

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND AUTOMORPHE FUNKTIONEN

HANS MAASS

Nachdem die Einführung von Differentialgleichungen in die Theorie der automorphen Funktionen durch die Siegelschen Untersuchungen über indefinite quadratische Formen [1]¹⁾ hinreichend gerechtfertigt ist, erscheint es angezeigt, einmal im Zusammenhang auf die allgemeinen Gesichtspunkte hinzuweisen, die hierbei zur Geltung gekommen sind. In einem Teilgebiet \mathfrak{G} des Raumes der komplexen Variablen $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ sei eine positive hermitesche Metrik

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu}(z) dz_\mu d\bar{z}_\nu \quad (g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\nu\mu})$$

erklärt, sodaß \mathfrak{G} als ein Riemannscher Raum angesehen werden kann. Unter einer Bewegung verstehen wir eine pseudokonforme Transformation, welche \mathfrak{G} topologisch abbildet und ds^2 invariant läßt. Ist $f(z)$ in \mathfrak{G} erklärt, σ eine beliebige Bewegung und α, β ein gegebenes Paar komplexer Zahlen, so werde

$$(2) \quad f(z)|\sigma = \left(\frac{\partial(\sigma z)}{\partial(z)} \right)^{\frac{\alpha}{m}} \left(\frac{\partial(\sigma z)}{\partial(z)} \right)^{\frac{\beta}{m}} f(\sigma z)$$

mit geeignetem $m = m(\mathfrak{G}) > 0$ gesetzt. Wir nennen $f(z)$ eine automorphe Form zur (diskontinuierlichen) Bewegungsgruppe G , zum Gewichtssystem α, β und zum Multiplikatorsystem v , wenn $f(z)|\sigma = v(\sigma)f(z)$ für $\sigma \in G$ gilt und wenn $f(z)$ von gewissen vorgegebenen Differentialoperatoren annulliert wird. $\{G; \alpha, \beta, v\}$ bezeichne die lineare Schar dieser Formen. Eine vernünftige Theorie dieser Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$ kann anscheinend nur dann erwartet werden, wenn die gegebenen Differentialoperatoren mit f auch stets $f|\sigma$ annullieren, wobei σ eine beliebige Bewegung bezeichnet. Solche Invarianzforderungen sind bei der Auswahl der Differentialoperatoren zu beachten. Wir können den Fall eines Systems reeller Koordinaten (z_1, \dots, z_n) mit reellen $g_{\mu\nu}$ und $\beta = 0$ in die Betrachtung mit einbeziehen.

In den zur Zeit vorliegenden Untersuchungen handelt es sich entweder darum, automorphe Funktionen ($\alpha = \beta = 0$) zu finden, die der Wellengleichung $(\Delta + \lambda)f = 0$ genügen, wobei Δ den Beltramischen Differential-

¹⁾ Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das angefügte Literaturverzeichnis.

operator bezeichnet, oder darum, zu einem gegebenen Formentypus, der durch Eisensteinreihen der Art

$$(3) \quad \mathcal{E}(z; \alpha, \beta) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) \left(\frac{\partial(\sigma z)}{\partial(z)} \right)^{\frac{\alpha}{m}} \overline{\left(\frac{\partial(\sigma z)}{\partial(z)} \right)^{\frac{\beta}{m}}}$$

repräsentiert wird, ein System von kennzeichnenden Differentialgleichungen zu bestimmen. Überdies konnte in speziellen Fällen mit Hilfe von Differentialoperatoren eine lineare Korrespondenz zwischen den Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$ und $\{G; \alpha \pm 1, \beta \mp 1, v\}$ hergestellt werden. Es ist bemerkenswert, daß immer, wenn Wellenfunktionen in der Gestalt

$$(4) \quad f(z) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) (g(\sigma z))^{-\gamma} \quad \text{mit } g(z) = |g_{\mu\nu}(z)|$$

gefunden werden konnten, \mathfrak{G} nicht beschränkt und der Fundamentalbereich der zugrunde liegenden Gruppe nicht kompakt ist.

