

Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen

Von

HANS MAASS in Heidelberg

Einleitung

Es sei X eine reelle Matrix vom Typus $X^{(m, n)}$ ($m \geq 2n$) und \mathfrak{R} der Ring der bezüglich der Transformationen $X \rightarrow U X V$ ($U' U = E =$ Einheitsmatrix, $|V| \neq 0$) invarianten linearen Differentialoperatoren. Zwei Operatoren $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{R}$ sind als „gleich“ anzusehen, in Zeichen: $\Omega_1 \cong \Omega_2$, wenn sie auf Funktionen $f(X)$ mit der Eigenschaft $f(XV) = f(X)$ für $|V| = 1$ dieselbe Wirkung haben. \mathfrak{R} wird, wie an anderer Stelle [1] gezeigt wurde, von den Operatoren

$$\sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right), \sigma (\Lambda^{2\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

erzeugt. Hierbei ist $\Lambda = X \frac{\partial}{\partial X'} - \left(X \frac{\partial}{\partial X'} \right)'$ und σ das Zeichen für die Spurbildung. Wir nennen $u(X)$ eine Kugelfunktion vom Typus (m, n) , wenn die Funktion folgende Bedingungen erfüllt:

1. $u(X)$ ist ein Polynom mit der Invarianzeigenschaft

$$u(XV) = u(X) \quad \text{für } |V| = 1.$$

2. $u(X)$ ist Eigenfunktion des Ringes \mathfrak{R} .

3. $u(X) \not\equiv 0 \pmod{|X' X|}$.

Kugelfunktionen dieser Art traten zum ersten Mal bei der Approximation stetiger Funktionen über der Graßmannschen Mannigfaltigkeit auf. Die in [1] gegebene Definition der Kugelfunktion weicht von der hier bevorzugten insofern ab, als Forderung 3. an Stelle von

$$4. \quad \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| u(X) = 0, \quad u(X) \neq 0$$

getreten ist. Unter der Voraussetzung 1. und 2. folgt 4. aus 3. Vermutlich ist auch die Umkehrung richtig. Für $n = 1$ trifft das bekanntlich zu; für $n = 2$ werden wir es beweisen. Die Forderung 2. bedeutet, daß

$$(1) \quad \sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) u(X) = nk u(X), \quad \sigma (\Lambda^{2\nu}) u(X) = \lambda_\nu u(X)$$

für $\nu = 1, 2, \dots, n$ mit nicht negativen Eigenwerten $k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gilt. Dabei ist k ganz rational; denn der Grad nk von $u(X)$ ist durch n teilbar.

Zum Problem, die möglichen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bei gegebenem k zu bestimmen, sei allgemein folgendes bemerkt. Da $|X' X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right|$ ein in-

varianter Operator ist, so läßt er sich durch die angegebene Basis von \mathfrak{R} darstellen. Auf Grund gewisser Identitäten aus der Theorie der symmetrischen Funktionen ist zu erkennen, daß eine Relation der Art

$$(2) \quad 2n |X' X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| + \sigma(A^{2n}) \\ \cong P(\sigma(A^2), \sigma(A^4), \dots, \sigma(A^{2n-2}), \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right))$$

besteht, wobei P ein Polynom in den angegebenen Argumenten ist, dessen Koeffizienten nur von m und n abhängen. Da $\left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right|$ jede Kugelfunktion annulliert, so folgt aus (1)

$$(3) \quad \lambda_n = P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, nk).$$

Bekanntlich ist

$$(4) \quad \lambda_1 = 2k(k+m-2) \text{ für } n=1.$$

Eine explizite Berechnung des Polynoms P ist auch noch im Falle $n=2$ mit vertretbarem Aufwand möglich. Man erhält so

$$(5) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \frac{1}{2} (m^2 - 9m + 18) \lambda_1 + 2(2-m)k \lambda_1 - 2k^2 \lambda_1 + \\ + 4(m-2)(m-3)k + 4(m^2 - 3m + 1)k^2 + 8(m-2)k^3 + \\ + 4k^4 \quad \text{für } n=2.$$

Um nun die möglichen Systeme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bei gegebenem k zu berechnen, verfährt man sinngemäß wie im Falle $n=1$, indem man den Begriff der rotationssymmetrischen Kugelfunktion und die Legendresche Differentialgleichung auf mehrere Variable verallgemeinert, so daß die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ durch die Forderung festgelegt werden, daß die verallgemeinerten Legendreschen Differentialgleichungen, in denen jeweils einer der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ erscheint, simultane Polynomlösungen haben. In diesen Differentialgleichungen kommen nur noch n unabhängige Variable vor. Es liegt also eine echte Reduktion des Eigenwertproblems vor. Als wesentliches Hilfsmittel erscheint hier eine positive unitäre Metrik im Raum \mathfrak{F}_k der algebraischen Formen $u(X)$ mit der Eigenschaft

$$(6) \quad u(XV) = |V|^k u(X) \text{ für } |V| \neq 0.$$

Sie wird durch ein Skalarprodukt (φ, ψ) für $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}_k$ in geeigneter Weise erklärt.

Zur Ermittlung der Eigenwerte λ_1 hat man im einzelnen folgende Bildungen vorzunehmen. Es sei $u(X)$ eine Kugelfunktion vom Grad nk zum Eigenwert λ_1 , so daß also

$$\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) u(X) = nk u(X), \quad \sigma(A^2) u(X) = \lambda_1 u(X)$$

ist. \mathfrak{L}_u bezeichne die von den Kugelfunktionen $u(UX)$ ($U'U = E$) erzeugte lineare Schar, in der wir eine normierte Orthogonalbasis $u_\nu(X)$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$)

auswählen. Man stellt fest, daß

$$(7) \quad F(X, \tilde{X}) = \sum_{\nu=1}^N u_{\nu}(X) \overline{u_{\nu}(\tilde{X})}$$

bezüglich der simultanen Substitution $X \rightarrow U X$, $\tilde{X} \rightarrow U \tilde{X}$ ($U' U = E$) invariant ist. Wir setzen nun $\varepsilon = k - 2 \left[\frac{k}{2} \right]$ sowie

$$(8) \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_1 = X_1^{(n)}, Y = X' X, W_1 = X_1 Y^{-1} X_1'$$

und wählen $\tilde{X} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$. Allgemeinen Sätzen der Invariantentheorie zufolge ist dann

$$(9) \quad F(X) = F\left(X, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}\right) = |X' X|^{\frac{k}{2}} |W_1|^{\frac{\varepsilon}{2}} H(W_1),$$

wobei $H(W_1)$ ein Polynom in den Elementen von W_1 ist. Es zeigt sich noch, daß $H(W_1)$ gegenüber den Transformationen $W_1 \rightarrow W_1[U]$ ($U' U = E$) invariant ist, mithin als Polynom in den elementar-symmetrischen Funktionen q_1, q_2, \dots, q_n der charakteristischen Wurzeln von W_1 darstellbar ist. Wegen $q_n = |W_1|$ ist also

$$(10) \quad F(X) = |X' X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

mit einem Polynom

$$(11) \quad K(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \dots q_n^{\nu_n},$$

wobei $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ endlich viele Systeme nicht-negativer Zahlen durchläuft, die an die Bedingung

$$(12) \quad \nu_i \equiv 0 \pmod{1} \text{ für } i < n, \quad \nu_n \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$$

gebunden sind. Mit $u(X)$ ist auch $F(X)$ und $K(q_1, q_2, \dots, q_n)$ eine Eigenfunktion von $\sigma(A^2)$ zum Eigenwert λ_1 . Im Falle $n = 2$ ergibt die Umrechnung von $\sigma(A^2) K = \lambda_1 K$ auf die Variablen q_1, q_2 die Differentialgleichung

$$(13) \quad \left\{ 8(q_1 - q_1^2 + 2q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + 16(2q_2 - q_1 q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} + 8(q_1 q_2 - 2q_2^2) \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + 4(4 - m q_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + 4(q_1 - 2(m-1)q_2) \frac{\partial}{\partial q_2} + \lambda_1 \right\} K(q_1, q_2) = 0.$$

Sie gestattet eine von 0 verschiedene Polynomlösung

$$(14) \quad K(q_1, q_2) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu} q_1^{\mu} q_2^{\nu}$$

$$\text{mit } \mu, \nu \geq 0, \mu \equiv 0, \nu \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$$

genau dann, wenn λ_1 in der Form

$$(15) \quad \lambda_1 = 8(\mu + \nu)^2 + 8\nu(\nu + m - 3) + 4\mu(m - 2)$$

darstellbar ist, wobei μ, ν wieder den Bedingungen $\mu, \nu \geq 0, \mu \equiv 0, \nu \equiv \frac{\varepsilon}{2}$

(mod 1) unterliegen. Aus der Forderung, daß k die größte ganze Zahl $\equiv \varepsilon$ (mod 2) mit der Eigenschaft

$$(16) \quad |X' X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2) \equiv 0 \pmod{|X' X|}$$

ist, ergibt sich noch die Kennzeichnung

$$(17) \quad k = 2 \operatorname{Max}_{a_{\mu\nu} \neq 0} (\mu + \nu).$$

In Abhängigkeit von k stellt sich λ_1 in der Form

$$(18) \quad \lambda_1 = 4k(k - 2l + m - 3) + 4l(2l + m - 4)$$

dar, wobei l eine ganze Zahl im Intervall

$$(19) \quad 0 \leq l \leq \left[\frac{k}{2} \right] = \frac{k - \varepsilon}{2}$$

bezeichnet. Eine Umkehrung der Betrachtung zeigt schließlich, daß das mit vorgegebenem l im Intervall (19) gebildete λ_1 auch wirklich als Eigenwert zum Grad $2k$ auftritt. Durch (18) und (5) sind nunmehr im Falle $n = 2$ alle Eigenwerte bestimmt. Sind $(k, l) = (k^{(\nu)}, l^{(\nu)})$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$) alle Paare, welche (18) und (19) befriedigen, und ist

$$(20) \quad k^{(1)} < k^{(2)} < \dots < k^{(r)},$$

so entsprechen diesen Gradzahlen r verschiedene Werte von λ_2 gemäß (5), ebenfalls in wachsender Anordnung:

$$(21) \quad \lambda_2^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \dots < \lambda_2^{(r)}.$$

Zu jedem Paar von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2^{(i)}$ gehört eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte „rotationssymmetrische“ Kugelfunktion $|X' X|^{k^{(i)}/2} K_i(q_1, q_2)$. \mathfrak{S}_ε bezeichne die lineare Schar der Polynome (14), die der Differentialgleichung (13) bei gegebenem λ_1 genügen. Das nach wachsenden Gradzahlen geordnete System der Funktionen K_i ist durch die Zugehörigkeit von K_i zu \mathfrak{S}_ε , wobei ε durch $k^{(i)} \equiv \varepsilon \pmod{2}$ festgelegt ist, und die Orthogonalitätsrelationen

$$(22) \quad (K_\mu, K_\nu) = C_m \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} K_\mu \bar{K}_\nu (1 - q_1 + q_2)^{\frac{1}{2}(m-5)} q_2^{-\frac{1}{2}} dq_1 dq_2 = 0$$

für $\mu \neq \nu$ bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmt. Hierin ist C_m eine nur von m abhängige Konstante und \mathfrak{B} der Bereich:

$$(23) \quad 0 < q_1 < 2, \quad 1 - q_1 + q_2 > 0, \quad q_2 > 0, \quad q_1^2 - 4q_2 > 0.$$

Polynome $K(q_1, q_2)$ zu verschiedenen λ_1 sind stets orthogonal.

