MAASS, H.
Math. Annalen, Bd. 134, S. 1—32 (1957)

Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen*)

Von

HANS MAASS in Heidelberg

Einleitung

Im Zusammenhang mit einem zahlentheoretischen Problem ist an anderer Stelle [1] die Frage aufgeworfen worden, ob die Dirichletschen Reihen

$$\varphi_0(s, S; u, v) = \sum_G{}' u(Q\,G)\, v(S\,[G])\, |\, S\,[G]|^{-s-k} \tag{1}$$

Zetafunktionen definieren, d. h. Funktionen, die in der s-Ebene meromorph sind und Funktionalgleichungen vom Riemannschen Typus genügen. Dabei bezeichnet $u(X)$ eine Kugelfunktion vom Typus (m, n) und Grad $2\,n\,k$, $v(Y)$ einen Größencharakter quadratischer Formen, S eine positive Matrix vom Typus $S^{(m)}$ und Q die durch $S = Q'\,Q$ eindeutig bestimmte positive Matrix. G durchläuft ein volles System ganzer, rechts nicht-assoziierter Matrizen vom Typus $G^{(m,n)}$ und Rang n. Es ergab sich der eigentümliche Sachverhalt, daß die gestellte Frage bejaht werden kann, wenn die Kugelfunktion $u(X)$ harmonisch, d. h. Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial X'}\, \frac{\partial}{\partial X}\right) u(X) = 0 \quad (\sigma = \text{Spur}) \tag{2}$$

ist, und es verblieb der Eindruck, daß diese Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür ist, daß die durch (1) definierte Funktion als Zetafunktion anzusprechen ist.

Um nun das Problem der analytischen Fortsetzung der Reihen $\varphi_0(s, S; u, v)$ für beliebige Kugelfunktionen $u(X)$ in Angriff nehmen zu können, war es naheliegend, an Stelle der Kugelfunktionen beliebige Polynome $u(X)$ mit der Invarianzeigenschaft

$$u(X\,V) = u(X) \ \text{ für orthogonale Matrizen } V \tag{3}$$

in die Betrachtung einzubeziehen. $\mathfrak{P}$ bezeichne die lineare Schar der so gekennzeichneten Polynome $u(X)$. Auf die Bedingung (3) kann nicht verzichtet werden, weil sonst gewisse Thetareihen nicht sinnvoll definiert werden können. Es handelt sich hier um die Reihen

$$\vartheta(Y, S; u) = \sum_G u(Q\,G\,R')\, e^{-\pi\sigma\,(Y\,S\,[G])}, \tag{4}$$

wobei G alle ganzen Matrizen vom Typus $G^{(m,n)}$ durchläuft und $R = R^{(n)}$ an

*) CARL LUDWIG SIEGEL zum 60. Geburtstag am 31. 12. 56 gewidmet.

die Bedingung $Y = R' R$ gebunden ist. In der Tat ist $u(X) \in \mathfrak{P}$ notwendig dafür, daß $u(Q G R')$ von der Auswahl von R nicht abhängt, also durch Y eindeutig bestimmt ist. Daß $\vartheta(Y, S; u)$ ein geeignetes Hilfsmittel für die Lösung unseres Problems ist, erscheint plausibel auf Grund der einfachen Transformationsformel

$$\vartheta(Y^{-1}, S; u) = |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}} \vartheta(Y, S^{-1}; \tilde{u}), \tag{5}$$

wobei $u \to \tilde{u}$ eine gewisse Integraltransformation bezeichnet, deren Wirkung auf Polynome auch durch

$$\tilde{u}(X) = e^{-\frac{\Delta}{4\pi}} u(-i X) \quad \text{mit } \Delta = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X}\right) \tag{6}$$

beschrieben wird und die $\mathfrak{P}$ involutorisch auf sich abbildet.

Man konnte nun hoffen, durch Anwendung der Mellintransformation auf $\vartheta(Y, S; u)$ und eine anschließende Fourieranalyse bezüglich des Systems der Größencharaktere $v(Y)$ in der üblichen Weise einen Zugang zu den Reihen $\varphi_0(s, S; u, v)$ zu gewinnen. Der Umstand, daß die variable Matrix Y nicht nur im Exponenten des allgemeinen Gliedes in (4), sondern auch noch im Argument des Polynomfaktors auftritt, führt nun allerdings zu einer überraschenden Wendung. Das beschriebene Verfahren liefert nämlich gar nicht die Reihen $\varphi_0(s, S; u, v)$, sondern es ergeben sich die Funktionen

$$\varphi(s, S; u, v) = \sum_G L\left(Q G \frac{\partial}{\partial G'} Q^{-1}\right)\{v(S[G]) |S[G]|^{-s}\}, \tag{7}$$

wobei G wieder ein volles System ganzer, rechts nicht-assoziierter Matrizen vom Typus $G^{(m,n)}$ und Rang n durchläuft und $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ einen linearen Differentialoperator, d. h. ein Polynom in den Elementen von $X \frac{\partial}{\partial X'}$ mit konstanten Koeffizienten bezeichnet, welches durch

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} = u(X) e^{-\pi\sigma(X'X)} \tag{8}$$

ausreichend bestimmt ist, so daß $\varphi(s, S; u, v)$ wirklich nur von u, nicht aber von der Auswahl von L abhängt. Der Reihentypus (7) läßt sich summarisch einfach beschreiben. Es handelt sich um eine Dirichletsche Reihe in s, deren Koeffizienten jedoch nicht konstant, sondern Polynome in s von beschränktem Grad sind. Eine Darstellung der Reihe (7) als Linearkombination von gewöhnlichen Dirichletreihen mit Potenzen von s als Koeffizienten scheint abwegig zu sein. Man nehme den Standpunkt ein, daß der Reihentypus (7) keiner Reduktion mehr bedarf. Die explizite Ausführung der Differentiationen in (7) ist im allgemeinen gar nicht möglich, da schon die Bildung von $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ bei gegebenem $u(X)$ im allgemeinen schwierig zu übersehen ist. Man kann aber auch an Stelle von $u(X)$ den Operator $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ als gegeben ansehen. Genügt $u(X)$ der Bedingung $u(X V) = |V|^{2k} u(X)$ für $|V| \neq 0$ — für Kugelfunktionen vom Grad $2 n k$ trifft dies zu —, so kann durch verschiedenartige

Berechnung von Integralen gezeigt werden, daß die Reihen (1) und (7) bis auf einen elementaren Polynomfaktor identisch sind, was im allgemeinen sicher nicht der Fall ist. Da unser eigentliches Interesse auf die mit Kugelfunktionen gebildeten Reihen gerichtet ist, so genügt es, die Eigenschaften der durch (7) definierten Funktionen zu bestimmen. Damit werden dann auch die mit Kugelfunktionen gebildeten Reihen (1) erfaßt. Die Frage nach analytischer Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichungen bereitet im Falle der Funktionen (7) keine grundsätzliche Schwierigkeit mehr, wenn man in herkömmlicher Weise die Thetatransformationsformel (5) zur Herleitung einer Integraldarstellung der fraglichen Funktionen verwendet. Die technischen Schwierigkeiten, die sich bei der Berechnung der Polglieder einstellen, sind allerdings so beträchtlich, daß vorerst nur vermutet werden kann: Die Funktionen $\varphi(s, S; u, v)$ sind meromorph und genügen der Funktionalgleichung

$$\xi\left(\frac{m}{2} - s,\, S;\, u, v\right) = \xi(s,\, S^{-1};\, \tilde{u},\, \tilde{v})\,, \tag{9}$$

wobei

$$\xi(s, S; u, v) = \left(\frac{|S|^{\frac{1}{m}}}{\pi}\right)^{ns} \Gamma(s-\alpha_1)\,\Gamma(s-\alpha_2)\ldots\Gamma(s-\alpha_n)\,\varphi(s, S; u, v)\,, \tag{10}$$

$\tilde{v}(Y) = v(Y^{-1})$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ komplexe Zahlen sind, die durch die Eigenwerte von v bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Ein einfacher Schluß zeigt für allgemeines n, daß man sich beim Beweis der Funktionalgleichung (9) auf den Spezialfall harmonischer Formen $u(X) \in \mathfrak{P}$ beschränken kann. Dabei berücksichtigen wir, daß jedes Polynom $u(X) \in \mathfrak{P}$ in eindeutiger Weise in

$$u(X) = \sum_{\mu, \nu \geq 0} (\sigma(X'X))^{\mu}\, u_{\mu\nu}(X) \tag{11}$$

zerlegt werden kann, wobei $u_{\mu\nu}(X)$ eine harmonische Form in $\mathfrak{P}$ vom Grad 2ν sei. Dementsprechend ist auch

$$\varphi(s, S; u, v) = \sum_{\mu, \nu \geq 0} \pi^{-\mu}\, \frac{\Gamma(ns+\nu+\mu)}{\Gamma(ns+\nu)}\, \varphi(s, S;\, u_{\mu\nu}, v)\,, \tag{12}$$

woraus unmittelbar erhellt, daß $\varphi(s, S; u, v)$ meromorph ist, falls dies für die Funktionen $\varphi(s, S; u_{\mu\nu}, v)$ zutrifft.

Umfangreiche Rechnungen zeigen schließlich, daß in den Spezialfällen $n = 1$ und 2 alle hier aufgestellten Behauptungen richtig sind.

§ 1. Die Integraltransformation $u \to \tilde{u}$.

Wir betrachten Polynome $u = u(\mathfrak{x})$ in den m Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, die wir zu einem Spaltenvektor $\mathfrak{x}$ zusammenfassen, und bestimmen einige Eigenschaften der Transformation

$$u(\mathfrak{x}) \to \tilde{u}(\mathfrak{x}) = \int u(\mathfrak{t})\, e^{-\pi(\mathfrak{t}+i\mathfrak{x})'(\mathfrak{t}+i\mathfrak{x})}\, [d\mathfrak{t}]\,, \tag{13}$$

wobei $[d\mathfrak{t}] = dt_1\, dt_2 \ldots dt_m$ gesetzt ist und über den vollen $\mathfrak{t}$-Raum integriert wird. Offenbar ist

$$\tilde{u}(i\,\mathfrak{x}) = u^*(\mathfrak{x})$$

mit

$$u^*(\mathfrak{x}) = \int u(\mathfrak{t})\, e^{-\pi(\mathfrak{t}-\mathfrak{x})'(\mathfrak{t}-\mathfrak{x})}[d\mathfrak{t}]$$
$$= \int u(\mathfrak{x}+\mathfrak{t})\, e^{-\pi\mathfrak{t}'\mathfrak{t}}[d\mathfrak{t}]\,,$$

wobei gleichfalls über den vollen (reellen) $\mathfrak{t}$-Raum integriert wird. Die Integration soll nun unter Zugrundelegung der Entwicklung

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} a_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}\, x_1^{\nu_1}\, x_2^{\nu_2}\ldots x_m^{\nu_m}$$

explizit ausgeführt werden. Man beachte, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} t_1^{\mu_1}\ldots t_m^{\mu_m}\, e^{-\pi(t_1^2+\cdots+t_m^2)}\,dt_1\ldots dt_m$$

verschwindet, falls einer der nicht-negativen ganzen Exponenten μ_j ungerade ist, und den Wert

$$\prod_{j=1}^{m} \pi^{-\frac{\mu_j+1}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{\mu_j+1}{2}\right)$$

hat, falls alle μ_j gerade sind. Zufolge

$$u(\mathfrak{x}+\mathfrak{t}) = \sum_{\nu_1\ldots\nu_m} a_{\nu_1\ldots\nu_m} \sum_{\substack{0\leqq\mu_i\leqq\nu_i\\ 1\leqq i\leqq m}} \prod_{j=1}^{m} \binom{\nu_j}{\mu_j} t_j^{\mu_j}\, x_j^{\nu_j-\mu_j}$$

erhält man also

$$u^*\mathfrak{x}() = \sum_{\nu_1\ldots\nu_m} a_{\nu_1\ldots\nu_m} \sum_{\substack{0\leqq 2\mu_i\leqq\nu_i\\ 1\leqq i\leqq m}} \prod_{j=1}^{m} \pi^{-\mu_j-1/2}\binom{\nu_j}{2\mu_j}\Gamma\!\left(\mu_j+\frac{1}{2}\right) x_j^{\nu_j-2\mu_j}$$
$$= \sum_{\nu_1\ldots\nu_m} a_{\nu_1\ldots\nu_m} \sum_{\substack{0\leqq 2\mu_i\leqq\nu_i\\ 1\leqq i\leqq m}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\nu_j!}{\mu_j!\,(\nu_j-2\mu_j)!\,2^{2\mu_j}\pi^{\mu_j}}\, x_j^{\nu_j-\mu_j}\,.$$

