

# DIE BESTIMMUNG DER DIRICHLETREIHEN MIT GRÖSSENCHARAKTEREN ZU DEN MODULFORMEN $n$ -TEN GRADES

VON  
HANS MAASS

[Eingegangen am 8. Januar 1955]

**Einleitung.** Im Raum der positiven reellen Matrizen  $Y = Y^{(n)} = (y_{\mu\nu})$  wird durch  $ds^2 = \sigma(Y^{-1} dY)^2$  ( $\sigma = \text{Spur}$ ) eine positive Metrik erklärt, die gegenüber den Transformationen

$$Y \rightarrow Y[R] = R' Y R \quad (R \text{ reell, } |R| \neq 0)$$

invariant ist. Es bezeichne  $dv$  das invariante Volumenelement des Raumes  $Y > 0$  und  $dv_1$  das invariante Volumenelement der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  im Raum  $Y > 0$ . Dann ist

$$dv = \sqrt{n} y^{-1} dy dv_1 = 2^{n(n-1)/4} |Y|^{-(n+1)/2} [dY],$$

wenn  $Y = yY_1$ ,  $|Y| = y^n$ ,  $y > 0$  und  $[dY] = \prod_{\mu < \nu} dy_{\mu\nu}$  gesetzt wird.

Um zu einer gegebenen Modulform  $f(Z)$  vom Grad  $n$  und Gewicht  $k \equiv 0 \pmod{2}$  ein System von Dirichletreihen zu finden, welche  $f(Z)$  umkehrbar eindeutig bestimmen, ist folgendes Verfahren anzuwenden. Man entwickle  $f(Z)$  in eine Fourierreihe:

$$f(Z) = \sum_{T \geq 0} \alpha(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

und zerlege  $f(iY)$  in

$$f(iY) = \sum_{r=0}^n f_r(Y) \text{ mit } f_r(Y) = \sum_{\substack{T \geq 0 \\ \text{Rang } T = r}} \alpha(T) e^{-2\pi \sigma(TY)}.$$

Mit Hilfe der Mellintransformation erhält man dann in

$$\eta(s, Y_1; f) = \int_0^\infty f_n(y Y_1) y^{n s - 1} dy$$

eine Funktion, die  $f_n(y Y_1)$  und damit auch  $f(Z)$  umkehrbar eindeutig bestimmt. Da  $\eta(s, Y_1; f)$  gegenüber den unimodularen Transformationen  $Y_1 \rightarrow Y_1[U]$  invariant ist :

$$\eta(s, Y_1[U]; f) = \eta(s, Y_1; f), \quad U \text{ unimodular,}$$

liegt es nahe, nach einem vollständigen System von Funktionen  $u(Y_1)$  zu fragen, die gegenüber den unimodularen Transformationen invariant sind, so dass die Gesamtheit der Integrale

$$\xi(s; u, f) = \int_{Y_1 \in R_n} \eta(s, Y_1; f) u(Y_1) dv_1$$

die Funktion  $\eta(s, Y_1; f)$  und damit auch  $f(Z)$  umkehrbar eindeutig bestimmt. Die Integration ist hier über den Teil der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  auszuführen, der in einem vorgegebenen Fundamentalbereich  $R_n$  der Gruppe der unimodularen Transformationen  $Y \rightarrow Y[U]$  liegt. Es ist zu erwarten, dass ein geeignetes Funktionensystem  $u(Y_1)$  durch Differentialgleichungen gekennzeichnet werden kann.

Wir nehmen zunächst einige formale Umformungen vor. Es bezeichne  $T = T^{(n)}$  eine halbganze positive Matrix,  $\epsilon(T)$  die Anzahl der Einheiten von  $T$  und  $\{T\}$  die Klasse der mit  $T$  äquivalenten Matrizen  $T[U]$  ( $U$  unimodular). Dann ist formal