\mathfrak{F}_k bezeichne wieder die lineare Schar der Polynome $u(X)$ mit der Eigenschaft $u(XV) = |V|^k u(X)$. In Analogie zum Fall $n = 1$ nennen wir $u(X) \in \mathfrak{F}_k$ harmonisch, wenn $u(X)$ von $\Delta = \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right|$ annulliert wird. Es sei \mathfrak{H}_k die lineare Schar der harmonischen Formen in \mathfrak{F}_k . Da jede Kugelfunktion notwendig harmonisch ist, so kann auf Grund des Lemmas in [1], S. 141 (in welchem $2h$ eine beliebige natürliche Zahl sein kann) geschlossen werden, daß

jede Form $u(X) \in \mathfrak{H}_k$ eine Entwicklung der Art

$$(24) \quad u(X) = u_0(X) + |X'X| u_1(X) + |X'X|^2 u_2(X) + \dots$$

besitzt, wobei $u_\nu(X) \in \mathfrak{H}_{k-2\nu}$ für $0 \leq \nu \leq \frac{k}{2}$ gilt. Im Falle $n = 1$ ist diese Darstellung bekanntlich eindeutig. Im allgemeinen Fall gilt, wie man ohne weiteres sieht, ein solcher Eindeigkeitssatz genau dann, wenn

$$u(X) \in \mathfrak{H}_k, \quad u(X) \equiv 0 \pmod{|X'X|}$$

bei beliebigem k das Verschwinden von $u(X)$ zur Folge hat. Die Negation dieser Aussage führt zur Existenz einer Kugelfunktion $u(X)$ und einer natürlichen Zahl h , so daß

$$(25) \quad \Delta |X'X|^h u(X) = \Delta u(X) = 0$$

wird. Es ist zu vermuten, daß diese beiden Gleichungen mit $u(X) \neq 0$ nicht verträglich sind. Im Falle $n = 2$ läßt sich dies und damit der formulierte Eindeigkeitssatz wie folgt beweisen. Auf Grund einer gewissen Operatoridentität ergibt sich aus (21) für den Eigenwert λ_1 von $u(X)$ bezüglich $\sigma(\Delta^2)$ der Wert

$$(26) \quad \lambda_1 = (2k + 2h + m - 2)^2 + 4h^2 - m^2 + 6m - 10,$$

wobei $2k$ wieder den Grad von $u(X)$ bezeichnet. Da dieser Wert unter den möglichen Eigenwerten, die in (18) mitgeteilt wurden, nicht vorkommt, so erhält man einen Widerspruch.

Schließlich ist noch einiges zum Funktionstypus $u_k(X) = |L'X|^k$ zu bemerken, wobei L eine beliebige komplexe Matrix vom Typus $L^{(m,n)}$ ist. Auf Grund der Identität

$$(27) \quad \Delta u_k(X) = (k-1)k^2(k+1)^2 \dots (k+n-2)^2(k+n-1) |L'L| u_{k-2}(X)$$

ist zu schließen, daß $u_k(X)$ genau dann harmonisch ist, wenn entweder $k = 0, 1$ oder $|L'L| = 0$ ist. Man wird die Frage stellen können, ob diese $u_k(X)$ die lineare Schar \mathfrak{H}_k erzeugen, was im Falle $n = 1$ bekanntlich richtig ist. Ist $L'L = 0$, Rang $L = n$, was nur im Falle $m \geq 2n$ möglich ist, so stellt $u_k(X)$, wie schon in [1] bewiesen wurde, eine Kugelfunktion vom Grad nk dar. Die ersten beiden Eigenwerte von $u_k(X)$ sind

$$(28) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2nk(m-n+k-1), \\ \lambda_2 &= nk(m-n+k-1) \{ (m-n+k-2)(m-n+k-1) + \\ &\quad + n(n-1) + k(k+1) \}. \end{aligned}$$

Das zu $n = 2$ gehörige λ_1 ist auch aus (18) zu gewinnen, wenn man dort $l = 0$ wählt. Ferner genügen die zu $n = 2$ gehörigen λ_1 und λ_2 der Relation (5), die damit in gewisser Weise kontrolliert ist. Im Falle $n = 2$ ergeben die Linearkombinationen von $u_k(X)$ mit $L'L = 0$ gerade alle Kugelfunktionen vom Grad $2k$ zum maximalen Eigenwert λ_1 .

§ 1. Die unitäre Metrik im Funktionenraum

Mit Hilfe der Stokesschen Formel werden zunächst die Analoga zur Green-schen Formel für die invarianten Operatoren $\sigma(A^{2\nu})$ bewiesen. Es sei $X = (x_{\mu\nu})$ und $[dX]$ das alternierende Produkt der Differentiale $dx_{\mu\nu}$, (in irgend einer Reihenfolge). $\omega_{\mu\nu}$ entstehe aus $[dX]$, vom Vorzeichen abgesehen, durch Streichen von $dx_{\mu\nu}$; das Vorzeichen von $\omega_{\mu\nu}$ werde durch $[dX] = dx_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$ festgelegt. Schließlich sei noch $\Omega = (\omega_{\mu\nu})$. Der Bereich \mathfrak{G} im X -Raum erfülle mit seinem Rand \mathfrak{R} die Voraussetzungen, unter denen die Stokessche Formel angewendet werden kann. Mit ihrer Hilfe beweist man

$$(29) \quad \int_{\mathfrak{G}} B X \frac{\partial}{\partial X'} A [dX] = -n \int_{\mathfrak{G}} B A [dX] - \\ - \int_{\mathfrak{G}} \left(A' \left(X \frac{\partial}{\partial X'} \right)' B' \right)' [dX] + \int_{\mathfrak{R}} B X \Omega' A ,$$

wobei A und B m -reihige Matrizen bezeichnen, deren Elemente willkürliche Funktionen von X sind. Die Ersetzung $A' \rightarrow B$, $B' \rightarrow A$ ergibt mit nachfolgender Transposition

$$(30) \quad \int_{\mathfrak{G}} B \left(X \frac{\partial}{\partial X'} \right)' A [dX] = -n \int_{\mathfrak{G}} B A [dX] - \\ - \int_{\mathfrak{G}} \left(A' X \frac{\partial}{\partial X'} B' \right)' [dX] + \int_{\mathfrak{R}} B \Omega X' A .$$

Durch vollständige Induktion nach h kann nun

$$(31) \quad \int_{\mathfrak{G}} B A^h A [dX] = \int_{\mathfrak{G}} (A' A^h B')' [dX] + \\ + \sum_{e=0}^{h-1} \int_{\mathfrak{R}} (A^e B')' (X \Omega' - \Omega X') A^{h-e-1} A$$

bewiesen werden, wobei zu beachten ist, daß die Differenzbildung von (29) und (30) gerade (31) für $h = 1$ liefert. Wir wählen speziell $A = \varphi(X) F(Y) E$, $B = \psi(X) E$ und dehnen den Integrationsbereich \mathfrak{G} auf den vollen X -Raum \mathfrak{R} aus. Durch Wahl der Funktion $F(Y)$ ist dafür zu sorgen, daß die Integrale über \mathfrak{G} konvergieren und die Randintegrale gegen 0 streben. Schließlich wird in (31) noch die Spur gebildet. Da Funktionen vom Typus $F(Y)$ hinsichtlich des Operators A als konstant anzusehen sind, wie schon in [1] festgestellt wurde, so resultiert mit 2ν anstelle von h

$$(32) \quad \int_{\mathfrak{R}} \psi(X) \sigma(A^{2\nu}) \varphi(X) F(Y) [dX] = \int_{\mathfrak{R}} \varphi(X) \sigma(A^{2\nu}) \psi(X) F(Y) [dX] .$$

Ersetzt man in (31) B durch $(A^h B)'$, so liefert dieselbe Schlußweise, jetzt mit ν anstelle von h ,

$$(33) \quad \int_{\mathfrak{R}} \sigma \{ (A^\nu \psi(X))' (A^\nu \varphi(X)) \} F(Y) [dX] = \int_{\mathfrak{R}} \varphi(X) \sigma(A^{2\nu}) \psi(X) F(Y) [dX] .$$

Auf Grund dieser Formel ist zu erkennen, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ einer Kugelfunktion $u(X)$ nicht-negative reelle Zahlen sind. Man braucht nur $\varphi = u$, $\psi = \bar{u}$ und etwa $F(Y) = e^{-\sigma(X'X)}$ zu wählen. Man stellt überdies fest, daß $\lambda_n = 0$ mit $A^r u(X) = 0$ gleichwertig ist. Im Falle $\nu = 1$ bedeutet dies nach [1], daß $u(UX)$ ($U'U = E$) von U unabhängig, also $u(X)$ eine Funktion von Y ist. Als Kugelfunktion ist $u(X)$ dann aber notwendig konstant.