Andererseits ergibt die Potenzierung des Laplaceschen Operators

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

den Ausdruck

$$\Delta^p = \sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_m=p\\ \mu_i\geqq 0}} \frac{p!}{\mu_1!\ldots\mu_m!}\,\frac{\partial^{2\mu_1}}{\partial x_1^{2\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{2\mu_m}}{\partial x_m^{2\mu_m}}\,,$$

damit

$$\Delta^p\, u(\mathfrak{x}) = p!\sum_{\nu_1\ldots\nu_m} a_{\nu_1\ldots\nu_m} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_m=p\\ 0\leqq 2\mu_i\leqq\nu_i\\ 1\leqq i\leqq m}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\nu_j!}{\mu_j!\,(\nu_j-2\mu_j)!}\, x_j^{\nu_j-2\mu_j}$$

und schließlich

$$\sum_{p\geqq 0}\frac{1}{p!}(4\pi)^{-p}\,\Delta^p\, u(\mathfrak{x})$$
$$= \sum_{\nu_1\ldots\nu_m} a_{\nu_1\ldots\nu_m} \sum_{\substack{0\leqq 2\mu_i\leqq\nu_i\\ 1\leqq i\leqq m}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\nu_j!}{\mu_j!\,(\nu_j-2\mu_j)!\,2^{2\mu_j}\pi^{\mu_j}}\, x_j^{\nu_j-2\mu_j} = u^*(\mathfrak{x})\,,$$

wofür in verständlicher Bezeichnung

$$u^*(\mathfrak{x}) = e^{\frac{\Delta}{4\pi}}\, u(\mathfrak{x})$$

geschrieben wird. Die Transformationen (13) und

$$u(\mathfrak{x}) \to \widetilde{u}(\mathfrak{x}) = e^{-\frac{\Delta}{4\pi}}\, u(-i\,\mathfrak{x}) \tag{14}$$

haben demnach auf Polynome dieselbe Wirkung. Ist $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Form, so ist ersichtlich $\widetilde{u}(\mathfrak{x}) = u(-i\,\mathfrak{x})$. Da jedes Polynom $u(\mathfrak{x})$ eindeutig in der Form

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{\mu,\nu \geqq 0}' (\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu}\, u_{\mu\nu}(\mathfrak{x}) \tag{15}$$

dargestellt werden kann, wobei $u_{\mu\nu}(\mathfrak{x})$ eine harmonische Form vom Grad ν sei, so genügt es zur Bestimmung von $\widetilde{u}(\mathfrak{x})$ wegen der Linearität der Transformation (14), ihre Wirkung auf ein Polynom der speziellen Gestalt $(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu} u(\mathfrak{x})$ zu ermitteln, wobei jetzt $u(\mathfrak{x})$ eine harmonische Form ist.

Mit Hilfe der Vertauschungsregeln

$$\Delta\,\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}\,\Delta + 4\,\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}} + 2\,m\,, \quad \Delta\,\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\,\Delta + 2\,\Delta$$

$$\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}\left(\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}} + 2\right)$$

und vollständiger Induktion nach den jeweils auftretenden Exponenten beweist man leicht, daß Operatorenidentitäten der Art

$$\Delta^k(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^l = \sum_{\varkappa=0}^{\mathrm{Min}(k,l)} (\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{l-\varkappa}\left(\sum_{\lambda=0}^{2\varkappa} a_{kl\varkappa\lambda}\left(\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\right)^{\lambda}\right)\Delta^{k-\varkappa}$$

mit gewissen Konstanten $a_{kl\varkappa\lambda}$ bestehen.

Wenn nun $\Delta\, u = 0$, u homogen vom Grad ν, so können wir schließen

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu}\, u(\mathfrak{x})} &= (-i)^{2\mu+\nu}\, e^{-\frac{\Delta}{4\pi}}\,(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu}\, u(\mathfrak{x}) \\
&= (-i)^{2\mu+\nu} \sum_{k \geqq 0} \frac{(-4\pi)^{-k}}{k!}\,\Delta^k\,(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu}\, u(\mathfrak{x}) \\
&= (-i)^{2\mu+\nu} \sum_{k \geqq 0}' \frac{(-4\pi)^{-k}}{k!} \sum_{\varkappa=0}^{\mathrm{Min}(k,\mu)}{}' (\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu-\varkappa}\left(\sum_{\lambda=0}^{2\varkappa}{}' a_{k\mu\varkappa\lambda}\left(\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\right)^{\lambda}\right)\Delta^{k-\varkappa}\, u(\mathfrak{x}) \\
&= (-i)^{2\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\mu}{}' \frac{(-4\pi)^{-k}}{k!}\,(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu-k}\left(\sum_{\lambda=0}^{2k} a_{k\mu k\lambda}\left(\mathfrak{x}'\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\right)^{\lambda}\right) u(\mathfrak{x}) \\
&= (-i)^{2\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\mu}{}' \frac{(-4\pi)^{-k}}{k!}\,(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu-k}\left(\sum_{\lambda=0}^{2k} \nu^{\lambda} a_{k\mu k\lambda}\right) u(\mathfrak{x})\,.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit der folgende Sachverhalt: Für eine harmonische Form $u(\mathfrak{x})$ vom Grade ν ist

$$\widetilde{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\mu}\, u(\mathfrak{x})} = (-i)^{2\mu+\nu} \sum_{\varrho=0}^{\mu} c_{\mu\varrho}(\nu)\,(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\varrho}\, u(\mathfrak{x}) \tag{16}$$

mit gewissen Koeffizienten $c_{\mu\varrho}(\nu)$, die Polynome in ν darstellen, deren Koeffizienten wiederum nur von der Variablenzahl m abhängen. Aus dem

Beweisgang geht auch noch hervor, daß $c_{\mu\mu}(\nu) = 1$ ist. Darüber hinaus wer den wir in § 7 allgemein

$$c_{\mu\varrho}(\nu) = (-\pi)^{\varrho-\mu}\binom{\mu}{\varrho}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\nu+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\nu+\varrho\right)}$$

beweisen.

Die folgenden Anwendungen beziehen sich auf den Fall von $m\,n$ Varia blen $x_{\mu\nu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$, die wir zu einer Matrix $X = (x_{\mu\nu})$ zusammenfassen. Das ergibt nichts inhaltlich Neues, sondern nur eine a ndere Bezeichnung. Unter Δ ist nun der Operator $\Delta = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right)$ zu verst ehen und an Stelle von (14) und (16) treten

$$\widetilde{u}(X) = e^{-\frac{\Delta}{4\pi}}\,u(-i\,X) \tag{17}$$

und

$$\widetilde{(\sigma(X'X))^k\,u(X)} = (-i)^{2k+h}\sum_{\varrho=0}^{k} c_{k\varrho}(h)\,(\sigma(X'X))^{\varrho}\,u(X), \tag{18}$$

letzteres unter der Voraussetzung, daß $u(X)$ eine harmonische Form vom Grad h ist.

Sei $\Lambda = X\frac{\partial}{\partial X'} - \left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)'$; dann ist

$$\Delta\,\Lambda = \Lambda\,\Delta\,. \tag{19}$$

Man hat nämlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\Lambda &= \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\left(\sum_{\varrho}\left(x_{\mu\varrho}\frac{\partial}{\partial x_{\nu\varrho}} - x_{\nu\varrho}\frac{\partial}{\partial x_{\mu\varrho}}\right)\right)\\ &= \Lambda\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} + \left(\delta_{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu\beta}} - \delta_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu\beta}}\right),\end{aligned}$$

wobei $\delta_{\mu\nu}$ das Kroneckersymbol ist, und daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha\beta}^2}\Lambda &= \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\Lambda\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} + \left(\delta_{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} - \delta_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\right)\\ &= \Lambda\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha\beta}^2} + 2\left(\delta_{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} - \delta_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\right),\end{aligned}$$

so daß die Summation über α und β in der Tat (19) ergibt. Eine spe zielle Folge von (19) ist

$$\Delta\,\sigma(\Lambda^{2h}) = \sigma(\Lambda^{2h})\,\Delta \tag{20}$$

für jede natürliche Zahl h. Auf Grund der Darstellung (17) ist nun festzustel len, daß die lineare Schar der Polynome $u(X)$, die Eigenfunktionen des Operators $\sigma(\Lambda^{2h})$ zu gegebenem Eigenwert λ_h sind, durch die Operation $u(X) \to \widetilde{u}\,(X)$ auf sich abgebildet wird. Das heißt aus

$$\sigma(\Lambda^{2h})\,u(X) = \lambda_h u(X) \text{ folgt } \sigma(\Lambda^{2h})\,\widetilde{u}\,(X) = \lambda_h\widetilde{u}(X)\,. \tag{21}$$

Schließlich beachte man auch noch die Vertauschbarkeit von Δ mit $\left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right|$, woraus

$$(22)\qquad \widetilde{(-1)^n \left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right| u(X)} = \left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right| \tilde{u}(X)$$

erhellt.

Zusammenfassend können wir sagen, daß sich die Differentialgleichungen

$$(23)\qquad \sigma(\Lambda^{2h})\,u(X) = \lambda_h u(X) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(24)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial X'}\,\frac{\partial}{\partial X}\right| u(X) = 0\,,$$

welche mit

$$(25)\qquad u(X\,V) = |V|^k u(X) \text{ für } |V| \neq 0$$

die Kugelfunktionen $k\,n$-ten Grades unter den Polynomen kennzeichnen, sofort auf $\tilde{u}(X)$ übertragen, was für (25) nicht zutrifft. Invariant bei der Transformation $u \to \tilde{u}$ ist hier nur die schwächere Bedingung

$$(26)\qquad u(X\,V) = u(X) \text{ für } V'\,V = E\,,$$

wobei E die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet. Die lineare Schar der Polynome $u(X)$ mit dieser Eigenschaft ist eingangs schon mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet worden. Für $u(X) \in \mathfrak{P}$ ist

$$\tilde{\tilde{u}}(X) = e^{-\frac{\Lambda}{4\pi}}\,\tilde{u}(-i\,X) = e^{-\frac{\Lambda}{4\pi}}\,e^{\frac{\Lambda}{4\pi}}\,u(-X) = u(-X) = u(X)\,;$$

denn $-E$ ist orthogonal.

§ 2. Die Theta-Transformationsformel

Im folgenden bezeichnen $S = S^{(m)}$ und $Y = Y^{(n)}$ $(m > n)$ positive Matrizen. $Q = Q^{(m)}$ und $R = R^{(n)}$ seien durch $S = Q'\,Q$, $Q = Q' > 0$, $Y = R'R$ bestimmt. Wir bilden mit $u(X) \in \mathfrak{P}$ die in $X = X^{(m,n)}$ periodische Funktion

$$(27)\qquad \vartheta(X, Y, S; u) = \sum_G u(Q(G + X)\,R')\,e^{-\pi\sigma(Y S[G+X])}\,,$$

wobei über alle ganzen G vom Typus $G^{(m,n)}$ summiert wird. Die Thetareihe (4) ergibt sich bei der Spezialisierung $X = 0$:

$$(28)\qquad \vartheta(Y, S; u) = \vartheta(0, Y, S; u)\,.$$

Um die gewünschte Transformationsformel für diese Reihen abzuleiten, entwickeln wir die Funktionen (27) in eine Fourierreihe:

$$(29)\qquad \vartheta(X, Y, S; u) = \sum_G \alpha(G, Y, S; u)\,e^{2\pi i\sigma(G'X)}.$$

Für die Koeffizienten $\alpha(G, Y, S; u)$ erhält man in geläufiger Weise die Darstellung

$$\alpha(G, Y, S; u) = \int_{\mathfrak{X}} u(Q\,X\,R')\,e^{-\pi\sigma(Y S[X]) - 2\pi i\sigma(G'X)}\,[dX]\,,$$

wobei $\mathfrak{X}$ den vollen X-Raum und $[d\,X]$ das Produkt aller Differentiale $d\,x_{\mu\nu}$ bezeichnet. Die Variablensubstitution

$$X_1 = Q\,X\,R' \text{ mit } \frac{\partial(X)}{\partial(X_1)} = |S|^{-\frac{n}{2}}\,|Y|^{-\frac{m}{2}}$$

führt auf

$$\alpha(G, Y, S; u) = |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{\mathfrak{X}} u(X) e^{-\pi\sigma(X'X) - 2\pi i \sigma(R'^{-1} G' Q^{-1} X)} [dX],$$

wobei nachträglich wieder X an Stelle von X_1 geschrieben wurde. Die sinngemäße Anwendung von (13) ergibt nun unmittelbar

$$\begin{aligned} \alpha(G, Y, S; u) &= |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{-\frac{m}{2}} e^{-\pi\sigma(Y^{-1} S^{-1}[G])} \times \\ &\times \int\limits_{\mathfrak{X}} u(X)\, e^{-\pi\sigma(X + iQ^{-1} G R^{-1})'(X + iQ^{-1} G R^{-1})} [dX] \\ &= |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{-\frac{m}{2}} \tilde{u}(Q^{-1} G R^{-1})\, e^{-\pi\sigma(Y^{-1} S^{-1}[G])}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung wird in (29) eingetragen. Ersetzt man nun noch Y durch Y^{-1}, so erhält man für $X = 0$ in der Tat

$$\vartheta(Y^{-1}, S; u) = |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}} \vartheta(Y, S^{-1}; \tilde{u})\,. \tag{30}$$

Daß $\tilde{u}$ mit u in $\mathfrak{P}$ liegt, ist evident auf Grund von (17).

