \Sigma\, |L'X|^k \text{ mit } |L'L| = 0\,.$$

Damit ist schließlich auch Satz 2 bewiesen.

Literatur

[1] Maass, H.: Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen. Math. Ann. **135**, 391—416 (1958). — [2] Hodge, W. V. D.: Methods of algebraic geometry. Vol. II, s. S. 387. Cambridge 1952. — [3] Maass, H.: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian math. Soc. **20**, 117—162 (1956).

(Eingegangen am 11. Oktober 1958)