Es sei

$$(34) \quad d\bar{v} = |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)} \frac{[dX]}{[dY]}, \quad Y = X'X,$$

wobei $[dY]$ das Produkt der unabhängigen Differentiale der Elemente von Y bezeichnet. Die Quotientenbildung in (34) ist im Sinne von SIEGEL [2], S. 30 zu verstehen. Das Volumenelement $d\bar{v}$ ist, wie man leicht sieht, gegenüber den Transformationen $X \rightarrow UXV$, $Y \rightarrow Y[V]$ ($U'U = E$, $|V| \neq 0$) invariant; wir verwenden es zur Definition eines Skalarproduktes im Raum der Funktionen über der Graßmannschen Mannigfaltigkeit. Sind $\varphi(X)$ und $\psi(X)$ auf $X'X = E$ definiert und ist

$$(35) \quad \varphi(XV) = \varphi(X), \quad \psi(XV) = \psi(X) \quad \text{für } VV' = E, \quad |V| = 1,$$

ferner $|Y| = R'R$, $|R| > 0$, so werde

$$(36) \quad (\varphi, \psi) = \int_{X'X=Y} \varphi(XR^{-1}) \overline{\psi(XR^{-1})} d\bar{v}$$

gesetzt. Diese Bildung ist unabhängig von Y und von R bei gegebenem Y . Evident ist $\overline{(\psi, \varphi)} = (\varphi, \psi)$ und $(\varphi, \varphi) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $\varphi = 0$ ist, sofern φ eine stetige Funktion ist. Multipliziert man (36) mit einer willkürlichen Funktion $F(Y)$ und integriert man über den Raum aller positiven Y , so ergibt sich

$$(37) \quad \begin{aligned} & (\varphi, \psi) \int_{Y>0} F(Y) [dY] \\ &= \int_{Y>0} \int_{X'X=Y} \varphi(XR^{-1}) \overline{\psi(XR^{-1})} |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)} \frac{[dX]}{[dY]} F(Y) [dY] \\ &= \int_{\mathfrak{K}} \varphi(XR^{-1}) \overline{\psi(XR^{-1})} |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)} F(Y) [dX], \end{aligned}$$

wenn durch Wahl von $F(Y)$ für Konvergenz der Integrale gesorgt wird. Sind $\varphi(X)$ und $\psi(X)$ im Bereich $X'X > 0$ definiert und gilt

$$(38) \quad \varphi(XV) = |V|^k \varphi(X), \quad \psi(XV) = |V|^k \psi(X) \quad \text{für } |V| \neq 0,$$

so daß

$$\varphi(XR^{-1}) \overline{\psi(XR^{-1})} = \varphi(X) \overline{\psi(X)} |Y|^{-k}$$

wird, dann geht (37) über in

$$(39) \quad (\varphi, \psi) \int_{Y>0} F(Y) [dY] = \int_{\mathfrak{K}} \varphi(X) \overline{\psi(X)} |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)-k} F(Y) [dX].$$

Das Skalarprodukt ändert sich definitionsgemäß nicht, wenn man φ oder ψ mit einer Potenz von $|X'X|$ multipliziert. Aus der Invarianzeigenschaft von dv folgt auch

$$(40) \quad (\varphi(UX), \psi(UX)) = (\varphi(X), \psi(X)) \text{ für } U'U = E.$$

Schließlich ist auf Grund von (32) noch

$$(41) \quad (\varphi, \sigma(A^{2\nu})\psi) = (\sigma(A^{2\nu})\varphi, \psi)$$

zu schließen. Diese Formel zeigt, daß zwei Kugelfunktionen orthogonal sind, wenn sie zu verschiedenen Systemen von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gehören.

Um nun

$$(42) \quad V_{m,n} = (1, 1) = \int_{X'X=E} dv \text{ für } m \geq n$$

zu berechnen, wählen wir in (39) $\varphi = \psi = 1$, damit $k = 0$, und

$$F(Y) = \begin{cases} |Y|^{\frac{1}{2}(m-n-1)} & \text{für } y_{\nu\nu} \leq 1 \ (\nu = 1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$y_{\nu\nu}$ bezeichnet hier das ν -te Diagonalelement von Y . Es wird dann

$$(43) \quad \begin{aligned} V_{m,n} J_n \left(\frac{m-n-1}{2} \right) &= \int_{\substack{x'x \leq 1 \\ x_\nu x_\nu \leq 1 \\ \nu = 1, 2, \dots, n}} [dX] \\ &= \left(\int_{x'x \leq 1} [dx] \right)^n = \frac{\pi^{\frac{mn}{2}}}{\left(\Gamma \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \right)^n}, \end{aligned}$$

wenn $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$, $x = x^{(m,1)}$ und allgemein

$$(44) \quad J_n(\alpha) = \int_{\substack{Y > 0 \\ y_{\nu\nu} \leq 1 \\ \nu = 1, 2, \dots, n}} |Y|^\alpha [dY]$$

ist. Für dieses Integral bestimmen wir eine Rekursionsformel, indem wir

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = Y_1^{(n-1)}, \quad v = v^{(n-1,1)}$$

substituieren. Eine einfache Rechnung ergibt

$$|Y|^\alpha = |Y_1|^\alpha y^\alpha, \quad [dY] = |Y_1| [dY_1] [dv] dy,$$

während die Integrationsbedingungen in

$$Y_1 > 0, \quad y > 0, \quad y_{\nu\nu} \leq 1 \ (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \quad y + Y_1[v] \leq 1$$

übergehen. Zunächst wird die Integration über v , dann die über y ausgeführt. So ergibt sich die Rekursionsformel

$$J_n(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\alpha+1 + \frac{n+1}{2}\right)} J_{n-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Schließlich ist noch

$$J_1(\beta) = \int_0^1 y^\beta dy = \frac{1}{\beta + 1}$$

und daher

$$(45) \quad J_n(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \Gamma\left(\alpha + \frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\alpha + \frac{n+3}{2}\right)\right)^n},$$

nach (43) also

$$(46) \quad V_{m,n} = \frac{\pi^{\frac{mn}{2} - \frac{n(n-1)}{4}}}{\prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-\nu}{2}\right)} \quad \text{für } m \geq n.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\varphi(X)$ und $\psi(X)$ als Funktionen von $W_1 = X_1 Y^{-1} X_1'$ darstellbar sind:

$$\varphi(X) = H_1(W_1), \quad \psi(X) = H_2(W_1),$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = X_1^{(n)}, \quad Y = X' X$$

gesetzt sei, wollen wir nun das Skalarprodukt (φ, ψ) berechnen. Wir gehen von der Formel (36) aus, die im vorliegenden Fall

$$(H_1, H_2) = \int_{X'X=Y} H_1(W_1) \overline{H_2(W_1)} dv$$

ergibt. Zunächst ist zu beachten, daß die unabhängigen Elemente von Y und W_1 in ihrer Gesamtheit $n(n+1)$ unabhängige Funktionen von X sind. Wird $\text{Rang } X_1 = n$ vorausgesetzt, so ist notwendig $Y > 0$ und $0 < W_1 \leq E$, wenn $B \leq A$ für symmetrische Matrizen allgemein bedeutet, daß $A - B$ die Matrix einer semidefiniten quadratischen Form ist. Umgekehrt kann auch gezeigt werden, daß zu jedem Paar Y, W_1 , welches die angegebenen Ungleichungen befriedigt, ein geeignetes X mit $\text{Rang } X_1 = n$ existiert. Damit ist die Umformung

$$(47) \quad \begin{aligned} (H_1, H_2) &= \int_0^E \int_{\substack{X'X=Y \\ X_1 Y^{-1} X_1' = W_1}} H_1(W_1) \overline{H_2(W_1)} \frac{dv}{[dW_1]} [dW_1] \\ &= \int_0^E H_1(W_1) \overline{H_2(W_1)} k(W_1) [dW_1] \end{aligned}$$

mit

$$(48) \quad k(W_1) = \int_{\substack{X'X=Y \\ X_1 Y^{-1} X_1' = W_1}} \frac{dv}{[dW_1]} = \int_{\substack{X'X=E \\ X_1 X_1' = W_1}} \frac{dv}{[dW_1]}$$

gerechtfertigt. Das Zeichen \int_0^E soll die Integration über $0 < W_1 < E$ andeuten.

Man stellt leicht fest, daß

$$k(W_1[U]) = k(W_1) \text{ für } U'U = E$$

gilt. Mithin ist $k(W_1)$ eine eindeutige Funktion der Funktionen q_1, q_2, \dots, q_n , die durch

$$(49) \quad |tE - W_1| = t^n - q_1 t^{n-1} + q_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n q_n$$

definiert werden.

Die explizite Berechnung von $k(W_1)$ soll nun für $n = 2$ ausgeführt werden. Zunächst setzen wir noch für allgemeines n in Analogie zu dv :

$$dv_2 = |Y_2|^{\frac{1}{2}(1+2n-m)} \frac{[dX_2]}{[dY_2]} \text{ mit } Y_2 = X_2' X_2.$$

Diese Bildung hat einen Sinn, da wegen $m \geq 2n$ im allgemeinen $Y_2 > 0$ ist. Damit wird

$$(50) \quad \frac{dv}{[dW_1]} = |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)} \frac{[dX_1][dX_2]}{[dY][dW_1]} \\ = |Y|^{\frac{1}{2}(n+1-m)} |Y_2|^{\frac{1}{2}(m-2n-1)} \frac{[dX_1][dY_2]}{[dY][dW_1]} dv_2.$$

Zur Berechnung des Quotienten $[dX_1][dY_2]:[dY][dW_1]$ führen wir ein System S von $\frac{n(n-1)}{2}$ geeigneten Parameterfunktionen so ein, daß eine umkehrbar eindeutige Beziehung

$$X_1, Y_2 \leftrightarrow Y, W_1, S$$

vorliegt. Allgemein bezeichne \sqrt{Y} die eindeutig bestimmte positive Matrix, deren Quadrat Y ist. Da die Beziehungen

$$X_1' X_1 = Y - Y_2, \quad X_1 Y^{-1} X_1' = W_1$$

befriedigt werden müssen, so erkennt man, daß

$$\sqrt{W_1}^{-1} X_1 \sqrt{Y}^{-1} = U$$

orthogonal ist. Es folgt dann

$$(51) \quad X_1 = \sqrt{W_1} U \sqrt{Y}$$

$$Y_2 = Y - X_1' X_1 = Y - \sqrt{Y} U' W_1 U \sqrt{Y},$$

dazu

$$(52) \quad |Y_2| = |Y| |E - W_1|.$$

Die in einer Parameterdarstellung der orthogonalen Matrizen U auftretenden $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Parameter können und sollen als System S Verwendung finden. Nach (51) ist

$$\frac{\partial(X_1, Y_2)}{\partial(X_1, Y)} = 1.$$

Damit wird

$$(53) \quad \frac{[dX_1][dY_2]}{[dY][dW_1]} = \left| \frac{\partial(X_1, Y_2)}{\partial(W_1, S, Y)} \right| [dS] \\ = \left| \frac{\partial(X_1, Y)}{\partial(W_1, S, Y)} \right| [dS] = \left| \frac{\partial(X_1)}{\partial(W_1, S)} \right| [dS] = \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1} U \sqrt{Y})}{\partial(W_1, S)} \right| [dS] \\ = \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1} U \sqrt{Y})}{\partial(\sqrt{W_1} U)} \right| \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1} U)}{\partial(W_1, S)} \right| [dS] = |Y|^{\frac{n}{2}} \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1} U)}{\partial(\sqrt{W_1}, S)} \right| \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1})}{\partial(W_1)} \right| [dS].$$