§ 3. Differentialoperatoren

Wir wollen nun die eingangs beschriebene Beziehung zwischen den Polynomen $u(X) \in \mathfrak{P}$ und den linearen Differentialoperatoren $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ näher untersuchen. Zunächst einmal ist klar, daß bei gegebenem $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ das durch

$$u(X)\, e^{-\pi\sigma(X'X)} = L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} \tag{31}$$

bestimmte Polynom $u(X)$ zu $\mathfrak{P}$ gehört; denn $\sigma(X'X)$ und $X \frac{\partial}{\partial X'}$ sind bezüglich der Transformation $X \to XV$ mit orthogonaler Matrix V invariant, der Operator $X \frac{\partial}{\partial X'}$ sogar bei nicht-singulärem V.

Um nun umgekehrt auch einzusehen, daß zu jedem Polynom $u(X) \in \mathfrak{P}$ ein entsprechender Operator $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ gefunden werden kann, ist es erforderlich, $u(X)$ als Polynom in den Elementen $w_{\mu\nu}$ der Matrix $W = XX'$ darzustellen: $u(X) = p(W)$. Das ist möglich auf Grund bekannter Sätze der Invariantentheorie. Die Anwendung des Operators $X \frac{\partial}{\partial X'}$ auf $w_{\alpha\beta}$ ergibt

$$\begin{aligned} X \frac{\partial}{\partial X'} w_{\alpha\beta} &= \left(\sum_{\varrho,\sigma} x_{\mu\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\nu\varrho}} x_{\alpha\sigma} x_{\beta\sigma}\right) \\ &= \left(\sum_{\varrho,\sigma} x_{\mu\varrho} \delta_{\alpha\nu} \delta_{\varrho\sigma} x_{\beta\sigma} + \sum_{\varrho,\sigma} x_{\mu\varrho} x_{\alpha\sigma} \delta_{\nu\beta} \delta_{\varrho\sigma}\right) \\ &= \left(\sum_{\varrho} x_{\mu\varrho} x_{\beta\varrho} \delta_{\alpha\nu} + \sum_{\varrho} x_{\mu\varrho} x_{\alpha\varrho} \delta_{\nu\beta}\right) \\ &= (w_{\mu\beta} \delta_{\alpha\nu} + w_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}) \end{aligned}$$

und damit für eine beliebige Funktion $f(W)$

$$X \frac{\partial}{\partial X'} f(W) = \sum_{\alpha \leqq \beta} \frac{\partial f(W)}{\partial w_{\alpha\beta}} X \frac{\partial}{\partial X'} w_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha\beta} \frac{\partial f(W)}{\partial w_{\alpha\beta}} (w_{\mu\beta}\,\delta_{\alpha\nu} + w_{\mu\alpha}\,\delta_{\nu\beta})$$

$$= 2\left(\sum_{\beta} w_{\mu\beta}\, e_{\nu\beta} \frac{\partial f(W)}{\partial w_{\nu\beta}}\right) = 2\, W \frac{\partial}{\partial W} f(W),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial W} = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\nu}}\right)$ und $e_{\mu\nu} = 1$ oder $\frac{1}{2}$ ist, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Das Resultat der Differentiation ist also in jedem Fall wieder eine Funktion von W, und wir können allgemein

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) f(W) = L\left(2\, W \frac{\partial}{\partial W}\right) f(W) \tag{32}$$

notieren.

Es seien $\omega_{\mu\nu}$ die Elemente der Matrix $W \frac{\partial}{\partial W}$. Eine einfache Rechnung ergibt dann

$$\omega_{\mu\nu}\, e^{-\pi\sigma(W)} = -\pi\, w_{\mu\nu}\, e^{-\pi\sigma(W)}$$

und damit auch

$$\omega_{\mu\nu} \{f(W)\, e^{-\pi\sigma(W)}\} = (-\pi\, w_{\mu\nu} f(W) + \omega_{\mu\nu} \{f(W)\})\, e^{-\pi\sigma(W)} .$$

Bezeichnet $f(W)$ ein Polynom vom Grad k, so ist $w_{\mu\nu} f(W)$ ein Polynom vom Grad $k + 1$, während der Grad des Polynoms $\omega_{\mu\nu}\{f(W)\}$ sicher nicht größer als k ist. Auf Grund der angegebenen Wirkung von $\omega_{\mu\nu}$ ist nun sofort einzusehen, daß für ein vorgegebenes Polynom $p(W)$ eine Beziehung der Art

$$p\left(-\frac{1}{\pi} W \frac{\partial}{\partial W}\right) e^{-\pi\sigma(W)} = (p(W) + q(W))\, e^{-\pi\sigma(W)}$$

gilt, wobei $q(W)$ ein Polynom ist, welches kleineren Grad hat als $p(W)$. Mit vollständiger Induktion nach dem Grad von $p(W)$ beweist man dann die Existenz eines linearen Operators $L_1\left(W \frac{\partial}{\partial W}\right)$ mit der Eigenschaft

$$L_1\left(W \frac{\partial}{\partial W}\right) e^{-\pi\sigma(W)} = p(W)\, e^{-\pi\sigma(W)} .$$

Damit sind wir am Ziel; denn wegen (32) ist

$$u(X)\, e^{-\pi\sigma(X'X)} = p(W)\, e^{-\pi\sigma(W)} = L_1\left(\frac{1}{2} X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} ,$$

so daß in (31) nur $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) = L_1\left(\frac{1}{2} X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ gewählt zu werden braucht.

Wir untersuchen noch die Vieldeutigkeit von $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ in Abhängigkeit von $u(X)$. Wegen der Linearität der Beziehung genügt es, den Fall $u(X) = 0$ zu diskutieren. Wir setzen also

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} = 0$$

voraus. $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ sei ein Differentialoperator vom Grad h; es handelt sich hierbei um den Grad in den Elementen von $\frac{\partial}{\partial X}$ allein. Auf Grund obiger Ausführungen ist

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(X'X)} = L\left(2\, W \frac{\partial}{\partial W}\right) e^{-\pi\sigma(W)}$$
$$= \{L(-2\pi W) + K(W)\}\, e^{-\pi\sigma(W)},$$

also

$$L(-2\pi W) + K(W) = 0 \qquad \text{für } W = X X'$$

mit einem Polynom $K(W)$, welches kleineren Grad hat als $L(W)$. Daher verschwindet auch der homogene Bestandteil h-ten Grades $L_h(W)$ von $L(W)$ für $W = X X'$:

$$L_h(W) = 0 \qquad \text{für } W = X X'.$$

Eine solche Relation ist bekanntlich eine Folgerelation der speziellen Determinanten- und Symmetrierelationen

$$|w_{\alpha_\mu \beta_\nu}| = 0\,, \quad w_{\mu\nu} - w_{\nu\mu} = 0 \quad \text{für } W = X X',$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ beliebige Systeme ganzer Zahlen im Intervall von 1 bis m sind. Das bedeutet folgendes: Betrachtet man die m^2 Elemente von W als unabhängige Variable, so liegt $L_h(W)$ in dem von den Polynomen $|w_{\alpha_\mu \beta_\nu}|$ und $w_{\mu\nu} - w_{\nu\mu}$ erzeugten Polynomideal. Das heißt, es lassen sich Polynome $f_{\alpha\beta}(W)$ und $g_{\mu\nu}(W)$ so bestimmen, daß

$$L_h(W) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}(W)\, |w_{\alpha_\mu \beta_\nu}| + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(W)\, (w_{\mu\nu} - w_{\nu\mu}) \tag{33}$$

eine Identität in W wird. Zur Abkürzung ist hier α und β für die Systeme $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ und $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})$ gesetzt worden. Für die zweite Summe kann mit $G(W) = (g_{\nu\mu}(W))$ auch $\sigma(G(W)\,(W - W'))$ geschrieben werden.

Sei $\mathfrak{M}_h$ der Modul der linearen Differentialoperatoren vom Grad $\leqq h$. Da der Restklassenbereich $\mathfrak{M}_h/\mathfrak{M}_{h-1}$ ein kommutativer Ring ist, so folgt bei der Spezialisierung $W = X \frac{\partial}{\partial X'}$ aus (33)

$$L_h\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \equiv \sigma\left(G\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \Lambda\right) \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{M}_{h-1})$$

mit $\Lambda = X \frac{\partial}{\partial X'} - \left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)'$; denn die Determinanten $|w_{\alpha_\mu \beta_\nu}|$ verschwinden nach der Substitution $W \to X \frac{\partial}{\partial X'}$ modulo $\mathfrak{M}_n$. Da $L_h\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ auch der homogene Bestandteil höchsten Grades in $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ ist, so folgt schließlich

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \equiv \sigma\left(G\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \Lambda\right) \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{M}_{h-1}).$$

Wie schon in [1] festgestellt wurde, führt Λ alle Funktioner r Art $f(X'X)$ in 0 über. Der Operator

$$L_1\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) = L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) - \sigma\left(G\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)\Lambda\right)$$

hat demnach folgende Eigenschaften: Er annulliert mit $L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$ die Funktion $e^{-\pi\sigma(X'X)}$ und ist von kleinerem Grad als $L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$. Vollständige Induktion nach dem Grad von $L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$ ergibt nun sofort eine Darstellung der Art

$$L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) = \sigma\left(H\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)\Lambda\right)$$

mit einer Matrix $H\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$, deren Elemente $h_{\mu\nu}\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$ lineare Differentialoperatoren sind. Damit ist auch gezeigt, daß

$$L_1\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)e^{-\pi\sigma(X'X)} = L_2\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)e^{-\pi\sigma(X'X)} \tag{34}$$

mit dem Bestehen einer Operatorenidentität der Art

$$L_1\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) - L_2\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) = \sigma\left(H\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)\Lambda\right) \tag{35}$$

gleichwertig ist.

Wir können nun auch die Frage beantworten, welche Eigenschaft dem Operator $L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$ zukommt, der dem Polynom $u(X)\in\mathfrak{P}$ gemäß (31) entspricht, falls

$$\sigma(\Lambda^{2h})\,u(X) = \lambda_h u(X) \tag{36}$$

ist. Man erhält sofort

$$\sigma(\Lambda^{2h})\,L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) - \lambda_h L\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right) = \sigma\left(H_h\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)\Lambda\right) \tag{37}$$

mit einer gewissen Matrix $H_h\left(X\frac{\partial}{\partial X'}\right)$.

§ 4. Verallgemeinerte Eulersche Integrale

Es sei $Y = (y_{\mu\nu})$ eine n-reihige symmetrische Matrix, $[dY]$ das Produkt der Differentiale $dy_{\mu\nu}(\mu \leqq \nu)$, X eine rechteckige Matrix vom Typus $X^{(m,n)}$ und Rang n und s eine komplexe Variable. $v(Y)$ bezeichne einen Größencharakter quadratischer Formen und $u(X)$ ein beliebiges Polynom in $\mathfrak{P}$. Schließlich sei auch wieder $Y = R'R$ mit $R = R^{(n)}$. Wir stellen uns die Aufgabe, die Integrale

$$J(s,X,u,v) = \int\limits_{Y>0} u(XR')\,e^{-\pi\sigma(XYX')}\,v(Y)\,|Y|^{s-\frac{n+1}{2}}\,[dY] \tag{38}$$

zu berechnen. Sie existieren für $\Re\, s > \frac{n-1}{2}$, wobei im allgemeinen, d. h. für $n > 2$, vorerst auch noch die Beschränktheit von $v(Y)$ vorauszusetzen ist.