$$\sum_{T > 0} \phi(T) = \sum_{\{T\}} \frac{1}{\epsilon(T)} \sum_U \phi(T[U]),$$

wobei  $U$  alle unimodularen Matrizen vom Typus  $U^{(n)}$  durchläuft und  $\phi(T)$  eine willkürliche Funktion bezeichnet. Schliesslich setzen wir noch  $u(Y) = u(Y_1)$  und  $c_n = n^{-1/2} 2^{n(n-1)/4}$ . Die Funktion  $u(Y)$  ist homogen in  $Y$  vom Grad 0. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi(s; u, f) &= \int_{Y_1 \in R_n} \int_{y > 0} f_n(y Y_1) u(Y_1) y^{ns-1} dy dv_1 \\ &= c_n \int_{Y \in R_n} f_n(Y) u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY] \\ &= c_n \sum_{T > 0} a(T) \int_{Y \in R_n} e^{-2\pi\sigma(TY)} u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\epsilon(T)} \sum_U \int_{Y \in R_n} e^{-2\pi\sigma(T[U]Y)} u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY] \\
&= 2 c_n \sum_{\{T\}} \frac{a(T)}{\epsilon(T)} \int_{Y > 0} e^{-2\pi\sigma(TY)} u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY];
\end{aligned}$$

denn es ist  $a(T[U]) = a(T)$ ,  $\sigma(T[U]Y) = \sigma(TY[U'])$  und  $u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY]$  ist gegenüber den Transformationen  $Y \rightarrow Y[U']$  invariant. Ferner ist zu beachten, dass die Vereinigung der Bildbereiche von  $R_n$  überzählig der unimodularen Transformationen  $Y \rightarrow Y[U']$  den Raum  $Y > 0$  doppelt überdeckt, da  $U$  und  $-U$  dieselbe Transformation definieren.

Das Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist nun die explizite Berechnung der Integrale

$$\Omega(s, T; u) = \int_{Y > 0} e^{-2\pi\sigma(TY)} u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY]$$

unter der Voraussetzung, dass  $u(Y)$  eine in  $Y > 0$  beschränkte Lösung des von A. Selberg vorgeschlagenen Differentialgleichungssystems

$$\left\{ \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k + \lambda_k \right\} u(Y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Dabei ist  $Y = (y_{\mu\nu})$ ,  $\frac{\partial}{\partial Y} = \left( e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \right)$ ,  $e_{\mu\nu} = 1$  oder  $\frac{1}{2}$  je nachdem

$\mu = \nu$  oder  $\mu \neq \nu$  ist. Eine einfache Transformation liefert sofort

$$\Omega(s, T; u) = |T|^{-s} \Omega(s, E; u_1) \text{ mit } u_1(Y) = u(Y[S^{-1}]), T = SS',$$

wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Das Resultat umfangreicher Rechnungen ist schliesslich die Formel

$$\Omega(s, E; u_1) = (2\pi)^{-ns} \Gamma(s - \alpha_1) \Gamma(s - \alpha_2) \dots \Gamma(s - \alpha_n) \pi^{n(n-1)/4} u_1(E)$$

mit gewissen komplexen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , die durch  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind, und der Relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n(n-1)/4$$

genügen. Wir erhalten damit

$$\xi(s; u, f) = \frac{2}{\sqrt{n}} (2\pi)^{-ns+n(n-1)/4} \prod_{v=1}^n \Gamma(s - \alpha_v) \cdot D(s; u, f),$$

wobei

$$D(s; u, f) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T) u(T^{-1})}{\epsilon(T)} |T|^{-s}$$

die der Modulform  $f(Z)$  in natürlicher Weise entsprechenden Dirichletreihen sind. Das Problem, die Funktionen  $D(s; u, f)$  mit Hilfe von Funktionalgleichungen analytisch fortzusetzen, soll an anderer Stelle behandelt werden.

Die Frage, ob durch die angegebenen Differentialgleichungen ein Funktionensystem der gewünschten Art definiert wird, ist vorerst nur im Falle  $n = 2$  befriedigend beantwortet worden [1, 2]. Die Forderung, dass  $u(Y)$  in  $Y$  homogen vom Grad 0 sein soll, kommt in  $\lambda_1 = 0$  zum Ausdruck. Ferner beachte man,

dass  $\sigma\left(Y \frac{\partial}{\partial Y}\right)^2$  auf homogene Funktionen vom Grad 0 dieselbe

Wirkung hat wie der Laplace-Beltramische Operator der Determinantenfläche  $|Y| = 1$ , so dass die Selbergschen Differentialgleichungen im Falle  $n = 2$  dasselbe leisten wie die Ansätze in [1]. Eine unmittelbare Verallgemeinerung der in [1] entwickelten Methoden stösst auf Schwierigkeiten, weil in [1] eine spezielle Parameterdarstellung der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  verwendet wurde. Mit Hilfe eines schönen Gedankens von H. Huber (Zürich) war es indessen möglich, die vorliegende Rechnung ohne eine derartige Parameterdarstellung durchzuführen.