In den folgenden Betrachtungen wird $n = 2$ vorausgesetzt. Sei

$$W_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_{12} \\ w_{12} & w_2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{W_1} = \begin{pmatrix} t_1 & t_{12} \\ t_{12} & t_2 \end{pmatrix},$$

also

$$w_1 = t_1^2 + t_{12}^2, \quad w_2 = t_2^2 + t_{12}^2, \quad w_{12} = (t_1 + t_2) t_{12}.$$

Dann folgt

$$(54) \quad \left| \frac{\partial(W_1)}{\partial(\sqrt{W_1})} \right| = \left| \frac{\partial(w_1, w_2, w_{12})}{\partial(t_1, t_2, t_{12})} \right| = 4 |W_1|^{\frac{1}{2}} \sigma(\sqrt{W_1}).$$

Da die zweireihigen orthogonalen Matrizen durch

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \mp \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

gegeben sind, so kann $S = \varphi$ gewählt werden. Eine einfache Rechnung liefert nun für den Betrag der Funktionaldeterminante der Elemente von

$$\sqrt{W_1} U = \begin{pmatrix} t_1 \cos \varphi \mp t_{12} \sin \varphi & t_1 \sin \varphi \pm t_{12} \cos \varphi \\ t_{12} \cos \varphi \mp t_2 \sin \varphi & t_{12} \sin \varphi \pm t_2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

nach $t_1, t_2, t_{12}, \varphi$ den Ausdruck

$$(55) \quad \left| \frac{\partial(\sqrt{W_1} U)}{\partial(\sqrt{W_1}, \varphi)} \right| = \sigma(\sqrt{W_1}).$$

Mit (54) folgt daher aus (53)

$$(56) \quad \frac{[dX_1][dY_2]}{[dY][dW_1]} = \frac{1}{4} |Y| |W_1|^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Berücksichtigt man noch (52), so geht (50) über in

$$\frac{dv}{[dW_1]} = \frac{1}{4} |E - W_1|^{\frac{1}{2}(m-5)} |W_1|^{-\frac{1}{2}} d\varphi dv_2.$$

Bei der Integration, die zu $k(W_1)$ führt, ist das Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ doppelt zu zählen entsprechend der Tatsache, daß es eigentliche und uneigentliche orthogonale Matrizen gibt ($|U| = \pm 1$). Ferner ist zu beachten, daß dv_2 dieselben Invarianzeigenschaften hat wie dv . Zufolge (48) wird dann

$$k(W_1) = \frac{1}{2} |E - W_1|^{\frac{1}{2}(m-5)} |W_1|^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{X_1 X_1 = E - X_1' X_1} dv_2 \\ = \pi |E - W_1|^{\frac{1}{2}(m-5)} |W_1|^{-\frac{1}{2}} \int_{X_1 X_1 = E} dv_2 \\ = \pi V_{m-2, 2} |E - W_1|^{\frac{1}{2}(m-5)} |W_1|^{-\frac{1}{2}}.$$

$V_{m-2,2}$ ist aus (46) zu entnehmen. Eine Reihe von elementaren Umformungen, wobei insbesondere von der Legendreschen Relation für die Gammafunktion Gebrauch gemacht wird, führt schließlich auf

$$(57) \quad k(W_1) = \frac{(2\pi)^{m-2}}{(m-2)!} (1 - q_1 + q_2)^{\frac{1}{2}(m-5)} q_2^{-\frac{1}{2}},$$

wobei q_1, q_2 durch (49) bestimmt sind.

Wir wollen jetzt auch noch voraussetzen, daß

$$H_\nu(W_1[U]) = H_\nu(W_1) \text{ für } U'U = E \quad (\nu = 1, 2)$$

gilt, so daß

$$H_\nu(W_1) = K_\nu(q_1, q_2) \quad (\nu = 1, 2)$$

anzusetzen ist. An Stelle von W_1 führen wir in (47) die Variablen α, β, φ durch

$$W_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \alpha \geq \beta, \quad 0 \leq \varphi < \pi$$

ein. Rechnung ergibt

$$[dW_1] = (\alpha - \beta) d\alpha d\beta d\varphi$$

oder, wenn α, β durch

$$q_1 = \alpha + \beta, \quad q_2 = \alpha \beta$$

ersetzt werden,

$$[dW_1] = dq_1 dq_2 d\varphi.$$

Der Integrationsbereich $0 < W_1 < E$ wird, von niederdimensionalen Mannigfaltigkeiten abgesehen, durch die Ungleichungen $0 < \beta < \alpha < 1, 0 \leq \varphi < \pi$ beschrieben. Wegen

$$\alpha = \frac{1}{2} (q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4q_2}), \quad \beta = \frac{1}{2} (q_1 - \sqrt{q_1^2 - 4q_2})$$

wird er umkehrbar eindeutig auf das Produkt von $0 \leq \varphi < \pi$ mit

$$(58) \quad \mathfrak{B}: 0 < q_1 < 2, \quad q_2 > 0, \quad 1 - q_1 + q_2 > 0, \quad q_1^2 - 4q_2 > 0$$

abgebildet, so daß (47) nach Integration über φ in

$$(K_1, K_2) = \pi \iint_{\mathfrak{B}} K_1(q_1, q_2) \overline{K_2(q_1, q_2)} k(W_1) dq_1 dq_2$$

übergeht. Mit (57) erhalten wir damit

$$(59) \quad (K_1, K_2) = C_m \iint_{\mathfrak{B}} K_1(q_1, q_2) \overline{K_2(q_1, q_2)} (1 - q_1 + q_2)^{\frac{1}{2}(m-5)} q_2^{-\frac{1}{2}} dq_1 dq_2,$$

wobei zur Abkürzung

$$(60) \quad C_m = \frac{\pi(2\pi)^{m-2}}{(m-2)!}$$

gesetzt ist.

§ 2. Die algebraische Abhängigkeit von $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, k$

Es sei A eine n -reihige Matrix über einem kommutativen Ring,

$$\sigma(A^n) = s_n, \quad |tE - A| = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n.$$

Aus der Theorie der symmetrischen Funktionen ist bekannt, daß

$$(61) \quad a_n = -\frac{1}{n} s_n + R(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$$

ist, wobei R ein isobares Polynom bezeichnet, welches nur solche Monome $s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} \dots s_{n-1}^{\nu_{n-1}}$ enthält, für die

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + (n-1)\nu_{n-1} = n$$

ist. Wird A durch $X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}$ ersetzt, insbesondere auch $a_n = (-1)^n |A|$ durch $(-1)^n |X'X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right|$, so ist (61) zwar nicht erfüllt, da der Ring der linearen Differentialoperatoren nicht kommutativ ist, aber man erkennt, daß sich die beiden Seiten von (61) nach der Ersetzung nur um einen invarianten linearen Differentialoperator vom Grade höchstens $2n-1$ unterscheiden. Ein solcher läßt sich, wie in [1] gezeigt wurde, als Polynom in $\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)$ und $\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$) darstellen. Daher ist

$$\begin{aligned} & (-1)^n |X'X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| + \frac{1}{n} \sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^n \\ & \cong Q\left(\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right), \dots, \sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^{n-1}, \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei Q und im folgenden auch P, P wieder Polynome bezeichnen. Auf Grund der in [1] angegebenen Relationen erkennt man noch, daß

$$\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^\nu \cong \frac{(-1)^\nu}{2} \sigma(\Lambda^{2\nu}) + P_\nu\left(\sigma(\Lambda^2), \dots, \sigma(\Lambda^{2\nu-2}), \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)\right)$$

ist, so daß schließlich eine Beziehung der Art

$$(62) \quad \begin{aligned} & 2n |X'X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| + \sigma(\Lambda^{2n}) \\ & \cong P\left(\sigma(\Lambda^2), \sigma(\Lambda^4), \dots, \sigma(\Lambda^{2n-2}), \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)\right) \end{aligned}$$

resultiert.

Für $n=2$ soll diese Formel explizit angegeben werden. Die Rechnung kann jedoch wegen ihres Umfangs nicht vollständig reproduziert werden, so daß wir uns darauf beschränken, einige Umrechnungsformeln mitzuteilen. Zunächst gilt noch für beliebiges n

$$(63) \quad \begin{aligned} \sigma(\Lambda^2) & \cong \frac{2}{n} \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)\right)^2 + 2(m-n-1) \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) - \\ & - 2\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right) \end{aligned}$$

und

$$(64) \quad \begin{aligned} \sigma(\Lambda^4) & \cong 2\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + \\ & + \sum_{\substack{0 < 2\mu + \nu \leq 4 \\ \mu, \nu \geq 0}} a_{\mu\nu} \left(\sigma\left(X'X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)\right)^\mu \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)\right)^\nu, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 a_{20} &= 0, & a_{12} &= -\frac{4}{n^2}, & a_{04} &= \frac{2}{n^2}, \\
 a_{11} &= \frac{4}{n}(1+n-m), & a_{03} &= \frac{4}{n^2}(m-n-1), \\
 (65) \quad a_{10} &= -2(n^2+n+1) + (2n+3)m - m^2, \\
 a_{02} &= \frac{2}{n}(2n^2+3n+2) - \frac{1}{n}(6n+7)m + \frac{3}{n}m^2, \\
 a_{01} &= (m-n-1)(m^2 - (2n+3)m + 2(n^2+n+1))
 \end{aligned}$$

ist. Auf Grund der Formeln (63) und (64) lassen sich die Operatoren $\sigma\left(X' X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^\nu$ ($\nu = 1, 2$) ohne weiteres durch $\sigma(A^2)$, $\sigma(A^4)$, $\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right)$ ausdrücken. Mit diesen Darstellungen wird die für $n = 2$ gültige Relation

$$\begin{aligned}
 (66) \quad |X' X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| &\cong \frac{1}{2} \left(\sigma\left(X' X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right) \right)^2 - \frac{1}{2} \sigma\left(X' X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \sigma\left(X' X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right) \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) + \frac{m-2}{2} \sigma\left(X' X \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right)
 \end{aligned}$$

schließlich in

$$\begin{aligned}
 (67) \quad 4 |X' X| \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| + \sigma(A^4) &\cong \frac{1}{2} (\sigma(A^2))^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} (m^2 - 9m + 18) \sigma(A^2) + (2-m) \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \sigma(A^2) - \\
 &- \frac{1}{2} \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \right)^2 \sigma(A^2) + 2(m-2)(m-3) \sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) + \\
 &+ (m^2 - 3m + 1) \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \right)^2 + (m-2) \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\sigma\left(X' \frac{\partial}{\partial X}\right) \right)^4
 \end{aligned}$$