Im Spezialfall $u(X) = 1$ ist nach [2]

$$J(s, X, 1, v) = \pi^{-ns+n(n-1)/4}\, \Gamma(s-\beta_1)\, \Gamma(s-\beta_2) \ldots \Gamma(s-\beta_n)\, \tilde{v}(X'X)\, |X'X|^{-s} \tag{39}$$

mit $\tilde{v}(Y) = v(Y^{-1})$ und gewissen komplexen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, die durch die Eigenwerte von $v(Y)$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Wir zeigen nun, daß die Integrale (38) aus (39) durch einen einfachen Differentiationsprozeß zu gewinnen sind. Zu gegebenem $u(X)$ bestimmen wir den Operator $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ gemäß (31). Substituieren wir hierin $X \to X R'$, so ergibt sich

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) e^{-\pi\sigma(XYX')} = u(XR')\, e^{-\pi\sigma(XYX')}$$

und damit sofort

$$L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) J(s, X, 1, v) = J(s, X, u, v)\,, \tag{40}$$

indem man die Operation $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ mit der Integration vertauscht. Daß dies zulässig ist, kann leicht eingesehen werden. Mit Hilfe von (39) folgt also

$$\begin{aligned} J(s, X, u, v) = \pi^{-ns+n(n-1)/4}\, \Gamma(s-\beta_1)\, \Gamma(s-\beta_2) \ldots \Gamma(s-\beta_n) \times \\ \times L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \{\tilde{v}(X'X)\, |X'X|^{-s}\}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

In zwei Sonderfällen führen wir die Berechnung bzw. eine Reduktion des Integrals (38) unmittelbar aus. Wenn $u(XV) = |V|^{2k} u(X)$ für $|V| \neq 0$ gilt, was für Kugelfunktionen $2nk$-ten Grades zutrifft, so hat man $u(XR') = u(X)\,|Y|^k$, also

$$J(s, X, u, v) = u(X)\, J(s+k, X, 1, v)$$

und damit auch

$$\begin{aligned} L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \{\tilde{v}(X'X)\, |X'X|^{-s}\} \\ = \pi^{-kn}\, q(s)\, q(s+1) \ldots q(s+k-1)\, u(X)\, |X'X|^{-k}\, \tilde{v}(X'X)\, |X'X|^{-s} \end{aligned} \tag{42}$$

mit

$$q(s) = (s-\beta_1)(s-\beta_2) \ldots (s-\beta_n)\,; \tag{43}$$

denn es ist

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(s+k-\beta_i)}{\Gamma(s-\beta_i)} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} (s+j-\beta_i)\,.$$

Der zweite Fall betrifft die Reduktion des Integrals

$$J(s, X, (\sigma(X'X))^h u(X), v)$$

auf den Fall $h = 0$, wobei $u(X)$ homogen vom Grad $2k$ vorausgesetzt werde. Wir bilden mit einer positiven Variablen

$$\begin{aligned} t^{-k} J(s, \sqrt{t}\, X, u, v) \\ = \int_{Y>0} u(XR')\, e^{-\pi t\sigma(XYX')}\, v(Y)\, |Y|^{s-\frac{n+1}{2}}\, [dY] \end{aligned}$$

und bekommen nach h-maliger Differentiation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^h t^{-k} J(s, \sqrt{t}\, X, u, v)$$
$$= (-\pi)^h \int_{Y>0} (\sigma(X\, Y\, X'))^h\, u(X\, R')\, e^{-\pi t \sigma(X Y X')}\, v(Y)\, |Y|^{s-\frac{n+1}{2}}\, [d\, Y]\,,$$

mithin

$$J(s, X, (\sigma\,(X' X))^h\, u(X), v) = (-\pi)^{-h} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^h t^{-k} J(s, \sqrt{t}\;X, u, v)\right]_{t=1}$$
$$= (-\pi)^{-h} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^h t^{-k-ns}\right]_{t=1} J(s, X, u, v)$$
$$= \pi^{-h}(ns+k)\,(ns+k+1)\ldots(ns+k+h-1)\, J(s, X, u, v)\,.$$

Stehen $L_1\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ und $(\sigma\,(X' X))^h u(X)$ in derselben Beziehung zu einander wie $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right)$ und $u(X)$, so besagt diese Identität

$$(44)\qquad \begin{aligned} &L_1\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \{\widetilde{v}\,(X' X)\,|X' X|^{-s}\} \\ &= \pi^{-h}(ns+k)\,(ns+k+1)\ldots(ns+k+h-1)\,\times \\ &\times L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \{\widetilde{v}\,(X' X)\,|X' X|^{-s}\}\,. \end{aligned}$$

Ist $u(X)$ Eigenfunktion des Operators $\sigma(\Lambda^{2h})$ zum Eigenwert λ_h, so trifft dies auch für $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) \{\widetilde{v}\,(X' X)\,|X' X|^{-s}\}$, ja sogar für $L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) f(X' X)$ zu, wobei $f(X' X)$ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Das ergibt sich sofort mit Hilfe von (37).

Für homogene $u(X)$ und beschränkte $v(Y)$ läßt sich $J(s, X, u, v)$ leicht abschätzen. Sei $u(X)$ homogen vom Grad $2\,k$ und etwa $|v(Y)| \leqq 1$. Dann gilt auch

$$|u(X)| \leqq M\,(\sigma(X' X))^k$$

mit einer positiven Konstanten M, also für reelle $s > \frac{n-1}{2}$

$$(45)\qquad \begin{aligned} &|J(s, X, u, v)| \leqq M\, J(s, X, (\sigma(X' X))^k, 1) \\ &= M\, \pi^{-k}\, ns(ns+1)\ldots(ns+k-1)\, J(s, X, 1, 1) \\ &= M\, \pi^{-k+n(n-1)/4-ns}\, |X' X|^{-s} \prod_{\mu=0}^{k-1} (ns+\mu) \prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma\left(s - \frac{\nu}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß im Falle $v = 1$ die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ mit $0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2}$ übereinstimmen.

§ 5. Verallgemeinerte Dirichletreihen

Wir zerlegen die Thetareihe (4) in

$$(46)\qquad \vartheta(Y, S; u) = \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r(Y, S; u)\,,$$

wobei

$$\vartheta_r(Y, S; u) = \sum_{\substack{G \\ \text{Rang } G = r}} u(Q\,G\,R')\, e^{-\pi\sigma(Y S[G])} \tag{47}$$

gesetzt ist, und bilden mit einem Größencharakter $v(Y)$ die Funktion

$$\eta(s, S; u, v) = \int_{\mathfrak{F}} \vartheta_n(Y, S; u)\, \tilde{v}(Y)\, |Y|^{s - \frac{n+1}{2}}\, [d\,Y]. \tag{48}$$

Die Integration ist auszuführen über einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ der Gruppe der unimodularen Transformationen $Y \to Y[U]$ im Raum der positiven Y. Da der Integrand gegenüber diesen Transformationen invariant ist, so hängt das Integral von der Auswahl von $\mathfrak{F}$ nicht ab. Wir können $\mathfrak{F}$ invariant bezüglich der Transformation $Y \to Y^{-1}$ voraussetzen. Die Existenz des Integrals ist gewährleistet, wenn $\Re s > m/2$ und $v(Y)$ im Falle $n > 2$ beschränkt ist. Das geht aus den folgenden Umformungen unschwer hervor. Eine vollständige Übersicht über die Größencharaktere und ihre Eigenschaften im Falle $n = 2$ ist in [3] gegeben worden.

In (47) werde die Reihenentwicklung für $\vartheta_n(Y, S; u)$ eingetragen. Gliedweise Integration ergibt

$$\eta(s, S; u, v) = \sum_{\substack{G \\ G'G > 0}} \int_{\mathfrak{F}} u(Q\,G\,R')\, e^{-\pi\sigma(Y S[G])}\, \tilde{v}(Y)\, |Y|^{s - \frac{n+1}{2}}\, [d\,Y]. \tag{49}$$

Wir ersetzen G durch $G\,U$, wobei U die Gruppe aller unimodularen Matrizen und G jetzt ein volles System ganzer, rechts nicht-assoziierter Matrizen vom Rang n durchläuft, was unter dem Summenzeichen durch $|G)$, $G'G > 0$ zum Ausdruck gebracht werde. Da U und $-U$ dieselbe Transformation im Y-Raum definieren, so ergibt die Vereinigung aller Bereiche $\mathfrak{F}\,[U']$ eine doppelte Pflasterung des Raumes aller positiven Y. Mithin wird, wie leicht zu sehen ist,

$$\begin{aligned} &\eta(s, S; u, v) \\ &\quad = 2 \sum_{\substack{|G) \\ G'G > 0}} \int_{Y > 0} u(Q\,G\,R')\, e^{-\pi\sigma(Y S[G])}\, \tilde{v}(Y)\, |Y|^{s - \frac{n+1}{2}}\, [d\,Y] \\ &\quad = 2 \sum_{\substack{|G) \\ G'G > 0}} J(s, Q\,G, u, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Die Anwendung von (41) mit $\tilde{v}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ an Stelle von v und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} &\eta(s, S; u, v) \\ &= 2\,\pi^{-ns + n(n-1)/4}\, \Gamma(s - \alpha_1)\, \Gamma(s - \alpha_2) \ldots \Gamma(s - \alpha_n)\, \varphi(s, S; u, v), \end{aligned} \tag{50}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi(s, S; u, v) &= \sum_{\substack{|G) \\ G'G > 0}} \left\{ L\left(X \frac{\partial}{\partial X'}\right) v(X'X)\, |X'X|^{-s} \right\}_{X = Q\,G} \\ &= \sum_{\substack{|G) \\ G'G > 0}} L\left(Q\,G \frac{\partial}{\partial G'}\, Q^{-1}\right) \{v(S\,[G])\, |S\,[G]|^{-s}\} \end{aligned} \tag{51}$$

ist. Es sei hier noch bemerkt, daß gemäß (42)

$$\varphi(s, S; u, v) = \pi^{-kn} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(s+k-\alpha_i)}{\Gamma(s-\alpha_i)} \varphi_0(s, S; u, v)$$

mit der durch (1) erklärten Reihe $\varphi_0(s, S; u, v)$ gilt, falls $u(XV) = |V|^{2k} u(X)$ für $|V| \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Das Problem der analytischen Fortsetzung und Funktionalgleichung für $\varphi(s, S; u, v)$ ist in folgender Weise in Angriff zu nehmen. Man zerlegt das Integral (48) durch $|Y| = 1$ in zwei Teilintegrale und substituiert in dem zu $|Y| < 1$ gehörigen Teilintegral $Y \to Y^{-1}$. Die Anwendung der mit (30) gleichwertigen Transformationsformel

$$\vartheta_n(Y^{-1}, S; u) = |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}} \vartheta_n(Y, S^{-1}; \tilde{u}) +$$
$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \{|S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}} \vartheta_r(Y, S^{-1}; \tilde{u}) - \vartheta_r(Y^{-1}, S; u)\}$$

führt dann auf

$$\begin{aligned}
&\eta(s, S; u, v) = \\
&\int\limits_{\substack{Y \in \mathfrak{F} \\ |Y| \geq 1}} \{|Y|^s \vartheta_n(Y, S; u)\, \tilde{v}(Y) + |S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}-s} \vartheta_n(Y, S^{-1}; \tilde{u})\, v(Y)\} \times \\
&\times |Y|^{-\frac{n+1}{2}} [dY] + \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} \int\limits_{\substack{Y \in \mathfrak{F} \\ |Y| \geq 1}} \{|S|^{-\frac{n}{2}} |Y|^{\frac{m}{2}} \vartheta_r(Y, S^{-1}; \tilde{u}) - \vartheta_r(Y^{-1}, S; u)\} \times \\
&\times v(Y)\, |Y|^{-s-\frac{n+1}{2}} [dY] .
\end{aligned} \tag{52}$$

Das weitere Interesse ist auf die Berechnung der zu $r < n$ gehörigen Integrale gerichtet. Auf Grund der im Falle $n = 2$ gemachten Erfahrungen ist zu vermuten, daß diese Integrale rationale Funktionen von s sind, welche dieselbe Invarianzeigenschaft haben wie das zu $r = n$ gehörige Integral.

Das zu $r = 0$ gehörige Integral läßt sich einfach berechnen, da $\vartheta_0(Y, S; u) = u(0)$ ist. Hierbei verwendet man zweckmäßig die Parameterdarstellung

$$Y = t\, Y_1,\ t > 0\,,\ |Y_1| = 1\,. \tag{53}$$

Sind ω und ω_1 die invarianten Volumenelemente des vollen Y-Raumes bzw. der Determinantenfläche $|Y| = 1$ bezüglich der Metrik $ds^2 = \frac{1}{2}\sigma(Y^{-1} dY)^2$, so gilt

$$\omega = 2^{-\frac{n}{2}} |Y|^{-\frac{n+1}{2}} [dY] = \sqrt{\frac{n}{2}}\, \frac{dt}{t}\, \omega_1\,. \tag{54}$$

Mit $c_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}$ ist also

$$|Y|^{-\frac{n+1}{2}} [dY] = c_n \frac{dt}{t}\, \omega_1. \tag{55}$$

$\mathfrak{F}_1$ bezeichne den Schnitt von $\mathfrak{F}$ mit der Determinantenfläche $|Y| = 1$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}(56)\qquad &\int\limits_{\substack{Y\in\mathfrak{F}\\ |Y|\geqq 1}} |S|^{-\frac{n}{2}}\, \vartheta_0\,(Y, S^{-1}; \tilde{u})\, |Y|^{\frac{m}{2}-s-\frac{n+1}{2}}\, [d\,Y] \\ &= c_n\, |S|^{-\frac{n}{2}}\, \tilde{u}\,(0) \int\limits_{\mathfrak{F}_1} v(Y_1)\, \omega_1 \int\limits_1^\infty t^{n\left(\frac{m}{2}-s\right)-1}\, dt \\ &= \frac{c_n\, \tilde{u}\,(0)}{n\left(s-\frac{m}{2}\right)}\, |S|^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathfrak{F}_1} v\,(Y_1)\, \omega_1,\end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned}(57)\qquad &\int\limits_{\substack{Y\in\mathfrak{F}\\ |Y|\geqq 1}} \vartheta_0(Y^{-1}, S; u)\, v(Y)\, |Y|^{-s-\frac{n+1}{2}}\, [d\,Y] \\ &= \frac{c_n\, u(0)}{n\,s} \int\limits_{\mathfrak{F}_1} v(Y_1)\, \omega_1\,.\end{aligned}$$

Die Zurückführung der allgemeinen Dirichletschen Reihen $\varphi(s, S; u, v)$ auf solche, die mit homogenem, harmonischen u gebildet sind, ist auf Grund der Zerlegung (11) sowie der Reduktionsformel (44) sofort möglich mit dem Ergebnis (12).