**1. Differentialoperatoren.** Die Abbildungen  $Y \rightarrow Y^* = Y[R]$  mit reellem nicht-singulären  $R$  bilden den Raum  $Y > 0$  umkehrbar eindeutig auf sich ab und lassen die metrische Fundamentalform  $ds^2 = \sigma(Y^{-1} dY)^2$  invariant. In der Tat ist  $dY^* = (dY)[R]$ ,  $Y^{*-1} = Y^{-1}[R'^{-1}]$ , also  $(Y^{*-1} dY^*)^2 = R^{-1}(Y^{-1} dY)^2 R$ , mithin  $\sigma(Y^{*-1} dY^*)^2 = \sigma(Y^{-1} dY)^2$ . Die Sonderstellung der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  beruht auf der Tatsache, dass

$$ds^2 = -d^2 \log |Y| \quad (1)$$

ist. Wir bestätigen diese Formel wie folgt.

$$\begin{aligned} -d^2 \log |Y| &= -d(d \log |Y|) = -d\sigma \left( dY \frac{\partial}{\partial Y} \log |Y| \right) \\ &= -d\sigma(Y^{-1} dY) \\ &= -\sigma(d(Y^{-1}) dY) = \sigma(Y^{-1} dY, Y^{-1} dY) = ds^2. \end{aligned}$$

Für eine willkürliche Funktion  $\phi = \phi(Y)$  ist

$$d\phi = \sigma \left( dY \frac{\partial}{\partial Y} \phi \right) = \sigma \left( dY^* \frac{\partial}{\partial Y^*} \phi \right) = \sigma \left( dY R \frac{\partial}{\partial Y^*} \phi R' \right)$$

also

$$\frac{\partial}{\partial Y} \phi = R \frac{\partial}{\partial Y^*} \phi R' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial Y^*} = R^{-1} \frac{\partial}{\partial Y} R'^{-1}.$$

Damit folgt

$$\left( Y^* \frac{\partial}{\partial Y^*} \right)^k = R' \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k R'^{-1} \quad \text{für } Y^* = Y[R]. \quad (2)$$

Für die Funktionaldeterminante der  $n(n+1)/2$  unabhängigen Elemente von  $Y^*$  nach den  $n(n+1)/2$  unabhängigen Elementen von  $Y$  ergibt sich bekanntlich der Ausdruck

$$\frac{\partial(Y^*)}{\partial(Y)} = |R|^{n+1} = |Y^*|^{(n+1)/2} |Y|^{-(n+1)/2}.$$

Das invariante Volumenelement des Raumes  $Y > 0$  ist damit bestimmt :

$$dv = 2^{n(n-1)/4} |Y|^{-(n+1)/2} [dY]. \quad (3)$$

Der konstante Faktor  $2^{n(n-1)/4}$  lässt sich durch eine lokale Betrachtung ( $Y = E$ ) ohne weiteres ermitteln. Wir zeigen, dass

$$\Delta = \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 \quad (4)$$

mit dem Laplace-Beltramischen Operator des Raumes  $Y > 0$  identisch ist. Da beide Operatoren gegenüber den Transformationen  $Y \rightarrow Y[R]$  invariant sind und die Gruppe der Bewegungen den Raum transitiv abbildet, genügt es die Übereinstimmung der

Operatoren an der Stelle  $Y = E$  zu zeigen. Hier wählen wir das Koordinatensystem

$$X = (-Y + E)(Y + E)^{-1}.$$

Die Substitution  $Y \rightarrow X$  bildet den Raum  $Y > 0$  umkehrbar eindeutig auf  $E - X'X > 0$ ,  $X' = X$  ab, wie leicht festgestellt werden kann. Eine einfache Rechnung ergibt

$$ds^2 = 4\sigma((E - X'X)^{-1} dX)^2,$$

woraus erhellt, dass das  $X$ -Koordinatensystem an der Stelle  $Y = E$  geodätisch ist. Mit Hilfe der Operatorenidentitäten

$$\frac{\partial}{\partial Y} \equiv \frac{1}{2}(E + X) \left( (E + X) \frac{\partial}{\partial X} \right)',$$