Auf automorphe Wellenfunktionen der hyperbolischen Ebene $y > 0$ mit der Grundform $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ wird man geführt [2], wenn man auf die Funktionen, die eine Dirichletsche Reihenentwicklung besitzen und gewissen Funktionalgleichungen genügen, wie sie bei den Zetafunktionen reeller quadratischer Zahlkörper auftreten, die Mellinsche Integraltransformation anwendet. Von besonderer Bedeutung ist die Bestimmung der automorphen, im Fundamentalbereich quadratisch integrierbaren Wellenfunktionen der Modulgruppe. Aus derartigen Eigenfunktionen sind die Größencharaktere der binären quadratischen Formen abzuleiten, die bei der Zuordnung der Siegelschen Modulformen zweiten Grades zu Dirichletschen Reihen benötigt werden [3]. Das genannte Eigenwertproblem ist für die Modulgruppe und ihre Hauptkongruenzuntergruppen neuerdings von W. Roelcke (Heidelberg) vollständig gelöst worden. Es ergab sich die Existenz unendlich vieler diskreter Eigenwerte, dazu ein kontinuierliches Spektrum. Die zugehörigen Eigenpakete sind aus den Eisensteinreihen vom Typus (4) durch einen Integrationsprozeß zu gewinnen. Zu einer umkehrbar eindeutigen Korrespondenz zwischen Siegelschen Modulformen p -ten Grades und Dirichletreihen gelangt man, wenn man die in [3] und [4] entwickelten Methoden kombiniert. Die erforderlichen Größencharaktere der quadratischen Formen in p Variablen erhält man aus den Eigenfunktionen zur Gruppe der Bewegungen $Y \rightarrow UYU'$ des Riemannschen Raumes $Y > 0$, $|Y| = 1$ mit der Fundamentalform $ds^2 = Sp(Y^{-1}dY)^2$. Dabei bezeichnet Y eine p -reihige reelle symmetrische Matrix und U eine unimodulare Matrix. Diese Eigenfunktionen sind mit den in Y homogenen Eigenfunktionen von der Dimension 0 bezüglich des vollen Raumes $Y > 0$

identisch. Für den vollen Raum ist $\Delta = Sp(Y D_Y)^2$ mit $D_Y = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \right)$,

$Y = (y_{\mu\nu}), e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu}), \delta_{\mu\nu} = \text{Kroneckersymbol}$. Eine Verallgemeinerung der Ansätze in [2] auf den hyperbolischen Raum $x_n > 0$ mit der Fundamentalform $ds^2 = x_n^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$ ist in [5] ausgeführt worden. Die Bewegungen sind hier mit Hilfe Cliffordscher Zahlssysteme dargestellt worden.

Die Kennzeichnung Eisensteinscher Reihen vom Typus (3) durch Differentialgleichungen ist zunächst für Grenzkreisgruppen vorgenommen worden [6]. Der Operationsbereich ist hier wieder die obere z -Halbebene. Mit $m = 2$ ist nun

$$\mathcal{E}(z; \alpha, \beta) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) (cz + d)^{-\alpha} (c\bar{z} + d)^{-\beta},$$

wenn $\sigma z = (az + b)(cz + d)^{-1}$ mit reellen a, b, c, d angesetzt wird. Eine Differentialgleichung für $\mathcal{E}(z; \alpha, \beta)$ mit der erforderlichen Invarianzeigenschaft gewinnt man mit Hilfe der Operatoren

$$(5) \quad \kappa_{\alpha} = \alpha + (z - \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{und} \quad \lambda_{\beta} = -\beta + (z - \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Man findet

$$(6) \quad \kappa_{\alpha} \mathcal{E}(z; \alpha, \beta) = \alpha \mathcal{E}(z; \alpha + 1, \beta - 1), \quad \lambda_{\beta} \mathcal{E}(z; \alpha, \beta) = -\beta \mathcal{E}(z; \alpha - 1, \beta + 1),$$

also

$$(7) \quad \Omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}(z; \alpha, \beta) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta-1} \kappa_{\alpha} + \alpha(\beta - 1).$$

Einfache Rechnungen ergeben für die durch $\Omega_{\alpha\beta}\{G; \alpha, \beta, v\} = 0$ gekennzeichneten Formenscharen

$$(8) \quad \kappa_{\alpha}\{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha + 1, \beta - 1, v\}, \quad \lambda_{\beta}\{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha - 1, \beta + 1, v\},$$

$$(9) \quad \{G; \alpha, \beta, v\} | \sigma = \{\sigma^{-1} G \sigma; \alpha, \beta, v^{\sigma}\},$$

wobei v^{σ} in gewisser Weise aus v und σ zu berechnen ist. Die Heckeschen Untersuchungen über Modulformen und Dirichletreihen können auf die diesbezüglichen Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$ vollständig übertragen werden. Spezielle Formenscharen $\{G; \alpha, \beta, v\}$ wurden im Zusammenhang mit indefiniten quadratischen Formen bereits in [7] untersucht.