Schließlich soll noch eine Bemerkung hinsichtlich der Bildung gewisser Polynome gemacht werden, die auch schon im Falle $n = 2$ eine Rolle spielt. Da jetzt Matrizen verschiedener Spaltenzahlen auftreten, setzen wir der Deutlichkeit halber $X = X_n$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_n$ und $u = u_n$ für $u \in \mathfrak{P}_n$. Aus jedem Polynom $u_n \in \mathfrak{P}_n$ ist dann ein System von Polynomen $u_r \in \mathfrak{P}_r\,(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ auf folgende Weise zu gewinnen. Man stellt $u_n(X)$ als Polynom in den Elementen von $X\,X'$ dar: $u_n(X) = p(X\,X')$ und hat dann in $u_r(X_r) = p(X_r X_r')$ $(1 \leqq r < n)$ ein Polynom, welches in $\mathfrak{P}_r$ liegt und durch $u_n(X)$ eindeutig bestimmt ist. Letzteres folgt auf Grund der Tatsache, daß ein Polynom $q(W)$ bei der Spezialisierung $W \to X_r X_r'$ $(r < n)$ verschwindet, falls dies für $W \to X\,X'$ zutrifft.

§ 6. Funktionalgleichungen im Falle $n = 2$

Die Berechnung der Integrale in (52) für $r < n$ soll nun für den Fall $n = 2$ nach dem in [4] (s. auch [3]) entwickelten Verfahren ausgeführt werden. Dabei verwenden wir die spezielle Parameterdarstellung

$$(58)\qquad Y = t\,Y_1 = t\begin{pmatrix}(x^2+y^2)\,y^{-1} & x\,y^{-1}\\ x\,y^{-1} & y^{-1}\end{pmatrix},\quad t > 0,\quad y > 0\,.$$

Metrische Fundamentalform und invariantes Volumenelement des Y-Raumes werden durch

$$\begin{aligned}(59)\qquad ds^2 &= \tfrac{1}{2}\,\sigma(Y^{-1}d\,Y)^2 = t^{-2}\,dt^2 + y^{-2}(d\,x^2 + d\,y^2)\\ \omega &= \tfrac{1}{2}\,|Y|^{-\frac{3}{2}}\,[d\,Y] = t^{-1}\,dt\; y^{-2}\,d\,x\,d\,y = t^{-1}\,dt\;\omega_1\end{aligned}$$

gegeben. Einen brauchbaren Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ hat man, wenn $\tau = x + i\,y$ gesetzt wird, in

(60) $$\mathfrak{F} = \{(t, \tau) : 0 \leqq 2\,x \leqq 1\,,\ x^2 + y^2 \geqq 1\,,\ t > 0\,,\ y > 0\}\,.$$

Demgemäß ist

(61) $$\mathfrak{F}_1 = \{\tau : 0 \leqq 2\,x \leqq 1\,,\ x^2 + y^2 \geqq 1\,,\ y > 0\}\,.$$

Bekanntlich ist

(62) $$\int_{\mathfrak{F}_1} \omega_1 = \frac{\pi}{6}\,.$$

Die Größencharaktere $v(Y)$ sind als eindeutige Funktionen der komplexen Variablen $\tau = x + i\,y$ darzustellen — im folgenden wird direkt $v(Y) = v(\tau)$ geschrieben — und gestatten eine Fourierentwicklung der Art

(63) $$v(\tau) = a\,y^{\frac{1}{2} + ir} + b\,y^{\frac{1}{2} - ir} + \sum_{n \neq 0} c_n\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}(2\,\pi\,|n|\,y)\, e^{2\pi i n x}\,.$$

Wie in [3] näher ausgeführt wurde, sind die folgenden Fälle in Betracht zu ziehen:

1. $v(\tau) = 1$. Dann ist etwa $i\,r = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$.

2. $v(\tau) =$ automorphe Eigenfunktion des Operators $y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)$ zur Modulgruppe und zu positivem Eigenwert, welche überdies bezüglich der Transformation $x \to -x$ invariant ist. Hier ist r reell und $a = b = 0$.

3. $v(\tau) = E(\tau, 1 + 2\,i\,r)$ mit reellem r. Das ist die durch analytische Fortsetzung der Eisensteinreihe

(64) $$E(\tau, s) = \sum_{(c,d)=1}{}' \, y^{\frac{s}{2}}\, |c\,\tau + d|^{-s} \quad (\Re s > 2)$$

gewonnene Funktion. In diesem Fall ist

(65) $$a = 2,\ b = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(ir)\,\zeta(2\,i\,r)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\,r)\,\zeta(1 + 2\,i\,r)}\,,$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß r entweder reell oder gleich $\pm\frac{i}{2}$ ist und

(66) $$v(\tau) = O\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$$

für $y \to \infty$, gleichmäßig in x gilt.

Da der Integralmittelwert von $v(\tau)$ über $\mathfrak{F}_1$, gebildet mit dem invarianten Flächenelement ω_1, im 2. und 3. Fall nach [3] verschwindet, so erhält man für die Differenz der Integrale (56) und (57) den Ausdruck

(67) $$-\frac{\pi}{6}\,\delta(v)\left(\frac{u(0)}{s} + \frac{\bar{u}(0)}{\frac{m}{2} - s}\,|S|^{-1}\right),$$

wobei $\delta(v) = 1$ oder 0 ist, je nachdem v konstant oder nicht konstant ist. Das also ist der Beitrag für $r = 0$ zur rechten Seite von (52) im Falle $n = 2$.

Es verbleibt die Berechnung des zu $r = 1$ gehörigen Integrals in (52). Zunächst sind die ganzen Matrizen G vom Rang 1 geeignet darzustellen. Man erhält alle Matrizen dieser Art, und zwar jede genau zweimal in der Gestalt

$$G = \mathfrak{g}(c, d)\,, \tag{68}$$

wenn $\mathfrak{g}$ alle ganzen Spalten $\neq 0$ vom Typus $\mathfrak{g}^{(m,1)}$ und c, d alle Paare teilerfremder ganzer Zahlen durchläuft.

Im folgenden sei nun $u(X)$ eine fest gewählte harmonische Form in $\mathfrak{P}$ vom Grad $2\,k$. Nach (17) ist dann

$$\widetilde{u}(X) = (-1)^k u(X)\,. \tag{69}$$

Da $u(X)$ als homogenes Polynom in den Elementen von $X\,X'$ darstellbar ist: $u(X) = p(X\,X')$, so kann jetzt

$$\begin{aligned} u(Q\,G\,R') &= p(Q\,G\,Y\,G'\,Q') = p\left(Q\,\mathfrak{g}\left(Y\begin{bmatrix} c \\ d\end{bmatrix}\right)\mathfrak{g}'\,Q'\right) \\ &= \left(Y\begin{bmatrix} c \\ d\end{bmatrix}\right)^k p(Q\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'\,Q') = t^k \frac{|c\,\tau + d|^{2k}}{y^k}\,u_1(Q\,\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

geschlossen werden, wobei, wie am Ende von § 5 ausgeführt wurde, $u_1(\mathfrak{x})$ durch $u(X)$ eindeutig bestimmt ist. Ferner ist

$$\sigma(Y\,S\,[G]) = Y\begin{bmatrix} c \\ d\end{bmatrix}\cdot S\,[\mathfrak{g}] = t\,\frac{|c\,\tau + d|^2}{y}\,S\,[\mathfrak{g}]\,.$$

Wird also $\vartheta_1^*\,(y, S; u_1)$ durch

$$\vartheta_1^*\,(y, S; u_1) = \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}\sqrt{y}\,)\,e^{-\pi y S[\mathfrak{g}]} \tag{70}$$

eingeführt, so stellt sich $\vartheta_1(Y, S; u)$ in der Form

$$\begin{aligned} \vartheta_1(Y, S; u) &= \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}\left(\frac{t}{y}\right)^k |c\,\tau + d|^{2k} u_1(Q\,\mathfrak{g})\,e^{-\pi\frac{t}{y}|c\tau+d|^2 S[\mathfrak{g}]} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}|c\,\tau + d|^2, S; u_1\right)\right) \end{aligned} \tag{71}$$

dar.

Eine genauere Kenntnis ist im folgenden von der Mellintransformierten

$$\eta^*(s, S; u_1) = \int_0^\infty \vartheta_1^*\,(y, S; u_1)\,y^{s-1}\,d\,y \tag{72}$$

erforderlich. Da die Thetareihe

$$\vartheta^*\,(y, S; u_1) = u_1(0) + \vartheta_1^*\,(y, S; u_1) \tag{73}$$

der Transformationsformel (30) mit $n = 1$ genügt, was hier

$$\vartheta^*\left(\frac{1}{y}, S; u_1\right) = |S|^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{m}{2}}\,\vartheta^*\,(y, S^{-1}, \widetilde{u}_1) \tag{74}$$

besagt, so folgt in geläufiger Weise einerseits

$$\begin{aligned} \eta^*\,(s, S; u_1) = \int_1^\infty &\left\{\vartheta_1^*(y, S; u_1)\,y^s + |S|^{-\frac{1}{2}}\,\vartheta_1^*(y, S^{-1}; \widetilde{u}_1)\,y^{\frac{m}{2}-s}\right\}\frac{d\,y}{y} - \\ &- \frac{u_1(0)}{s} - \frac{\widetilde{u}_1(0)}{\frac{m}{2}-s}\,|S|^{-\frac{1}{2}}\,, \end{aligned} \tag{75}$$

andererseits durch gliedweise Integration

$$\eta^*(s, S; u_1) = \pi^{-s-k}\Gamma(s+k)\,\varphi^*(s, S; u_1) \tag{76}$$

mit

$$\varphi^*(s, S; u_1) = \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g})\,(S[\mathfrak{g}])^{-s-k}, \tag{77}$$

woraus erhellt, daß $\varphi^*(s, S; u_1)$ eine meromorphe Funktion ist, die der Funktionalgleichung

$$\eta^*\left(\frac{m}{2} - s, S; u_1\right) = |S|^{-\frac{1}{2}}\,\eta^*(s, S; \tilde{u}_1) \tag{78}$$

genügt. Es muß jedoch beachtet werden, daß $\tilde{u}_1$ im allgemeinen nicht mehr homogen ist, so daß $\varphi^*(s, S; \tilde{u}_1)$ nicht mehr die einfache Bauart (77) hat. Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen, da die Funktion $\varphi^*(s, S; \tilde{u}_1)$ in unseren Entwicklungen nicht mehr auftritt.

Zur Abkürzung werde das zu $r = 1$ gehörige Integral mit J bezeichnet. Wir wählen für $\mathfrak{F}$ den Bereich (60) und approximieren den Integrationsbereich von J durch das direkte Produkt des Intervalls $1 \leqq t \leqq p$ mit dem Bereich

$$\mathfrak{B}'_q = \{\tau : 0 \leqq 2\,x \leqq 1\ ,\ x^2 + y^2 \geqq 1\ ,\ 0 < y \leqq q\}\,,$$

so daß J als Grenzwert in der Form

$$J = \lim_{p,\,q \to \infty} (J_1(p, q) - J_2(p, q)) \tag{79}$$

mit

$$J_1(p, q) = 2(-1)^k\,|S|^{-1} \int_1^p \int_{\mathfrak{B}'_q} \vartheta_1(Y, S^{-1}; u)\,v(\tau)\,t^{m-2s-1}\,dt\,\omega_1 \tag{80}$$

und

$$J_2(p, q) = 2 \int_1^p \int_{\mathfrak{B}'_q} \vartheta_1(Y^{-1}, S; u)\,v(\tau)\,t^{-2s-1}\,dt\,\omega_1 \tag{81}$$

darstellbar ist.