$$\frac{\partial}{\partial X} X \equiv \frac{n+1}{2} E + \left( X \frac{\partial}{\partial X} \right)',$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( X \frac{\partial}{\partial X} \right)' \equiv \left( X \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \right)' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial}{\partial X} \right) E$$

erhalten wir

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial}{\partial X} \right) E - \frac{n+1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \right\} \text{ für } X = 0$$

und damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 &= \frac{1}{4} \sigma \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu\nu}^2} + \frac{1}{8} \sum_{\mu < \nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu\nu}^2} \\ ds^2 = 4\sigma(dX)^2 &= 4 \sum_{\nu} dx_{\nu\nu}^2 + 8 \sum_{\mu < \nu} dx_{\mu\nu}^2 \end{aligned} \right\} \text{ für } X = 0,$$

woraus erhellt, dass  $\sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2$  mit dem Laplace-Beltramischen Operator an der Stelle  $Y = E$  und daher überhaupt übereinstimmt.

Die homogenen Funktionen  $\phi(Y)$  vom Grade 0 und die Funktionen  $\phi_1(Y)$  auf der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  werden durch

$$\phi_1(|Y|^{-1/n} Y) = \phi(Y) \quad (5)$$

offenbar umkehrbar eindeutig auf einander bezogen. Bezeichnet  $\Delta_1$  den Laplace-Beltramischen Operator der Determinantenfläche  $|Y| = 1$ , so gilt

$$\Delta_1 \phi_1 = \Delta \phi. \quad (6)$$

Zufolge (1) ist diese Beziehung ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Sachverhalts: In einem Bereich  $H$  der reellen Variablen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , den wir als Riemannschen Raum bezüglich der Metrik  $ds^2 = d^2 \psi$  ansehen, wobei  $\psi = -\log \chi$  und  $\chi = \chi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  eine positive homogene Funktion vom Grad  $k > 0$  ist, betrachten wir die Hyperfläche  $F$ , die durch  $\chi(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1$  definiert wird. Es seien  $\Delta$  und  $\Delta_1$  die Laplace-Beltramischen Operatoren bezüglich  $H$  bzw.  $F$ . Den Funktionen  $\phi_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$  auf  $F$  entsprechen umkehrbar eindeutig die homogenen Funktionen  $\phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  auf  $H$  vom Grad 0 vermöge der Beziehung

$$\phi_1(\dots, \chi^{-1/k} y_r, \dots) = \phi(\dots, y_r, \dots).$$

Für die sich in dieser Weise entsprechenden Funktionen ist

$$\Delta_1 \phi_1 = \Delta \phi.$$

Zum Beweis wählen wir in  $H$  ein spezielles Koordinatensystem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in folgender Weise. Es sei

$$y_\mu = h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (1 \leq \mu \leq n)$$

eine Parameterdarstellung der Hyperfläche  $F$ , so dass insbesondere

die Matrix  $\left( \frac{\partial h_\mu}{\partial x_\nu} \right)$  den Rang  $n - 1$  hat. Dann wird durch

$$y_\mu = h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) x_n \quad (1 \leq \mu \leq n)$$

ein Koordinatensystem in  $H$  definiert. Es genügt hierfür zu zeigen, dass die quadratische Matrix  $\left( \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} \right)$  den Rang  $n$  hat oder, damit gleichwertig, dass das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \xi_\nu \frac{\partial h_\mu}{\partial x_\nu} x_n + \xi_n h_\mu = 0 \quad (1 \leq \mu \leq n) \quad (7)$$

nur trivial lösbar ist. Nun ist  $\chi(h_1, h_2, \dots, h_n) = 1$  identisch in  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , also

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial h_\mu}(h) \frac{\partial h_\mu}{\partial x_\nu} = 0 \quad (1 \leq \nu < n). \quad (8)$$

Dazu kommt die Homogenitätsrelation

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial h_\mu}(h) h_\mu = k \chi(h) > 0. \quad (9)$$

Wir multiplizieren (8) mit  $\xi_\nu x_\nu$  und (9) mit  $\xi_n$ . Addition ergibt zufolge (7) sofort  $\xi_n k \chi(h) = 0$ , also  $\xi_n = 0$ . Wegen (7) ist dann aber auch  $\xi_\nu = 0$  für  $\nu < n$ .