übergeführt. Die Anwendung dieser Identität auf eine Kugelfunktion vom Grad $2k$ zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 ergibt somit

$$\begin{aligned}
 (68) \quad \lambda_2 &= \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \frac{1}{2} (m^2 - 9m + 18) \lambda_1 + 2(2-m)k \lambda_1 - 2k^2 \lambda_1 + \\
 &+ 4(m-2)(m-3)k + 4(m^2 - 3m + 1)k^2 + 8(m-2)k^3 + 4k^4.
 \end{aligned}$$

§ 3. Die verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung für den Fall $n = 2$

Es sei $u(X)$ eine vorgegebene Kugelfunktion, \mathfrak{L}_u die von den Funktionen $u(UX)$ ($U'U = E$) erzeugte lineare Schar und $u_\nu(X)$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$) eine normierte Orthogonalbasis von \mathfrak{L}_u . Zufolge (40) ist

$$(69) \quad F(X, \tilde{X}) = \sum_{\nu=1}^N u_\nu(X) \overline{u_\nu(\tilde{X})}$$

gegenüber den simultanen Substitutionen $X \rightarrow UX$, $\tilde{X} \rightarrow U\tilde{X}$ ($U'U = E$) invariant und daher als Polynom in den Elementen der Matrizen $\tilde{X}'X$, $X'X$, $\tilde{X}'\tilde{X}$ darstellbar:

$$(70) \quad F(X, \tilde{X}) = G(\tilde{X}'X, X'X, \tilde{X}'\tilde{X}).$$

Wir interessieren uns für die spezielle Funktion

$$(71) \quad F(X) = F\left(X, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

in \mathfrak{L}_u . Es ist leicht zu sehen, daß jede Funktion aus \mathfrak{L}_u als Linearkombination der Funktionen $F(UX)$ ($U'U = E$) darstellbar ist, woraus $\mathfrak{L}_u = \mathfrak{L}_F$ erhellt. Hiernach ist klar, daß mit $u(X)$ auch $F(X) \equiv 0 \pmod{|X'X|}$ ist. Berücksichtigt man noch die Invarianz der Operatoren $\sigma(A^{2\nu})$ bezüglich der Abbildungen $X \rightarrow UX$ ($U'U = E$), so erkennt man, daß $u(X)$ und $F(X)$ Kugelfunktionen zu gleichen Eigenwerten sind. Fortan sei $\varepsilon = k - 2\left[\frac{k}{2}\right]$, dabei n, k der Grad von $u(X)$ und $F(X)$; außerdem sei

$$(72) \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = X_1^{(n)}, \quad Y = X'X, \quad W_1 = X_1 Y^{-1} X_1'.$$

Nach (70) ist nun

$$F(X) = G(X_1, E, E) \text{ für } X'X = E.$$

Wegen der Invarianz von $|X_1|^\varepsilon F(X)$ gegenüber den Abbildungen $X \rightarrow XV$ ($V'V = E$) folgt, daß $|X_1|^\varepsilon G(X_1, E, E)$ als Polynom in den Elementen von $X_1 X_1'$ darstellbar ist:

$$|X_1|^\varepsilon G(X_1, E, E) = H(X_1 X_1').$$

Im Falle $\varepsilon = 1$ verschwindet das mit variabler symmetrischer Matrix W gebildete Polynom $H(W)$ auf der Mannigfaltigkeit $|W| = 0$. Mithin ist $H(W) = |W|^\varepsilon H_0(W)$, wobei $H_0(W)$ wieder ein Polynom bezeichnet. Es ergibt sich somit

$$(73) \quad F(X) = G(X_1, E, E) = |X_1|^\varepsilon H_0(X_1 X_1') \text{ für } X'X = E.$$

Ist X eine beliebige Matrix vom Rang n und $R = \sqrt{X'X}$, so gilt (73) mit $X R^{-1}$ an Stelle von X . Aus

$$F(X R^{-1}) = |X_1 R^{-1}|^\varepsilon H_0(X_1 Y^{-1} X_1')$$

folgt dann

$$(74) \quad F(X) = |X'X|^{\frac{k}{2}} |W_1|^{-\frac{\varepsilon}{2}} H_0(W_1)$$

oder auch

$$(75) \quad H_0(W_1) = |Y|^{\frac{\varepsilon-k}{2}} |X_1|^{-\varepsilon} F(X).$$

Hieraus ist zu erkennen, daß $H_0(W_1)$ gegenüber den Transformationen $W_1 \rightarrow W_1[U]$ ($U'U = E$) invariant ist. Wir realisieren diese Transformationen durch die Abbildung $X_1 \rightarrow U'X_1, X_2 \rightarrow X_2$. Wegen

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} U'X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right) &= F\left(\begin{pmatrix} U'X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= |U|^k F\left(X, \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}\right) = |U|^k F(X) \end{aligned}$$

nimmt die rechte Seite von (75) bei dieser Abbildung den Faktor $|U|^{-\varepsilon+k} = 1$ auf. Das heißt, es ist in der Tat

$$(76) \quad H_0(W_1[U]) = H_0(W_1) \text{ für } U'U = E,$$

so daß $H_0(W_1)$ auch als Polynom in den Funktionen $\sigma(W_1^r)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) dargestellt werden kann. Gleichwertig damit ist eine Darstellbarkeit von $H_0(W_1)$ als Polynom in den Koeffizienten von

$$(77) \quad |tE - W_1| = t^n - q_1 t^{n-1} + q_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n q_n.$$

Wegen $q_n = |W_1|$ gestattet

$$(78) \quad |W_1|^{\frac{\epsilon}{2}} H_0(W_1) = K(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

also eine Entwicklung

$$(79) \quad K(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_n} a_{v_1, v_2, \dots, v_n} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_n^{v_n},$$

in der (v_1, v_2, \dots, v_n) endlich viele Systeme nicht-negativer Zahlen durchläuft, die den Bedingungen

$$(80) \quad v_i \equiv 0 \pmod{1} \quad \text{für} \quad i < n, \quad v_n \equiv \frac{\epsilon}{2} \pmod{1}$$

genügen.

Die Differentialgleichung

$$(81) \quad \sigma(\Lambda^2) F(X) = \lambda_1 F(X)$$

ist mit

$$(82) \quad \sigma(\Lambda^2) |W_1|^{\frac{\epsilon}{2}} H_0(W_1) = \lambda_1 |W_1|^{\frac{\epsilon}{2}} H_0(W_1)$$

gleichwertig; denn $|X'X|^{\frac{k}{2}}$ ist mit dem Operator Λ vertauschbar. Es soll nun gezeigt werden, daß es einen Differentialoperator in W_1 gibt, der auf eine willkürliche Funktion $h(W_1)$ dieselbe Wirkung hat wie $\sigma(\Lambda^2)$, wobei W_1 die in (72) angegebene Bedeutung hat. Zunächst führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

$$(83) \quad W_1 = X_1 Y^{-1} X_1', \quad W_2 = X_2 Y^{-1} X_2', \\ \Lambda_1 = W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} - \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)'$$

Dabei wird, wie es im Falle symmetrischer Matrizen üblich ist, $\frac{\partial}{\partial W_1} = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\nu}} \right)$ gesetzt mit $W_1 = (w_{\mu\nu})$ und $e_{\mu\nu} = 1$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Man bestätigt sofort die Relationen

$$(84) \quad W_2' W_2 = W_1 - W_1^2, \quad \sigma(X_2 Y^{-1} X_2) = n - \sigma(W_1).$$

Die geplante Umrechnung erfolgt mit Hilfe der Identitäten

$$(85) \quad X_1 \frac{\partial}{\partial X_1'} h(W_1) = 2 \left\{ W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} - W_1 \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right\} h(W_1), \\ X_1 \frac{\partial}{\partial X_2'} h(W_1) = -2 W_1 \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' h(W_1), \\ X_2 \frac{\partial}{\partial X_1'} h(W_1) = 2 \left\{ W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} - W_2 \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right\} h(W_1), \\ X_2 \frac{\partial}{\partial X_2'} h(W_1) = -2 W_2 \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' h(W_1).$$

Auf Grund der Zerlegung

$$(86) \quad A = \begin{pmatrix} X_1 \frac{\partial}{\partial X_1'} - \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1'} \right)' & X_1 \frac{\partial}{\partial X_2} - \left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_1'} \right)' \\ X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} - \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_2} \right)' & X_2 \frac{\partial}{\partial X_2} - \left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \right)' \end{pmatrix}$$

ergibt sich somit

$$(87) \quad A h(W_1) = 2 \begin{pmatrix} A_1 & - \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \\ W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} & 0 \end{pmatrix} h(W_1),$$

wobei

$$\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} - \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1'} \right)' \right) h(W_1) = 2 A_1 h(W_1)$$

berücksichtigt wurde. Wird (86) noch einmal auf (87) angewendet, so folgt nach Spurbildung

$$(88) \quad \sigma(A^2) h(W_1) = 4 \left\{ \sigma(A_1^2) + \sigma \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_2} W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right) - \sigma \left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_1'} \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right) \right\} h(W_1).$$

Die hier benötigten Operatorenprodukte sind mit Hilfe von (85) abzuleiten. Man findet wieder nach einfacher Rechnung

$$X_1 \frac{\partial}{\partial X_2} W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} h(W_1) = \left\{ -2 \left(W_2' W_2 \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right)' \frac{\partial}{\partial W_1} + (m-2n-1) W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} + W_1^2 \frac{\partial}{\partial W_1} + \sigma(W_1) W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right\} h(W_1)$$

und

$$X_2 \frac{\partial}{\partial X_1'} \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' h(W_1) = \left\{ -2 \left(W_2 \left(W_2 \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right)' + 2 \left(W_2 \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right)' + X_2 Y^{-1} X_2' \left(\sigma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} \right) - \sigma \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right) \right) - W_2 \left(W_2 \frac{\partial}{\partial W_1} \right)' \right\} h(W_1).$$

Mit den Ausdrücken, die man hieraus durch Spurbildung und der nach (84) möglichen Reduktion erhält, wird (88) schließlich in die Identität

$$(89) \quad \sigma(A^2) h(W_1) = 4 \left\{ \sigma(A_1^2) - 2\sigma \left((W_1 - W_1^2) \frac{\partial}{\partial W_1} \frac{\partial}{\partial W_1} \right) + (m-n) \sigma \left(W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} \right) + (\sigma(W_1) - n) \sigma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} \right) \right\} h(W_1)$$

übergeführt.