Wir formen zunächst (80) um. Da der Integrand eine gerade Funktion von x ist, so ist offenbar

$$J_1(p, q) = (-1)^k\,|S|^{-1} \int_1^p \int_{\mathfrak{B}_q} \vartheta_1(t\,Y_1, S^{-1}; u)\,v(\tau)\,t^{m-2s-1}\,dt\,\omega_1,$$

wobei $\mathfrak{B}_q$ sich aus $\mathfrak{B}'_q$ und dem an der y-Achse gespiegelten Bereich zusammensetzt:

$$\mathfrak{B}_q = \{\tau : |2\,x| \leqq 1\ ,\ x^2 + y^2 \geqq 1\ ,\ 0 < y \leqq q\}\,. \tag{82}$$

Mit Hilfe von (71) erhalten wir

$$J_1(p, q)$$
$$= \frac{(-1)^k}{2}\,|S|^{-1} \sum_{(c,d)=1} \int_1^p \int_{\mathfrak{B}_q} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}\,|c\,\tau + d|^2, S^{-1}; u_1\right) v(\tau)\,t^{m-2s-1}\,dt\,\omega_1\,.$$

Zu jedem Paar c, d gibt es eine eindeutig bestimmte Modulsubstitution $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, welche $\mathfrak{B}_q$ in den Streifen $|2x| \leqq 1$ abbildet. Sei

$$\mathfrak{S}_q = \sum_U U(\mathfrak{B}_q),$$

wobei U ein volles System von Modulsubstitutionen der angegebenen Art mit nicht-assoziierten zweiten Zeilen durchlaufe. Es wird dann

$$(83) \qquad J_1(p, q) = (-1)^k |S|^{-1} \int_1^p \int_{\mathfrak{S}_q} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}, S^{-1}; u_1\right) v(\tau)\, t^{m-2s-1}\, dt\, \omega_1 .$$

In gleicher Weise wird (81) behandelt. Hier beachte man zunächst die Invarianz der im Integranden auftretenden Thetareihe bezüglich der Transformation $Y \to Y\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, deren Wirkung auch durch $t \to t$, $Y_1 \to Y_1^{-1}$ beschrieben wird, so daß Y^{-1} in (81) durch $\frac{1}{t} Y_1$ ersetzt werden kann. Die Substitution $t \to \frac{1}{t}$ liefert dann

$$\begin{aligned} J_2(p, q) &= \int_1^p \int_{\mathfrak{B}_q} \vartheta_1(Y^{-1}, S; u)\, v(\tau)\, t^{-2s-1}\, dt\, \omega_1 \\ &= \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\mathfrak{B}_q} \vartheta_1(Y, S; u)\, v(\tau)\, t^{2s-1}\, dt\, \omega_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\mathfrak{B}_q} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y} |c\tau + d|^2, S; u_1\right) v(\tau)\, t^{2s-1}\, dt\, \omega_1 , \end{aligned}$$

also

$$(84) \qquad J_2(p, q) = \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\mathfrak{S}_q} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}, S; u_1\right) v(\tau)\, t^{2s-1}\, dt\, \omega_1 .$$

Die Integration in (83) bzw. (84) soll zunächst über das direkte Produkt von $\{t : 1 \leqq t \leqq p\}$ bzw. $\left\{t : \frac{1}{p} \leqq t \leqq 1\right\}$ mit $\left\{\tau : |2x| \leqq 1, \frac{1}{q} \leqq y \leqq q\right\}$ erstreckt werden, wobei zu beachten ist, daß der letztgenannte Bereich in $\mathfrak{S}_q$ liegt. Da x nur in $v(\tau)$ vorkommt, ist die Integration über x jetzt unmittelbar auszuführen. Es erscheinen dabei die von y unabhängigen Terme der Fourierentwicklung (63). In dem restlichen Integrationsbereich gilt für $v(\tau)$ zufolge (66) eine Abschätzung der Art

$$|v(\tau)| \leqq \alpha_1 q^{\frac{1}{2}}$$

mit einer gewissen Konstanten α_1, während für $\vartheta_1^*(y, S^{\pm 1}; u_1)$ auf Grund von (74) eine Abschätzung der Art

$$|\vartheta_1^*(y, S^{\pm 1}; u_1)| \leqq \alpha_2\, y^{-\frac{m}{2}} e^{-\varepsilon y} \qquad \text{für } y > 0$$

mit gewissen positiven Konstanten α_2 und ε zu finden ist. Seien $R_1(p, q)$ und $R_2(p, q)$ die Beiträge zu (83) und (84), die von der Integration über den Restbereich herrühren. Sie lassen sich mit $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{Max}(|S|^{-1}, 1)$ unter der Voraussetzung $\Re\, s = \sigma > \frac{m}{4}$, die $t^{2\sigma} > t^{m-2\sigma}$ für $t > 1$ nach sich zieht, in folgender Weise abschätzen:

$$|R_1(p, q)| + |R_2(p, q)| \leqq \alpha_3 q^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{q}} e^{-\varepsilon \frac{t}{y}} \left(\frac{y}{t}\right)^{\frac{m}{2}} t^{2\sigma - 1} y^{-2}\, dy\, dt$$

$$= \alpha_3 q^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \int_q^\infty e^{-\varepsilon t y}\, y^{-\frac{m}{2}}\, t^{2\sigma - \frac{m}{2} - 1}\, dy\, dt = \alpha_3\, \varepsilon^{\frac{m}{2} - 2\sigma}\, \Gamma\!\left(2\sigma - \frac{m}{2}\right) q^{\frac{1}{2}} \int_q^\infty y^{-2\sigma} dy$$

$$= \frac{\alpha_3}{2\sigma - 1}\, \varepsilon^{\frac{m}{2} - 2\sigma}\, \Gamma\!\left(2\sigma - \frac{m}{2}\right) q^{\frac{3}{2} - 2\sigma} = o(1)$$

für $q \to \infty$, gleichmäßig in p.

Mit

$$J(p,q) = (-1)^k |S|^{-1} \int_1^p \int_{\frac{1}{q}}^q \vartheta_1^*\!\left(\frac{t}{y}, S^{-1}; u_1\right) \left(a\, y^{-\frac{3}{2} + ir} + b\, y^{-\frac{3}{2} - ir}\right) \times$$

$$\times\, t^{m-2s-1}\, dt\, dy \,-$$

(85)

$$- \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\frac{1}{q}}^q \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}, S; u_1\right) \left(a\, y^{-\frac{3}{2} + ir} + b\, y^{-\frac{3}{2} - ir}\right) t^{2s-1}\, dt\, dy$$

gilt also, falls $\Re\, s$ hinreichend groß ist,

$$J = \lim_{p, q \to \infty} (J_1(p, q) - J_2(p, q)) = \lim_{p, q \to \infty} J(p, q)\,. \tag{86}$$

Wir spalten $J(p, q)$ auf in

$$J(p,q) = a\, J(p,q; r) + b\, J(p, q; -r)\,, \tag{87}$$

wobei

$$J(p, q; r) = (-1)^k |S|^{-1} \int_1^p \int_{\frac{1}{q}}^q \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}, S^{-1}; u_1\right) y^{-\frac{3}{2} + ir}\, t^{m-2s-1}\, dt\, dy \,-$$

$$- \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\frac{1}{q}}^q \vartheta_1^*\!\left(\frac{t}{y}, S; u_1\right) y^{-\frac{3}{2} + ir}\, t^{2s-1}\, dt\, dy$$

(88)

$$= (-1)^k |S|^{-1} \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q^{-1}\mathfrak{g}) \int_1^p \int_{\frac{1}{q}}^q e^{-\pi \frac{t}{y} S^{-1}[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2} + ir}\, t^{m+k-2s-1}\, dy\, dt$$

$$- \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{p}}^1 \int_{\frac{1}{q}}^q e^{-\pi \frac{t}{y} S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2} + ir}\, t^{k+2s-1}\, dy\, dt$$

gesetzt ist. Partielle Integration ergibt

$$
\begin{aligned}
&J(p,q;r)\\
&= (-1)^k |S|^{-1} \sum_{\mathfrak{g}\neq 0}' u_1(Q^{-1}\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} y^{-k-\frac{3}{2}+ir} \left\{ \left[e^{-\pi\frac{t}{y}S^{-1}[\mathfrak{g}]} \frac{t^{m+k-2s}}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} \right]_{t=1}^{t=p} - \right.\\
&\qquad \left. - \int_1^p \left(k+\frac{1}{2}-ir-\frac{\pi t S^{-1}[\mathfrak{g}]}{y}\right) e^{-\pi\frac{t}{y}S^{-1}[\mathfrak{g}]} \frac{t^{m+k-2s-1}}{m-2s-\frac{1}{2}+ir}\, dt \right\} dy -\\
&\qquad - \sum_{\mathfrak{g}\neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} y^{-k-\frac{3}{2}+ir} \left\{ \left[e^{-\pi\frac{t}{y}S[\mathfrak{g}]} \frac{t^{k+2s}}{2s-\frac{1}{2}+ir} \right]_{t=\frac{1}{p}}^{t=1} - \right.\\
&\qquad \left. - \int_{\frac{1}{p}}^{1} \left(k+\frac{1}{2}-ir-\frac{\pi t S[\mathfrak{g}]}{y}\right) e^{-\pi\frac{t}{y}S[\mathfrak{g}]} \frac{t^{k+2s-1}}{2s-\frac{1}{2}+ir}\, dt \right\} dy\,.
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Die zu $t=p$ und $\frac{1}{p}$ gehörigen Bestandteile streben bei festem q für $p\to\infty$ nach 0, fallt $\Re\, s=\sigma$ wieder hinreichend groß ist. Zum Beweis schätzen wir

$$
\begin{aligned}
\Omega(t,S) &= \sum_{\mathfrak{g}\neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\pi\frac{t}{y}S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy\\
&= \int_{\frac{1}{q}}^{q} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{y}, S; u_1\right) y^{-\frac{3}{2}+ir}\, dy\, t^{-k}
\end{aligned}
$$

mit $\Re\, i\,r=\frac{\delta}{2}$ ($\delta=0$ oder ± 1) wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
|\Omega(t,S)| &\leqq \alpha_2 \int_{\frac{1}{q}}^{q} \left(\frac{y}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\varepsilon\frac{t}{y}}\, y^{\frac{\delta-3}{2}}\, dy\, t^{-k}\\
&= \alpha_2 \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\varepsilon y t}\, y^{-\frac{m+\delta+1}{2}}\, dy\, t^{-\frac{m}{2}-k}\\
&= \alpha_2 \int_{\frac{t}{q}}^{qt} e^{-\varepsilon y}\, y^{-\frac{m+\delta+1}{2}}\, dy\, t^{-k+\frac{\delta-1}{2}}\\
&\leqq \alpha_2 \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{m+\delta+1}{2}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon y}\, dy\, t^{-k+\frac{\delta-1}{2}}\\
&= \frac{\alpha_2}{\varepsilon}\, q^{\frac{m+\delta+1}{2}}\, t^{-\frac{m}{2}-k-1}\,.
\end{aligned}
$$

Der fragliche Beitrag

$$(-1)^k\,|S|^{-1}\,\Omega\,(p,\,S^{-1})\,\frac{p^{m+k-2s}}{m-2s-\frac{1}{2}+ir}+\Omega\left(\frac{1}{p}\,,\,S\right)\frac{p^{-k-2s}}{2s-\frac{1}{2}+ir}$$

konvergiert also bei festem q für $p\to\infty$ gegen 0, sofern $\sigma>\frac{m}{4}+\frac{1}{2}$ ist. Schließlich kann in den Doppelintegralen in (89) die Integration nach y ausgeführt werden; denn es ist

$$-\left(k+\frac{1}{2}-i\,r-\frac{\pi\,t\,S^{\pm 1}[\mathfrak{g}]}{y}\right)e^{-\pi\frac{t}{y}S^{\pm 1}[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{3}{2}+ir}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\,e^{-\pi\frac{t}{y}S^{\pm 1}[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{1}{2}+ir}\,.$$

Man erhält

$$\lim_{p\to\infty} J\,(p,q;\,r)$$
$$=(-1)^{k+1}\,|S|^{-1}\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}u_1(Q^{-1}\mathfrak{g})\int\limits_{\frac{1}{q}}^{q}e^{-\frac{\pi}{y}S^{-1}[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\,d\,y\,\frac{1}{m-2s-\frac{1}{2}+ir}-$$
$$-\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}u_1(Q\,\mathfrak{g})\int\limits_{\frac{1}{q}}^{q}e^{-\frac{\pi}{y}S[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\,d\,y\,\frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir}+$$
$$+(-1)^k|S|^{-1}\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}u_1(Q^{-1}\,\mathfrak{g})\int\limits_{1}^{\infty}\left[e^{-\pi\frac{t}{y}S^{-1}[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{1}{2}+ir}\right]_{y=\frac{1}{q}}^{y=q}\frac{t^{m+k-2s-1}\,d\,t}{m-2s-\frac{1}{2}+ir}-$$
$$-\sum_{\mathfrak{g}\neq 0}u_1(Q\,\mathfrak{g})\int\limits_{0}^{1}\left[e^{-\pi\frac{t}{y}S[\mathfrak{g}]}\,y^{-k-\frac{1}{2}+ir}\right]_{y=\frac{1}{q}}^{y=q}\frac{t^{k+2s-1}\,d\,t}{2s-\frac{1}{2}+ir}\,.$$