Die Differentialgleichungstheorie [6] läßt sich, in beschränktem Umfang zunächst, auf die Siegelsche Modulgruppe p -ten Grades verallgemeinern [8]. Es sei Z eine p -reihige komplexe symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil und $\sigma = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$ eine Modulsstitution p -ten Grades. Mit $m = p + 1$

nimmt dann (3) die Gestalt

$$\mathcal{E}(Z; \alpha, \beta) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) |CZ + D|^{-\alpha} |C\bar{Z} + D|^{-\beta}$$

an. Ist $I = I_p$ die p -reihige Einheitsmatrix, $Z = (z_{\mu\nu}), D_z = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} \right)$ und

$$(10) \quad K_\alpha = \alpha I + (Z - \bar{Z})D_z, \quad \Lambda_\beta = -\beta I + (Z - \bar{Z})D_{\bar{z}},$$

so hat man in

$$(11) \quad \Omega_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta - \frac{p+1}{2}} K_\alpha + \alpha \left(\beta - \frac{p+1}{2} \right) I = (Z - \bar{Z}) \{ ((Z - \bar{Z})D_{\bar{z}})' D_z + \alpha D_{\bar{z}} - \beta D_z \}$$

ein System von p^2 Differentialoperatoren, die sämtlich $\mathcal{E}(Z; \alpha, \beta)$ annullieren. Die durch $\Omega_{\alpha\beta}\{G; \alpha, \beta, v\} = 0$ gekennzeichneten Formenscharen transformieren sich wieder nach der Regel (9). Der Übergang von der Schar $\{G; \alpha, \beta, v\}$ zu den Scharen $\{G; \alpha \pm 1, \beta \mp 1, v\}$ kann jetzt natürlich nicht mehr durch die Operatoren K_α, Λ_β vermittelt werden. Man benötigt hierfür gewisse Differentialoperatoren M_α, N_β von p -ter Ordnung, die im Falle $p = 1$ mit K_α, Λ_β identisch sind. Jedoch konnten die erforderlichen Invarianzuntersuchungen bisher nur für $p \leq 2$ vollständig durchgeführt werden. Enthält $\{G; \alpha, \beta, v\}$ periodische Formen, die eine Fourierreihe der Art

$$\sum_T a(Y, T) e^{2\pi i S p T X} \quad (Z = X + iY, \bar{Z} = X - iY)$$

gestatten, so entsteht das Problem, die möglichen Funktionen $a(Y, T)$ als Lösungen gewisser Differentialgleichungen zu bestimmen. Das gelingt noch im Falle $p = 2$. Doch ist über das funktionentheoretische Verhalten der Funktionen $a(Y, T)$ nichts Nennenswertes bekannt.

Der Wirkungsbereich der Modulgruppe p -ten Grades ist bekanntlich ein unbeschränktes Modell eines der vier allgemeinen komplexen Haupttypen von E. Cartans irreduziblen beschränkten symmetrischen Räumen. Es zeigt sich nun, daß für die andern Haupttypen Differentialgleichungen in analoger Bedeutung aufgestellt werden können, wenn man sich jeweils ein unbeschränktes Modell in geeigneter Weise verschafft. Wir greifen den Raum der rechteckigen Matrizen vom Typus $W = W^{(p,q)}$ heraus. Er wird beschrieben durch $I_q - W'\bar{W} > 0$; seine Fundamentalform lautet

$$ds^2 = S p dW'(I_p - \bar{W}W')^{-1} d\bar{W}(I_q - W'\bar{W})^{-1}.$$

Die Fälle reeller und komplexer W können gleichzeitig behandelt werden. Wir setzen $\varepsilon = 1$ im reellen Fall und $\varepsilon = i$ im komplexen Fall. Unter der Voraussetzung $p \geq q$ werde die Matrix $Q^{(p,q)}$ durch $R^{(p,p-q)}$ zu einer unitären Matrix (Q, R) ergänzt. Wir setzen dann