Wir behandeln nun den Fall, daß $h(W_1)$ eine Funktion von $\sigma(W_1^r)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ist. Sei allgemein $p_r = \sigma(W_1^r)$ für $r \geq 0$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ und

$$h(W_1) = g(p).$$

Wegen $W_1 \frac{\partial}{\partial W_1} p_r = r W_1^r$ ist $A_1 p_r = 0$, also identisch in p

$$\sigma(A_1^2) g(p) = 0.$$

Die weitere Umrechnung von (89) vermittelt der Formeln

$$\frac{\partial}{\partial W_1} W_1^r = \frac{n+r}{2} W_1^{r-1} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{r-1} p_\mu W_1^{r-1-\mu} \text{ für } r \geq 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial W_1} g(p) = \left\{ \sum_{r=1}^n r W_1^{r-1} \frac{\partial}{\partial p_r} \right\} g(p)$$

ist nun rasch auszuführen. Es ergibt sich die Identität

$$(90) \quad \sigma(A^2) g(p) = \left[8 \sum_{\mu, \nu=1}^n \mu \nu (p_{\mu+\nu} - p_{\mu+\nu-1}) \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} + \right. \\ \left. + 4 \sum_{\nu=1}^n \left\{ \nu(n+\nu-1)(p_\nu - p_{\nu-1}) + \nu(m-n)p_\nu + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1} p_\mu (p_{\nu-\mu} - p_{\nu-\mu-1}) \right\} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right] g(p).$$

Hierin kann p_ν im Falle $\nu > n$ durch ein isobares Polynom in p_1, p_2, \dots, p_n dargestellt werden. Da diese Polynome im allgemeinen nur sehr schwierig anzugeben sind, empfiehlt sich jetzt die Spezialisierung von n . So ist für $n = 2$ unmittelbar

$$(91) \quad \sigma(A^2) g(p) = 4 \left[2(p_2 - p_1) \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + 4(3p_1 p_2 - p_1^3 - 2p_2) \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \right. \\ \left. + 4(2p_1^2 p_2 - p_1^4 - p_2^2 - 3p_1 p_2 + p_1^3) \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} + (m p_1 - 4) \frac{\partial}{\partial p_1} + \right. \\ \left. + 2((m+1)p_2 + p_1^2 - 5p_1) \frac{\partial}{\partial p_2} \right] g(p) = 0$$

zu notieren, wobei

$$p_3 = \frac{3}{2} p_1 p_2 - \frac{1}{2} p_1^3,$$

$$p_4 = p_1^2 p_2 - \frac{1}{2} p_1^4 - \frac{1}{2} p_2^2$$

berücksichtigt wurde. Zu einem handlicheren Operator gelangt man, wenn man noch eine Umrechnung auf die Variablen

$$(92) \quad q_1 = p_1, \quad q_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 - p_2)$$

ausführt. Die Durchführung ergibt für $g(p) = f(q_1, q_2)$ die Identität

$$(93) \quad \sigma(A^2) f(q_1, q_2) = 4 \left[2(q_1^2 - 2q_2 - q_1) \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \right. \\ \left. + 4(q_1 q_2 - 2q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} + 2(2q_2^2 - q_1 q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + (m q_1 - 4) \frac{\partial}{\partial q_1} + \right. \\ \left. + (2(m-1)q_2 - q_1) \frac{\partial}{\partial q_2} \right] f(q_1, q_2).$$

Damit ist für die durch

$$(94) \quad F(X) = |X' X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2)$$

definierte Funktion $K(q_1, q_2)$ eine Differentialgleichung bestimmt. Sie lautet

$$(95) \quad \left[8(q_1 - q_1^2 + 2q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + 16(2q_2 - q_1q_2) \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} + 8(q_1q_2 - 2q_2^2) \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + 4(4 - m q_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + 4(q_1 - 2(m - 1)q_2) \frac{\partial}{\partial q_2} + \lambda_1 \right] K(q_1, q_2) = 0.$$

Die Frage nach den Polynomlösungen soll nun in Angriff genommen werden.

§ 4. Berechnung der Eigenwerte im Falle $n = 2$

Es sei $\varepsilon = 0$ oder 1 vorgegeben. Mit dem Polynomansatz

$$(96) \quad K(q_1, q_2) = \sum_{\mu, \nu \geq 0} a_{\mu\nu} q_1^\mu q_2^\nu,$$

wobei $\mu \equiv 0, \nu \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$ zu fordern ist, gehen wir in die Differentialgleichung (95) ein. Für die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ ergeben sich die linearen homogenen Gleichungen

$$(97)_{\mu\nu} \quad (\lambda_1 - \lambda_{\mu\nu}) a_{\mu\nu} + 4(\nu + 1)(2\nu + 1) a_{\mu-1, \nu+1} + 8(\mu + 1)(\mu + 4\nu + 2) a_{\mu+1, \nu} + 16(\mu + 2)(\mu + 1) a_{\mu+2, \nu-1} = 0.$$

Zur Abkürzung ist hier

$$(98) \quad \lambda_{\mu\nu} = 8(\mu + \nu)^2 + 8\nu(\nu + m - 3) + 4\mu(m - 2)$$

gesetzt worden. Es seien

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \lambda^{(3)} < \dots$$

die der Größe nach geordneten Werte von $\lambda_{\mu\nu}$. $\lambda_{\mu\nu} = \lambda^{(i)}$ gestatte ρ_i Lösungen $\mu, \nu \geq 0$ mit $\mu \equiv 0, \nu \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$. Wir denken uns nun die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ und ebenso die Gleichungen $(97)_{\mu\nu}$ in Gruppen nach wachsenden Werten von $\lambda_{\mu\nu}$ angeordnet. Hinsichtlich der Anordnung innerhalb der Gruppen erlassen wir keine Vorschrift. Da die Differenzen $\lambda_{\mu+1, \nu} - \lambda_{\mu\nu}, \lambda_{\mu-1, \nu+1} - \lambda_{\mu\nu}, \lambda_{\mu+2, \nu-1} - \lambda_{\mu\nu}$ alle positiv sind, wie eine einfache Rechnung zeigt, so gehören $a_{\mu+1, \nu}, a_{\mu-1, \nu+1}, a_{\mu+2, \nu-1}$ zu Gruppen, die der Gruppe von $a_{\mu\nu}$ ohne Ausnahme nachfolgen. Gehen wir von einer (zunächst hypothetischen) nicht-trivialen Polynomlösung aus, so gibt es eine letzte Koeffizientengruppe, die von 0 verschiedene Zahlen enthält; sie gehört definitionsgemäß zu

$$\lambda^{(N)} = \text{Max}_{a_{\mu\nu} \neq 0} (\lambda_{\mu\nu}).$$

Da in $(97)_{\mu\nu}$ formal alle $a_{\mu\nu}$ gestrichen werden können, die der N -ten Koeffizientengruppe nachfolgen, so verbleibt ein endliches homogenes System, zu dem eine Matrix der Art

$$\begin{pmatrix} D_1 & & & & & & \\ & D_2 & & & & & \\ & & * & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & & & D_N \end{pmatrix}$$

gehört. Hierin ist $D_i = (\lambda_1 - \lambda^{(i)}) E^{(i)}$ und unterhalb dieser Kästchen stehen nur Nullen. Man erkennt nun, daß $\lambda_1 = \lambda^{(N)}$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer nicht-trivialen Polynomlösung ist. Der Rang der Lösungsschar ist ersichtlich gleich ϱ_N .

Im Hinblick auf (94) ordnen wir jedem Polynom (96) eine Gradzahl k zu. Es sei dies die größte ganze Zahl $k \equiv \varepsilon \pmod{2}$, so daß

$$(99) \quad |X'X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2) \equiv 0 \pmod{|X'X|}$$

gilt. Wir zeigen, daß

$$(100) \quad k = 2 \operatorname{Max}_{\mu, \nu \neq 0} (\mu + \nu)$$

ist. Wegen $q_2 = |W_1| = |X_1|^2 |Y^{-1}|$ ist $g = \frac{k - \varepsilon}{2}$ die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$|Y|^g |X_1|^g K(q_1, q_2) q_2^{-\frac{g}{2}} \equiv 0 \pmod{|Y|}.$$

Wir zerlegen $K(q_1, q_2) q_2^{-\frac{g}{2}}$ in homogene Bestandteile:

$$K(q_1, q_2) q_2^{-\frac{g}{2}} = \sum_{e=0}^s H_e(q_1, q_2), \quad H_s(q_1, q_2) \neq 0.$$

Der Grad von H_e sei ρ . Da $|Y| q_1 = |Y| \sigma(X_1 Y^{-1} X_1')$ und $|Y| q_2 = |X_1|^2$ Polynome sind, so ist jedenfalls

$$|Y|^s |X_1|^s \sum_{e=0}^{s-1} H_e(q_1, q_2) \equiv 0 \pmod{|Y|}.$$

Die Behauptung (100) oder damit gleichwertig

$$(101) \quad g = \operatorname{Max}_{\mu, \nu \neq 0} \left(\mu + \nu - \frac{\varepsilon}{2} \right) = s$$

bedeutet also, daß

$$|Y|^s |X_1|^s H_s(q_1, q_2) \equiv 0 \pmod{|Y|}$$

ist. Wir schließen indirekt, führen also

$$|Y|^s |X_1|^s H_s(q_1, q_2) = |Y| \varphi(X),$$

wobei $\varphi(X)$ ein Polynom sei, zu einem Widerspruch. Der Ansatz

$$H_s = \sum_{i=0}^s c_i q_1^{s-i} q_2^i$$

ergibt wegen $|Y| q_2 = |X_1|^2$ die Beziehung

$$(102) \quad \sum_{i=0}^s c_i |X_1|^{2i+s} (|Y| q_1)^{s-i} = |Y| \varphi(X).$$

Ist c_j der erste von 0 verschiedene Koeffizient, so ist $|X_1|^{2j+s}$ ein Teiler von $\varphi(X)$; denn $|X_1|$ ist irreduzibel und sicher kein Teiler von $|Y|$. Auf beiden Seiten von (102) könnte also der Faktor $|X_1|^{2j+s}$ herausgezogen werden. Es

bedeutet daher keine E. d. A., wenn $c_0 \neq 0$ und $\varepsilon = 0$ angenommen wird. Speziell im Falle $n = 2$ ist nun $|Y| Y^{-1} = Y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, also

$$|Y| q_1 = \sigma \left(X'_1 X_1 Y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Mit

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

was nur für $m \geq 2n = 4$ möglich ist, folgt dann

$$|Y| = |X_1| = 0, \quad \sigma \left(X'_1 X_1 Y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = -1.$$

Nach (102) ergibt sich nun ein Widerspruch mit $c_0 \neq 0$.