Der Beitrag der zu $y=\frac{1}{q}$ gehörigen Glieder strebt für $q\to\infty$ gegen 0, sofern $\Re s$ wieder hinreichend groß gewählt wird. Das ist ohne weiteres klar für den Beitrag, der von der dritten Summe herrührt. Bezüglich des Beitrages von der vierten Summe beachte man, daß

$$\int\limits_{0}^{1}\vartheta_1^*(q\,t,\,S;\,u_1)\,t^{2s-1}\,dt\,\frac{q^{\frac{1}{2}-ir}}{2s-\frac{1}{2}+ir}$$
$$=\int\limits_{0}^{q}\vartheta_1^*(t,\,S;\,u_1)\,t^{2s-1}\,dt\,\frac{q^{\frac{1}{2}-2s-ir}}{2s-\frac{1}{2}+ir}$$

unter der Voraussetzung $\Re\, s > \frac{m}{4}$ existiert und für $q \to \infty$ gegen 0 konvergiert, da das letzte Integral für $q \to \infty$ einen Grenzwert hat. Wir erhalten somit

$$\lim_{p, q \to \infty} J(p, q; r) = \lim_{q \to \infty} J^*(q, r)\,, \tag{90}$$

wobei

$$\begin{aligned} J^*(q, r) & \\ & (-1)^{k+1}\,|S|^{-1} \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q^{-1}\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S^{-1}[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \\ & - \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir} \\ & + (-1)^k\,|S|^{-1}\, q^{-\frac{1}{2}+ir} \int_1^\infty \vartheta_1^*\left(\frac{t}{q}, S^{-1}; u_1\right) t^{m-2s-1}\, dt \frac{1}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \\ & - q^{-\frac{1}{2}+ir} \int_1^\infty \vartheta_1^*\left(\frac{t}{q}, S; u_1\right) t^{2s-1}\, dt \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir} \end{aligned}$$

ist. Hier wird

$$\begin{aligned} \vartheta_1^*\left(\frac{t}{q}, S^{\pm 1}; u_1\right) = |S|^{\mp\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_1^*\left(\frac{q}{t}, S^{\mp 1}; \tilde{u}_1\right) + \\ + |S|^{\mp\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{m}{2}} \tilde{u}_1(0) - u_1(0) \end{aligned}$$

eingetragen. Nach Ausführung einiger elementarer Integrationen ergibt sich

$$\begin{aligned} J^*(q, r) & \\ = {} & (-1)^{k+1}\,|S|^{-1} \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q^{-1}\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S^{-1}[\mathfrak{g}]}\, y^{-k+\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \\ & - \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir} + \\ & + (-1)^k\,|S|^{-\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{m-1}{2}+ir}}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} \int_1^\infty \vartheta_1^*\left(\frac{q}{t}, S; \tilde{u}_1\right) t^{\frac{m}{2}-2s-1}\, dt - \end{aligned}$$

$$- |S|^{-\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{m-1}{2}+ir}}{2s-\frac{1}{2}+ir} \int_0^1 \vartheta_1^*\left(\frac{q}{t}, S^{-1}; \tilde{u}_1\right) t^{-\frac{m}{2}+2s-1}\, dt +$$

$$+ |S|^{-\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{m-1}{2}+ir}\, \tilde{u}_1(0)}{2s-\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^k}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir}\right) +$$

$$+ \frac{q^{-\frac{1}{2}+ir}\, u_1(0)}{\left(2s-\frac{1}{2}+ir\right)2s} + (-1)^k |S|^{-1} \frac{q^{-\frac{1}{2}+ir}\, u_1(0)}{\left(m-2s-\frac{1}{2}+ir\right)\left(m-2s\right)}\,.$$

Die Integrale über die Thetareihen in dieser Entwicklung streben ersichtlich gegen 0 für $q \to \infty$, falls $\Re e\, s$ hinreichend groß ist. Ebenso gilt $q^{-\frac{1}{2}+ir} \to 0$, wenn $i\,r \neq \frac{1}{2}$ ist. Diese Einschränkung ist unerheblich. Wenn nämlich $i\,r = \frac{1}{2}$ ist, so verschwindet der Eigenwert von $v(\tau)$ mithin ist $v\,(\tau) = 1$, in der Entwicklung (63) also $a = 0$, $b = 1$. Das heißt, es tritt $J^*(q, -r)$, nicht aber $J^*(q,r)$ bei der Berechnung von J auf. Damit ist

$$\lim_{q\to\infty} J^*(q, r) = \lim_{q\to\infty} J_1(q, r) \qquad \left((i\,r \neq \frac{1}{2}\right) \tag{91}$$

mit

$$J_1(q, r)$$

$$= (-1)^{k+1} |S|^{-1} \sum_{\mathfrak{g}\neq 0} u_1(Q^{-1}\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S^{-1}[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} -$$

$$- \sum_{\mathfrak{g}\neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir}$$

$$+ \frac{|S|^{-\frac{1}{2}}\, q^{\frac{m-1}{2}+ir}\, \tilde{u}_1(0)}{2s-\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^k}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir}\right)$$

für hinreichend große Werte von $\Re e\, s$ gezeigt. Wir nehmen jetzt noch eine

Umformung der unendlichen Reihen vor:

$$\Omega(1, S) = \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\frac{\pi}{y} S[\mathfrak{g}]}\, y^{-k-\frac{3}{2}+ir}\, dy$$

$$= \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-\pi y S[\mathfrak{g}]}\, y^{k-\frac{1}{2}-ir}\, dy$$

$$= \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \int_{\frac{1}{q}}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s)\,(\pi\, y\, S[\mathfrak{g}])^{-s}\, ds\, y^{k-\frac{1}{2}-ir}\, dy$$

$$= \sum_{\mathfrak{g} \neq 0} u_1(Q\,\mathfrak{g}) \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho - i\infty}^{\varrho + i\infty} \Gamma(s)\,(\pi\, S[\mathfrak{g}])^{-s} \left(q^{s-k-\frac{1}{2}+ir} - q^{-s+k+\frac{1}{2}-ir}\right) \times$$
$$\times \frac{ds}{s-k-\frac{1}{2}+ir}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \eta^*(s-k, S; u_1) \left(q^{s-k-\frac{1}{2}+ir} - q^{-s+k+\frac{1}{2}-ir}\right) \frac{ds}{s-k-\frac{1}{2}+ir}.$$

Dabei ist $\eta^*(s, S; u_1)$ die durch (76) erklärte Funktion. Die Integration ist über eine hinreichend weit rechts vom Nullpunkt gelegene Vertikale auszuführen. Wir verschieben die Integrationsgerade parallel nach links bis zu einer Abszisse $\sigma_0 < k + \frac{1}{2} - \Re e\, i\, r$. Die auftretenden Residuen können, so weit sie von den Polen von $\eta^*(s, S; u_1)$ herrühren, der Darstellung (75) entnommen werden. Auf diese Weise erhält man

$$\Omega(1, S) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \eta^*(s-k, S; u_1)\, q^{s-k-\frac{1}{2}+ir} \frac{ds}{s-k-\frac{1}{2}+ir} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \eta^*(s-k, S; u_1)\, q^{-s+k+\frac{1}{2}-ir} \frac{ds}{s-k-\frac{1}{2}+ir} +$$
$$+ \frac{u_1(0)\, q^{-\frac{1}{2}+ir}}{\frac{1}{2}-ir} + \frac{|S|^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{u}_1(0)\, q^{\frac{m-1}{2}+ir}}{\frac{m-1}{2}+ir} +$$
$$+ \eta^*\left(\frac{1}{2} - i\, r, S; u_1\right) \qquad \text{für } i\, r \neq \frac{1}{2}.$$

Die Integrale und das nächstfolgende Glied konvergieren ersichtlich gegen 0 für $q \to \infty$ Ein analoges Resultat erhält man für S^{-1} an Stelle von S. Damit ergibt sich schließlich

$$
\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} J_1(q, r) \\
&= -\frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S; u_1\right)}{2s-\frac{1}{2}+ir} - (-1)^k |S|^{-1} \frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S^{-1}; u_1\right)}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} + \\
&+ \lim_{q\to\infty} |S|^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_1(0)\, q^{\frac{m-1}{2}+ir} \left[\frac{1}{2s-\frac{m}{2}}\left(\frac{(-1)^k}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} - \frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir}\right) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{\frac{m-1}{2}+ir}\left(\frac{1}{2s-\frac{1}{2}+ir} + \frac{(-1)^k}{m-2s-\frac{1}{2}+ir}\right)\right] \qquad \text{für } ir \neq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{92}
$$

Man stellt leicht fest, daß die hier auftretende eckige Klammer

$$[\ ] = \frac{(-1)^k - 1}{\left(\frac{m-1}{2}+ir\right)\left(2s-\frac{m}{2}\right)} \tag{93}$$

ist. Auf Grund von (52) ist (im Falle $n = 2$) klar, daß J existiert. Wählt man nun $v = 1$ und demgemäß in (63) $ir = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$, so folgt nach (86), (87), (90), (91), daß auch $\lim\limits_{q\to\infty} J_1\left(q, \frac{i}{2}\right)$ existiert. Das ist aber, wie (92) mit (93) zeigt, dann und nur dann der Fall, wenn

$$\tilde{u}_1(0)\,((-1)^k - 1) = 0 \tag{94}$$

ist. Wir werden uns am Schluß auch noch durch Rechnung davon überzeugen, daß diese Bedingung erfüllt ist. Jedenfalls folgt nun allgemein

$$
\begin{aligned}
&\lim_{p,q\to\infty} J(p, q; r) = \lim_{q\to\infty} J_1(q, r) \\
&= -\frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S; u_1\right)}{2s-\frac{1}{2}+ir} - (-1)^k |S|^{-1}\, , \frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S^{-1}; u_1\right)}{m-2s-\frac{1}{2}+ir},
\end{aligned} \tag{95}
$$

falls $ir \neq \frac{1}{2}$ und $\Re s$ hinreichend groß ist. Für

$$J = \lim_{p,q\to\infty} \left(a\, J(p, q; r) + b\, J(p, q; -r)\right)$$

erhält man daher entsprechend den drei Möglichkeiten, die zu Beginn des Paragraphen für v in Betracht gezogen wurden, folgende Werte:

1. $v(\tau) = 1$.

$$J = -\frac{\eta^*(1, S; u_1)}{2s-1} - (-1)^k |S|^{-1} \frac{\eta^*(1, S^{-1}; u_1)}{m-2s-1}$$

2. $v(\tau) =$ Eigenfunktion zu positivem Eigenwert.

$$J = 0$$

3. $v(\tau) = E(\tau, 1+2ir)$, r reell.

$$J = -\frac{2\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S; u_1\right)}{2s-\frac{1}{2}+ir} - (-1)^k\,|S|^{-1}\frac{2\eta^*\left(\frac{1}{2}-ir, S^{-1}; u_1\right)}{m-2s-\frac{1}{2}+ir} -$$

$$-\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(ir)\,\zeta(2ir)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ir\right)\zeta(1+2ir)}\left\{\frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}+ir, S; u_1\right)}{2s-\frac{1}{2}-ir} + (-1)^k\,|S|^{-1}\frac{\eta^*\left(\frac{1}{2}+ir, S^{-1}; u_1\right)}{m-2s-\frac{1}{2}-ir}\right\}.$$

Man erkennt ohne weiteres, daß $J = R(s, S; u, v)$ die Invarianzeigenschaft

$$(-1)^k\,|S|^{-1}\,R\left(\frac{m}{2}-s, S^{-1}; u, v\right) = R(s, S; u, v)$$

hat, ebenso wie der Ausdruck (67) und das zu $r = n = 2$ gehörige Integral in (52), da (im Falle $n = 2$) $\tilde{v}(Y) = v(Y)$ ist und (69) gilt.