$$Z = 2(I_p + \bar{Q}Q')^{-1} (W + \varepsilon\bar{Q}) (-\varepsilon Q'W + I_q)^{-1},$$

$$Y = \frac{1}{2}(\varepsilon Q'Z + \varepsilon\bar{Z}'\bar{Q}) - \frac{1}{4}\bar{Z}'\bar{R}R'Z,$$

$$X = \frac{1}{2}(Q'Z - \varepsilon^2\bar{Z}'\bar{Q}),$$

$$T = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} R'Z$$

Kennzeichnend für unsern Raum ist

$$\bar{Y}' = Y > 0, \quad \bar{X}' = -\varepsilon^2 X, \quad T \text{ beliebig.}$$

Für die Bewegungen $Z \rightarrow (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ ist

$$\sigma' i \bar{\sigma} = \iota \quad \text{mit } \sigma = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} R \bar{R}' & \varepsilon Q \\ \bar{\varepsilon} \bar{Q}' & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristisch.

Im *komplexen Fall* ist nun mit $m = p + q$

$$\mathcal{E}(Z; \alpha, \beta) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) |CZ + D|^{-\alpha} \overline{|CZ + D|}^{-\beta}.$$

Diese Reihen genügen den q^2 Differentialgleichungen

$$\Omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}(Z; \alpha, \beta) = 0,$$

wobei

$$Z = (z_{\mu\nu}), \quad D_z = \left(\frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}} \right)$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = ((QZ' - \bar{Z}\bar{Q}' + 2iR\bar{R}')D_z)'D_{\bar{z}} + \alpha Q'D_{\bar{z}} - \beta(\bar{Q}'D_z)'$$

ist. Hervorzuheben ist hier der hermitisch-symplektische Fall für $p = q$. Wird $Q = I_p$ gewählt, so ergeben sich einfache Formeln, insbesondere auch $Z = X + iY, \bar{Z}' = X - iY$.

Im *reellen Fall* ist mit $m = p + q$ und $\beta = 0$

$$\mathcal{E}(Z, \alpha) = \sum_{\sigma} \omega(\sigma) |CZ + D|^{-\alpha}.$$

Man erhält $\frac{q(q+1)}{2}$ unabhängige Differentialgleichungen

$$\Omega_{\alpha} \mathcal{E}(Z, \alpha) = 0,$$

wobei

$$\Omega_{\alpha} = ((ZQ' + QZ' + 2RR')D_z)'D_z + (\alpha + 1)Q'D_z + (\alpha + 1)(Q'D_z)'$$

ist. Von besonderem Interesse ist der Spezialfall $q = 1$. Setzt man noch $T' = (t_2, t_3, \dots, t_p), Y = t_1^2, t_1 > 0$, so wird

$$ds^2 = t_1^{-2}(dt_1^2 + dt_2^2 + \dots + dt_p^2).$$

Es liegt hier also der p -dimensionale hyperbolische Raum vor. Man erhält so über den Matrizenkalkül einen neuen Zugang zu der Untersuchung [5]. Schließlich sei noch auf den Fall $q = 2$ mit drei Differentialgleichungen hingewiesen. Es handelt sich hierbei um eine reelle Darstellung eines weiteren komplexen Haupttypus von E. Cartan.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SIEGEL, Math. Ann. 124 (1951/52), 17–54 u. 364–387.
- [2] MAASS, Math. Ann. 121 (1949), 141–183.
- [3] MAASS, Math. Ann. 122 (1950), 90–108.
- [4] KOECHER, Journal f. rein. u. angew. Math. 192 (1953), 1–23.
- [5] MAASS, Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg 16, Heft 3/4 (1949), 72–100.
- [6] MAASS, Math. Ann. 125 (1953), 235–263.
- [7] MAASS, Sitz.-ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Klasse 1949, 1. Abh.
- [8] MAASS, Math. Ann. 126 (1953), 44–68.

MATH. INST., HAUPTSTRASSE 47/51,
HEIDELBERG, DEUTSCHLAND.