Um die möglichen Eigenwerte λ_1 zu einer gegebenen Gradzahl $k \equiv \varepsilon \pmod{2}$ zu finden, gehen wir so vor, daß wir zunächst alle möglichen Gradzahlen $k \equiv \varepsilon \pmod{2}$ zu einem gegebenen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda^{(N)}$ bestimmen. Es wird sich zeigen, daß die zu λ_1 gehörigen k in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Lösungspaaren μ, ν von

$$(103) \quad \lambda_1 = 8(\mu + \nu)^2 + 8\nu(\nu + m - 3) + 4\mu(m - 2)$$

$$\mu, \nu \geq 0, \quad \mu \equiv 0, \quad \nu \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$$

stehen. Sie werden durch $k = 2(\mu + \nu)$ gegeben, so daß auch

$$(104) \quad \lambda_1 = 4k(k - 2\mu + m - 3) + 4\mu(2\mu + 4 - m)$$

$$0 \leq \mu \leq \frac{k}{2}, \quad \mu \equiv 0 \pmod{1}, \quad k \equiv \varepsilon \pmod{2}$$

gilt. Da λ_1 bei festem k eine im Intervall $0 < \mu < \frac{k}{2}$ stark monoton fallende Funktion von μ ist, so ist zu gegebenem k das Paar (μ, ν) in der Tat eindeutig bestimmt. Zu jeder Gradzahl k (gerade oder ungerade) gibt es offenbar $\left[\frac{k}{2} \right] + 1$ verschiedene λ_1 . Daß die durch (95) gegebenen Zahlen Eigenwerte von Kugelfunktionen $2k$ -ten Grades sind, bedarf allerdings noch eines Nachweises. Bildet man mit einem zu λ_1 und k gehörigen Polynom $K(q_1, q_2) \neq 0$

die Form $F(X) = |X'X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2)$ und hierzu die lineare Schar \mathcal{L}_F im Sinne von § 3, so gibt es in \mathcal{L}_F nach dem Lemma in [1], S. 141 eine Basis, die aus Funktionen der Art $|X'X|^a u(X)$ besteht, wobei $u(X)$ eine Kugelfunktion zum Eigenwert λ_1 ist. Es ist mindestens einmal $a = 0$, da $F(X)$ nicht durch $|X'X|$ teilbar ist. $a = 0$ bedeutet aber, daß $u(X)$ eine Kugelfunktion $2k$ -ten Grades ist.

Zum Beweis, daß $k = 2(\mu + \nu)$ für jedes Lösungspaar μ, ν von (103) eine zu λ_1 gehörige Gradzahl ist, benötigen wir den folgenden als bekannt anzusehenden

Hilfssatz: Ist $C = C^{(n)} = (c_{\mu\nu})$ eine Dreiecksmatrix, also $c_{\mu\nu} = 0$ für $\mu > \nu$, ist Rang $C = n - r$ und verschwinden genau r Diagonalelemente von C , etwa

$$c_{\nu_1\nu_1} = c_{\nu_2\nu_2} = \dots = c_{\nu_r\nu_r} = 0,$$

so gibt es zu jedem j in $1 \leq j \leq r$ eine Lösung des Systems

$$\sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} x_\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

mit $x_{\nu_j} = 1$ und $x_\nu = 0$ für $\nu > \nu_j$.

Wir betrachten noch einmal das lineare homogene System (97) $_{\mu\nu}$. Die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ und ebenso die Gleichungen sollen jetzt in Gruppen nach wachsenden Werten von $\mu + \nu$ geordnet werden. Innerhalb einer Gruppe ordnen wir nach wachsenden Werten von ν . Wir betrachten nur solche μ, ν , für die $\mu + \nu \leq \kappa + \frac{\varepsilon}{2}$, wobei die natürliche Zahl κ so groß gewählt sei, daß alle Polynomlösungen zu dem gegebenen λ_1 erfaßt werden. Es wird also $a_{\mu\nu} = 0$ für $\mu + \nu > \kappa + \frac{\varepsilon}{2}$ gesetzt. Beachtet man, daß die Koeffizienten in (97) $_{\mu\nu}$ jetzt in der Anordnung

$$a_{\mu\nu}, a_{\mu-1\nu+1}, a_{\mu+2\nu-1}, a_{\mu+1\nu}$$

stehen, so erscheint die Matrix des linearen Systems (97) $_{\mu\nu}$ in folgender Gestalt:

$$(105) \quad \begin{pmatrix} G_0 & & & & \\ & G_1 & & & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & G_\kappa \end{pmatrix}$$

Dabei ist G_i eine Dreiecksmatrix:

$$G_i = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 - \lambda_{\mu\nu} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \left(\mu + \nu = i + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

An Stelle von λ_1 ist nun $\lambda^{(N)}$ einzutragen. In der Diagonale von (105) erscheinen dann so viele Nullen, als es Lösungen von (103) gibt; ihre Anzahl ist $\rho(N)$. Andererseits hat die Lösungsmannigfaltigkeit zur Matrix (105) den Rang $\rho(N)$, da jeder Lösung eine Polynomlösung von (95) zu $\lambda_1 = \lambda^{(N)}$ umkehrbar eindeutig entspricht. Die Anwendung des formulierten Hilfssatzes zeigt nun: Zu jeder Lösung μ_1, ν_1 von (103) gibt es eine Lösung von (97) $_{\mu\nu}$, so daß $a_{\mu_1\nu_1} = 1$ ist, während alle folgenden Koeffizienten $a_{\mu\nu} = 0$ sind. Dem Polynom $K(q_1, q_2)$, welches mit diesen Koeffizienten gebildet wird, ist nun ersichtlich die Gradzahl $k_1 = 2(\mu_1 + \nu_1)$ zugeordnet, q. e. d.

Aus (104) entnehmen wir die Abschätzung

$$(106) \quad 2k(k+m-2) \leq \lambda_1 \leq 4k(k+m-3).$$

Bei festem λ_1 wird hierdurch ein k -Intervall abgegrenzt, in welchem der durch (68) gelieferte Eigenwert λ_2 eine stark monoton wachsende Funktion von k ist. Mithin ist k auch durch λ_1, λ_2 eindeutig bestimmt.

Es seien $k^{(1)} < k^{(2)} < \dots < k^{(r)}$ die möglichen Gradzahlen zu einem gegebenen Eigenwert λ_1 , dazu $\lambda_2^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \dots < \lambda_2^{(r)}$ die entsprechenden Werte von λ_2 . Zu $\lambda_1, \lambda_2^{(i)}$ bestimmen wir eine Kugelfunktion $u_i(X)$, zu dieser nach dem Verfahren von § 3 eine Kugelfunktion $|X'X|^{\kappa^{(i)}/2} K_i(q_1, q_2)$, welche die-

selben Eigenwerte hat wie $u_i(X)$. Da Kugelfunktionen zu verschiedenen Eigenwertssystemen orthogonal sind, so bestehen die Orthogonalitätsrelationen

$$(107) \quad (K_i, K_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Kroneckersymbol}),$$

sofern die K_i geeignet normiert werden. \mathfrak{S}_ε bezeichne die lineare Schar der Polynome (96) mit $\mu \equiv 0$, $\nu \equiv \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1}$, die Lösungen von (95) zu gegebenem Eigenwert λ_1 sind. Die nach wachsenden Gradzahlen geordneten Polynome K_i sind durch ihre Zugehörigkeit zu \mathfrak{S}_ε , wobei ε durch $k^{(i)} \equiv \varepsilon \pmod{2}$ festgelegt ist, und die Orthogonalitätsrelationen (107) bis auf konstante Faktoren vom Betrag 1 eindeutig bestimmt. Das ist ohne Mühe einzusehen, wenn man beachtet, daß sich das System K_1, K_2, \dots, K_r aus einer Basis von \mathfrak{S}_0 und einer solchen von \mathfrak{S}_1 zusammensetzt. Allgemein folgt damit auch, daß eine Kugelfunktion vom Typus $|X'X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2)$ durch ihre Eigenwerte λ_1, λ_2 bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

Schließlich soll jetzt noch gezeigt werden, daß die Kugelfunktionen zu gegebenen Eigenwerten λ_1, λ_2 einschließlich der Null eine lineare Schar bilden, die eine Basis der Art

$$(108) \quad u_0(U_1 X), u_0(U_2 X), \dots, u_0(U_r X)$$

besitzt, wobei $U_\nu U_\nu = E$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$) und $u_0(X)$ irgendeine Kugelfunktion zu λ_1, λ_2 ist. Zum Beweis denken wir uns die orthogonalen Matrizen U_ν so ausgewählt, daß das System (108) eine Basis von \mathfrak{L}_{u_ν} wird. Sei nun $u(X)$ eine von Null verschiedene Linearkombination von (108); sie sei durch die a -te Potenz von $|X'X|$, aber durch keine höhere teilbar. Wird $u(X) = |X'X|^a u_1(X)$ gesetzt, so sind $u_0(X), u(X), u_1(X)$ Eigenfunktionen der Operatoren $\sigma(A^2), \sigma(A^4)$ zu ein und demselben Paar von Eigenwerten λ_1, λ_2 . Mithin ist $u_1(X)$ eine Kugelfunktion, deren Grad mit dem von $u_0(X)$ übereinstimmen muß. Das bedeutet aber $a = 0$, so daß auch $u(X)$ eine Kugelfunktion zu λ_1, λ_2 ist. Sei jetzt umgekehrt $u(X)$ irgend eine Kugelfunktion zu den Eigenwerten