Zusammenfassend können wir nun folgenden Sachverhalt formulieren: *Es sei $u(X)$ eine beliebige harmonische Form in $\mathfrak{P}$ vom Grad $2k$ und $v(Y)$ ein beliebiger Größencharakter. Dann ist die durch*

$$\varphi(s, S; u, v) = \sum_{\substack{\{G\}\\ G'G>0}} L\left(QG\frac{\partial}{\partial G'}Q^{-1}\right)\{v(S[G])\,|S[G]|^{-s}\}$$

erklärte analytische Funktion in der s-Ebene meromorph und genügt der Funktionalgleichung

$$\eta\left(\frac{m}{2}-s, S; u, v\right) = (-1)^k\,|S|^{-1}\,\eta(s, S^{-1}; u, v),$$

wobei

$$\eta(s, S; u, v) = 2\,\pi^{-2s+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\varphi(s, S; u, v)$$

gesetzt wurde. Diese Funktion ist in der Form

$$\eta(s, S; u, v)$$

$$= \int\limits_{\substack{Y\in\mathfrak{F}\\ |Y|\geqq 1}} \left\{|Y|^s\,\vartheta_2(Y, S; u) + (-1)^k\,|S|^{-1}\,|Y|^{\frac{m}{2}-s}\,\vartheta_2(Y, S^{-1}; u)\right\} v(Y)\,|Y|^{-\frac{3}{2}}\,[dY] -$$

$$-\frac{\pi}{6}\,\delta(v)\left(\frac{u(o)}{s} + (-1)^k|S|^{-1}\frac{u(o)}{\frac{m}{2}-s}\right) + R(s, S; u, v)$$

darstellbar, wobei das Integral eine ganze Funktion von s ist. Die speziellen Argumente in den Gammafunktionen wurden der Arbeit [4] entnommen.

Die Bedingung (94) besagt, daß $\tilde{u}_1(0) = 0$ ist, falls $u(X)$ eine harmonische Form in $\mathfrak{P}$ vom Grad $2k$ mit ungeradem k ist. Um dies unmittelbar mit Hilfe invariantentheoretischer Schlüsse zu beweisen, verschaffen wir uns für die harmonischen Formen in $\mathfrak{P}$ von gegebenem Grad $2k$ eine geeignete Basis. Bekanntlich hat man in den Funktionen $(\sigma(A'X))^{2k}$, wobei $A = A^{(m,2)}$ eine beliebige komplexe Matrix mit $\sigma(A'A) = 0$ sei, eine Basis für die lineare

Schar aller harmonischen Formen vom Grad $2k$. Folglich bilden die über die Gruppe der zweireihigen orthogonalen Matrizen V gemittelten Funktionen

$$u(X) = M_V\{(\sigma(A'XV))^{2k}\}$$

eine Basis für die harmonischen Formen in $\mathfrak{P}$ vom Grad $2k$. Wir können $u(X)$ als Polynom $p(T)$ in den Elementen von $T = A'X$ darstellen. Ersichtlich ist

$$p(UTV) = p(T)$$

für orthogonale U, V, so daß $p(T)$ auch als Polynom in $\sigma(TT')^\nu$ $(\nu = 1, 2)$ geschrieben werden kann:

$$p(T) = q(\sigma(TT'), \sigma(TT')^2).$$

Wir erhalten so

$$u(X) = q(\sigma(A'XX'A), \sigma(A'XX'A)^2)$$

und damit

$$\begin{aligned} u_1(\mathfrak{x}) &= q(\sigma(A'\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'A), \sigma(A'\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'A)^2) \\ &= q(\mathfrak{x}'AA'\mathfrak{x}, (\mathfrak{x}'AA'\mathfrak{x})^2) = h(\mathfrak{x}'AA'\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

wobei $h(t)$ ein Polynom in t ist. Da $u_1(\mathfrak{x})$ mit $u(X)$ in den Elementen von A eine Form $2k$-ten Grades ist, so ist $h(t)$ eine Form in t vom Grad k, also $h(t) = c\,t^k$ mit einer gewissen Konstanten c. Die Behauptung, daß $\tilde{u}_1(0)$ im Falle ungerader k verschwindet, besagt also, daß

$$j(A) = \int (\mathfrak{x}'AA'\mathfrak{x})^k e^{-\pi\mathfrak{x}'\mathfrak{x}}\,[d\mathfrak{x}],$$

wobei über den vollen $\mathfrak{x}$-Raum integriert wird, unter der Voraussetzung $\sigma(A'A) = 0$ verschwindet. Wir konstatieren wieder, daß

$$j(UAV) = j(A)$$

für orthogonale U, V gilt, die Form $j(A)$ also auch als Polynom in $\sigma(A'A)^\nu$ $(\nu = 1, 2)$ geschrieben werden kann. Ist

$$(\sigma(A'A))^a(\sigma(A'A)^2)^b$$

ein Monom, welches in dieser Darstellung auftritt, so zeigt eine Gradbetrachtung, daß

$$2a + 4b = 2k$$

ist. Im Falle $k \equiv 1\ (2)$ ist also $a \equiv 1\ (2)$, mithin $j(A)$ durch $\sigma(A'A)$ teilbar, woraus $j(A) = 0$ für $\sigma(A'A) = 0$ erhellt. Die Voraussetzung $k \equiv 1\ (2)$ geht wesentlich in den Beweis mit ein; denn es ist

$$j(A) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int (x_1^2 - x_2^2)^k e^{-\pi(x_1^2 + x_2^2)}\,dx_1\,dx_2,$$

wenn für A die Matrix mit den speziellen Elementen

$$a_{11} = 1,\ a_{22} = i,\ a_{\mu\nu} = 0$$

sonst genommen wird.

§ 7. Der Übergang von harmonischen Formen zu beliebigen Polynomen

Im Anschluß an § 5 wird für beliebiges n und beliebiges $u(X) \in \mathfrak{P}$

$$\xi(s, S; u, v) = \frac{1}{2} \pi^{-n(n-1)/4} |S|^{\frac{ns}{m}} \eta(s, S; u, v)$$

$$= \left(\frac{|S|^{\frac{1}{m}}}{\pi}\right)^{ns} \Gamma(s - \alpha_1) \Gamma(s - \alpha_2) \ldots \Gamma(s - \alpha_n) \varphi(s, S; u, v)$$

gesetzt. Die für harmonische Formen $u(X) \in \mathfrak{P}$ im Falle $n = 2$ bewiesene Funktionalgleichung besagt, daß

$$\xi\left(\frac{m}{2} - s, S; u, v\right) = \xi(s, S^{-1}; \tilde{u}, \tilde{v}) \tag{96}$$

ist.

Allgemein soll jetzt noch gezeigt werden, daß diese Funktionalgleichung für beliebige $u(X) \in \mathfrak{P}$ gilt, wenn sie für harmonische Formen $u(X) \in \mathfrak{P}$ richtig ist. Dabei wird n keiner Beschränkung unterliegen. Wegen der Linearität von $\xi(s, S; u, v)$ in u und wegen (11) genügt es natürlich, wenn wir uns auf Formen der Art $(\sigma(X'X))^k u(X)$ an Stelle eines allgemeinen Polynoms $u(X) \in \mathfrak{P}$ beschränken, wobei jetzt angenommen werde, daß $u(X)$ eine harmonische Form in $\mathfrak{P}$ von Grad $2h$ sei. Nach (12) ist

$$\xi(s, S; (\sigma(X'X))^k u(X), v) = \pi^{-k} \frac{\Gamma(ns + h + k)}{\Gamma(ns + h)} \xi(s, S; u, v), \tag{97}$$

so daß zufolge (18)

$$\begin{aligned} \xi(s, S; \widetilde{(\sigma(X'X))^k u(X)}, v) & \\ &= (-1)^{h+k} \sum_{\varrho=0}^{k} c_{k\varrho}(2h)\, \xi(s, S; (\sigma(X'X))^\varrho u(X), v) \\ &= (-1)^{h+k} \sum_{\varrho=0}^{k} \pi^{-\varrho} c_{k\varrho}(2h) \frac{\Gamma(ns + h + \varrho)}{\Gamma(ns + h)} \xi(s, S; u, v) \end{aligned} \tag{98}$$

wird. Unter der Voraussetzung

$$\xi\left(\frac{m}{2} - s, S; u, v\right) = \xi(s, S^{-1}; \tilde{u}, \tilde{v}) = (-1)^h \xi(s, S^{-1}; u, \tilde{v}) \tag{99}$$

ist demnach

$$\xi\left(\frac{m}{2} - s, S; (\sigma(X'X))^k u(X), v\right) = \xi(s, S^{-1}; \widetilde{(\sigma(X'X))^k u(X)}, \tilde{v}) \tag{100}$$

gleichwertig mit

$$\pi^{-k} \frac{\Gamma\left(n\left(\frac{m}{2} - s\right) + h + k\right)}{\Gamma\left(n\left(\frac{m}{2} - s\right) + h\right)} = (-1)^k \sum_{\varrho=0}^{k} c_{k\varrho}^{(mn)}(2h)\, \pi^{-\varrho} \frac{\Gamma(ns + h + \varrho)}{\Gamma(ns + h)}, \tag{101}$$

wobei der größeren Deutlichkeit halber $c_{k\varrho}^{(mn)}(2h)$ an Stelle von $c_{k\varrho}(2h)$ geschrieben ist. Diese Formel ist nur scheinbar allgemeiner als die zu $n = 1$

gehörige

$$(102)\qquad \pi^{-k}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-s+h+k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-s+h\right)}=(-1)^k\sum_{\varrho=0}^{k}{}' c_{k\varrho}^{(m)}(2h)\,\pi^{-\varrho}\frac{\Gamma(ns+h+\varrho)}{\Gamma(ns+h)}\,;$$

denn man erhält erstere aus dieser vermittels der Substitution $m\to m\,n$, $s\to n\,s$. Da im Falle $n=1$ die Funktionalgleichung (9) für jedes Polynom $u(X)\in\mathfrak{P}$ erfüllt ist, was auf Grund von (52), (56), (57) leicht einzusehen ist, so gilt auch (102). Mithin ist (100) eine Folge von (99). Damit ist jedenfalls gezeigt, daß die Funktionalgleichung (9) im Falle $n=2$ mit beliebigem $u(X)\in\mathfrak{P}$ gilt.

Die Relation (102) gestattet eine explizite Berechnung der Koeffizienten $c_{k\varrho}^{(m)}(2\,h)$. Die Substitution $s\to s-h$, $m\to 2-2\,k-2\,t-4\,h$ liefert zunächst

$$(-1)^k\frac{\Gamma(1-s-t)}{\Gamma(1-k-s-t)}=\sum_{\varrho=0}^{k}{}' c_{k\varrho}^{(2-2k-2t-4h)}(2\,h)\,\pi^{k-\varrho}\frac{\Gamma(s+\varrho)}{\Gamma(s)}\,,$$

also

$$(103)\qquad \prod_{j=0}^{k-1}(s+t+j)=\sum_{\varrho=0}^{k}{}' a_{k,\varrho}(t)\prod_{j=0}^{\varrho-1}(s+j)$$

mit

$$(104)\qquad a_{k,\varrho}(t)=c_{k\varrho}^{(2-2k-2t-4h)}(2\,h)\,\pi^{k-\varrho}\qquad\text{für }0\leqq\varrho\leqq k\,.$$

Auf Grund von (103) ergibt sich die Rekursionsformel

$$(105)\qquad a_{k+1,\varrho}(t)=a_{k,\varrho-1}(t)+a_{k,\varrho}(t)\,(k+t-\varrho)\qquad\text{für }0\leqq\varrho\leqq k+1\,,$$

wenn noch allgemein

$$a_{k,-1}(t)=a_{k,k+1}(t)=0$$

gesetzt wird. Für $k=1$ erhält man aus (103) unmittelbar $a_{1,0}(t)=t$, $a_{1,1}(t)=1$. Man stellt nun ohne weiteres fest, daß die durch (105) eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{k,\varrho}(t)$ durch

$$a_{k,\varrho}(t)=\binom{k}{\varrho}\prod_{j=0}^{k-\varrho-1}(j+t)$$

geliefert werden. Gemäß (104) wird daher

$$c_{k\varrho}^{(2-2k-2t-2h)}(h)=\pi^{\varrho-k}\binom{k}{\varrho}\prod_{j=0}^{k-\varrho-1}(j+t)\,,$$

also

$$\begin{aligned}c_{k\varrho}^{(m)}(h)&=\pi^{\varrho-k}\binom{k}{\varrho}\prod_{j=1}^{k-\varrho-1}\left(j+1-\frac{m}{2}-k-h\right)\\&=(-\pi)^{\varrho-k}\binom{k}{\varrho}\prod_{j=0}^{k-\varrho-1}\left(\frac{m}{2}+h+k-j-1\right).\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$c_{k\varrho}^{(m)}(h) = (-\pi)^{\varrho - k} \binom{k}{\varrho} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + h + k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + h + \varrho\right)}, \tag{106}$$

die schon in § 1 angezeigte Formel.

Literatur

[1] MAASS, H.: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian Math. Soc. 20, 117—162 (1956). — [2] MAASS, H.: Die Bestimmung der Dirichletreihen mit Größencharakteren zu den Modulformen n-ten Grades. J. Indian Math. Soc. 19, 1—23 (1955). — [3] ROELCKE, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzgsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1953/55, 4. Abh., 161—267. — [4] MAASS, H.: Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen. Math. Ann. 122, 90—108 (1950).

(Eingegangen am 21. Februar 1957)