λ_1, λ_2 . Ist $F(X) = |X'X|^{\frac{k}{2}} K(q_1, q_2)$ die zu λ_1, λ_2 gehörige rotations-symmetrische Kugelfunktion, die bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, so folgt, wie schon in § 3 bemerkt wurde, $\mathfrak{L}_{u_\nu} = \mathfrak{L}_F, \mathfrak{L}_u = \mathfrak{L}_F$, also $u \in \mathfrak{L}_{u_\nu}$. Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

§ 5. Entwicklung nach harmonischen Funktionen

Die Eindeutigkeit der Entwicklung einer Form $u(X) \in \mathfrak{S}_k$ nach harmonischen Formen $u_\nu(X) \in \mathfrak{S}_{k-2\nu}$ ($0 \leq \nu \leq \frac{k}{2}$):

$$(109) \quad u(X) = \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{k}{2}} |X'X|^\nu u_\nu(X)$$

wird hier für $n = 2$ indirekt bewiesen. Es genügt zu zeigen, daß $u(X) = 0$ das Verschwinden aller $u_\nu(X)$ nach sich zieht. Trifft das nicht zu, so folgt

aus (109) die Existenz einer von Null verschiedenen harmonischen Form, die mindestens einmal durch $|X' X|$ teilbar ist. Das ist zum Widerspruch zu führen. Es sei nun, in abgeänderter Bezeichnung, $u(X)$ eine von Null verschiedene Form in \mathfrak{H}_k , die durch $|X' X|^h$ ($h > 0$), aber keine höhere Potenz von $|X' X|$ teilbar ist. Nach dem Lemma in [1], S. 141 gibt es in der zu $u(X)$ gebildeten linearen Schar \mathfrak{L}_u eine Funktion $|X' X|^h v(X)$, wobei $v(X)$ eine Kugelfunktion ist. Da mit $u(X)$ jede Form in \mathfrak{L}_u harmonisch ist, so gilt insbesondere

$$\Delta |X' X|^h v(X) = 0$$

mithin auch

$$(110) \quad (|X' X|^h \Delta - \Delta |X' X|^h) v(X) = 0;$$

denn $v(X)$ ist als Kugelfunktion selbst harmonisch. Schließlich sei, mit k in neuer Bedeutung,

$$(111) \quad \sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) v(X) = 2k v(X), \quad \sigma(\Delta^2) v(X) = \lambda_1 v(X).$$

Für den in (110) auftretenden Operator kann auf Grund der Relation (67) eine einfache Darstellung gewonnen werden. Beachtet man, daß $\sigma(\Delta^2)$ ($\nu = 1, 2$) mit $|X' X|$ vertauschbar ist und allgemein für beliebiges n und $\nu \geq 0$

$$\left(\sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) \right)^\nu |X' X|^h = |X' X|^h \left\{ 2n h + \sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) \right\}^\nu$$

gilt, was durch vollständige Induktion nach ν leicht bewiesen werden kann, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| |X' X|^h - |X' X|^h \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| \\ & \cong h |X' X|^{h-1} \left[\left\{ 2(1-h) - m - \sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) \right\} \sigma(\Delta^2) + \right. \\ & \quad + 2(m-2)(m-3) + 4h(m^2-3m+1) + 16h^2(m-2) + 16h^3 + \\ & \quad + 2\{m^2-3m+1+6h(m-2)+8h^2\} \sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) + \\ & \quad \left. + 3(m-2+2h) \left(\sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) \right)^2 + \left(\sigma \left(X' \frac{\partial}{\partial X} \right) \right)^3 \right] \end{aligned}$$

und damit nach (110) und (111) wegen $h > 0$ und $v(X) \neq 0$:

$$\begin{aligned} (2h + 2k + m - 2) \lambda_1 &= 8k^3 + 12(2h + m - 2)k^2 + \\ & \quad + 4\{m^2 - 3m + 1 + 6h(m - 2) + 8h^2\}k + \\ & \quad + 2(m - 2)(m - 3) + 4h(m^2 - 3m + 1) + 16h^2(m - 2) + 16h^3, \end{aligned}$$

was sich zu

$$\lambda_1 = (2h + 2k + m - 2)^2 + 4h^2 - m^2 + 6m - 10$$

vereinfacht. Eine einfache Abschätzung zeigt, daß

$$\lambda_1 > 4k(k + m - 2) + 2m - 6$$

ist, was sich mit (106) widerspricht. Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

§ 6. Die Funktionen $|L'X|^k$

Es wurde bereits in [1] gezeigt, daß die Funktionen $u_k(X) = |L'X|^k$ Kugelfunktionen sind, falls $L'L = 0$ und Rang $L = n$ ist. Unter dieser Voraussetzung ergab sich sogar $\frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} u_k(X) = 0$. Offenbar darf auch $L'L = E$ vorausgesetzt werden. Ist $L = L_1 + iL_2$ die Zerlegung von L in Real- und Imaginärteil, so ergeben sich die Bedingungen $L_1'L_1 = L_2'L_2 = \frac{1}{2}E$, $L_1'L_2 = 0$, die nur im Falle $m \geq 2n$ befriedigt werden können.

Es sollen noch einige Angaben darüber gemacht werden, wie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von $u_k(X)$ ermittelt werden können. Wird

$$(112) \quad M = \frac{\partial}{\partial X} |L'X| = L(X'L)^{-1} |L'X|$$

gesetzt, so gelten die Regeln

$$(113) \quad \begin{aligned} \Delta u_k &= k u_{k-1} (X M' - M X'), \\ \Delta X M' &= (m - n) X M', \\ \Delta M X' &= (n - 1) M X' - n |L'X| E + X M' \end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung $L'L = 0$ auch

$$(114) \quad \Delta M X' X M' = (n - 1) M X' X M'.$$

Mit diesen Hilfsmitteln ist durch vollständige Induktion nach h der Ansatz

$$(115) \quad \begin{aligned} \Delta^h u_k &= a_{hk} u_k E + (b_{hk} X M' + c_{hk} M X') u_{k-1} + \\ &\quad + d_{hk} M X' X M' u_{k-2} \end{aligned}$$

zu rechtfertigen. Die hier auftretenden Koeffizienten sind durch

$$(116) \quad a_{1k} = 0, \quad b_{1k} = k, \quad c_{1k} = -k, \quad d_{1k} = 0$$

und die Rekursionsformeln

$$(117) \quad \begin{aligned} a_{h+1k} &= -n c_{hk} \\ b_{h+1k} &= k a_{hk} + (m - n + k - 1) b_{hk} + c_{hk} \\ c_{h+1k} &= -k a_{hk} + (n - k) c_{hk} \\ d_{h+1k} &= -(k - 1) b_{hk} - (k - n - 1) d_{hk} \end{aligned}$$

festgelegt. Der Eigenwert λ_{hk} von u_k bezüglich $\sigma(\Delta^h)$ stellt sich nun in der Form

$$(118) \quad \lambda_{hk} = m a_{2hk} + n (b_{2hk} + c_{2hk})$$

dar. Für $h = 1$ und 2 ergeben sich so die in (28) angegebenen Werte.

Die Funktionen $|L'X|^k$ mit $L'L = 0$ gehören zum größten Eigenwert λ_1 , der zur Gradzahl k möglich ist, haben also auch alle ein und denselben Eigenwert λ_2 . Da die Abbildungen $X \rightarrow UX$ ($U'U = E$) Permutationen des Funktionensystems bewirken, so ist auf Grund des letzten Resultats von § 4 klar, daß die lineare Schar der Kugelfunktionen $2k$ -ten Grades mit maximalem Eigenwert λ_1 eine Basis der Art $|L'_v X|^k$ ($v = 1, 2, \dots, r$) mit $L'_v L_v = 0$ besitzt.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß $|L'X|^k$ genau dann harmonisch ist, wenn entweder $k = 0, 1$ oder $|L'L| = 0$ ist. Der Beweis gründet sich auf die Relation (27), die identisch in X und L erfüllt ist. Da beide Seiten von (27) bei der simultanen Abbildung $X \rightarrow UXV$, $L \rightarrow ULV$ ($U'U = E$, $|V| \neq 0$) denselben Faktor aufnehmen, so genügt es, (27) für $L = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$ zu beweisen. Es wird dann

$$(119) \quad \left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| |X_1|^k = (k-1) k^2 (k+1)^2 \dots (k+n-2)^2 (k+n-1) |X_1|^{k-2}$$

behauptet. Ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ein beliebiges Tupel ganzer Zahlen mit $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m$ und verstehen wir unter $X_\alpha = X_\alpha^{(n)}$ die Untermatrix von X , die sich aus den Zeilen mit den Indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zusammensetzt, so ist bekanntlich

$$\left| \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X} \right| = \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \right|^2.$$

In der eingeführten Bezeichnung ist $X_1 = X_{(1, 2, \dots, n)}$. Im Falle $X_{\alpha} \neq X_1$ ist $\left| \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \right| |X_1|^k = 0$ evident, weil hier Differentiationen nach Variablen vorzunehmen sind, die in X_1 gar nicht vorkommen. Die Identität (119) reduziert sich damit auf

$$(120) \quad \left| \frac{\partial}{\partial X_1} \right|^2 |X_1|^k = (k-1) k^2 (k+1)^2 \dots (k+n-2)^2 (k+n-1) |X_1|^{k-2}.$$

Nun gilt aber, wie H. KLINGEN [3] kürzlich gezeigt hat,

$$\left| \frac{\partial}{\partial X_1} \right| |X_1|^k = k(k+1) \dots (k+n-1) |X_1|^{k-1},$$

woraus (120) unmittelbar folgt.

Literatur

- [1] MAASS, H.: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian math. Soc. 20, 117—162 (1956). — [2] SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionen-theorie I. Math. Ann. 124, 17—54 (1951). — [3] KLINGEN, H.: Zur Theorie der hermiteschen Modulfunktionen. Math. Ann. 134, 355—384 (1958).

(Eingegangen am 14. Mai 1958)