Im  $x$ -Koordinatensystem ist

$$ds^2 = d^2 \psi = d \left( \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} dx_\nu \right) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

mit

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq n).$$

Da  $\chi(y) = \chi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $\frac{\partial \chi}{\partial y_\mu}(y)$  in  $y_1, y_2, \dots, y_n$  homogen vom Grad  $k$  bzw.  $k-1$  sind, hängt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} &= - \frac{1}{\chi(y)} \frac{\partial \chi(y)}{\partial x_\nu} = - \frac{1}{\chi(y)} \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi(y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} \\ &= - \frac{1}{\chi(y)} \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi(y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial h_\mu}{\partial x_\nu} x_n \end{aligned}$$

im Falle  $\nu < n$  von  $x_n$  nicht ab. Mithin ist

$$g_{n\nu} = g_{\nu n} = 0 \quad (\nu < n).$$

Zufolge

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n} = - \frac{1}{\chi(y)} \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi(y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_n} = - \frac{1}{\chi(y)} \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \chi(y)}{\partial y_\mu} \frac{y_\mu}{x_n} = - \frac{k}{x_n}$$



ist

$$g_{nn} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2} = \frac{k}{x_n^2}$$

Dies ergibt

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^{n-1} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu + \frac{k}{x_n^2} dx_n^2$$

Wir setzen  $|g_{\mu\nu}| = g(\mu, \nu < n)$  und erklären  $g^{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu < n$ ) durch

$$(g_{\mu\nu})(g^{\mu\nu}) = (\delta_{\mu\nu}) \quad (\mu, \nu < n),$$

wobei  $\delta_{\mu\nu}$  das Kroneckersymbol bezeichnet. Offenbar sind  $g$  und  $g^{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu < n$ ) von  $x_n$  unabhängig. Es folgt dann

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\sqrt{gg_{nn}}} \sum_{\mu, \nu=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \sqrt{gg_{nn}} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{gg_{nn}}} \frac{\partial}{\partial x_n} \sqrt{gg_{nn}} \frac{x_n^2}{k} \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu, \nu=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) + \frac{1}{k} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \Delta_1 + \frac{1}{k} \left( x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Sei nun  $\phi(y) = \phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  eine homogene Funktion vom Grad 0 und  $\phi_1((\chi(y))^{-1/k} y) = \phi(y)$ . Wegen  $(\chi(y))^{1/k} = (\chi(hx_n))^{1/k} = x_n (\chi(h))^{1/k} = x_n$  wird dann  $\phi_1(h) = \phi(y)$ , also  $\Delta_1 \phi_1 = \Delta \phi$ , q.e.d.

Die durch

$$dv = \sqrt{gg_{nn}} \prod_{r=1}^n dx_r, \quad dv_1 = \sqrt{g} \prod_{r=1}^{n-1} dx_r$$

erklärten Volumenelemente stehen ersichtlich in der Beziehung

$$dv = \sqrt{k} x_n^{-1} dx_n dv_1.$$

Die Anwendung auf den Raum  $Y > 0$  ergibt mit  $n$  und  $y = |Y|^{1/n}$  an Stelle von  $k$  und  $x_n$

$$dv = \sqrt{n} y^{-1} dy dv_1,$$

zufolge (3) also

$$c_n |Y|^{-(n+1)/2} [dY] = y^{-1} dy dv_1 \text{ mit } c_n = n^{-1/2} 2^{n(n-1)/4}. \quad (10)$$

Wir stellen fest, dass die Differentialgleichungen

$$\left\{ \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k + \lambda_k \right\} u(Y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

wegen (2) gegenüber den Transformationen  $Y \rightarrow Y[R]$  mit  $|R| \neq 0$  invariant sind. Die Funktion  $u^*(Y) = |Y|^s u(Y)$  mit willkürlichem  $s$  genügt ebenfalls einem Differentialgleichungssystem der Art (11) mit gewissen  $\lambda^*_\nu = \lambda^*_\nu(s)$  an Stelle von  $\lambda_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ). Das ergibt sich sofort auf Grund der Operatorenidentität

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k |Y|^s = \sum_{\nu=0}^k s^\nu \binom{k}{\nu} |Y|^s \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^{k-\nu}, \quad (12)$$

die durch vollständige Induktion nach  $k$  leicht geprüft werden kann. Da  $u(Y)$  homogen vom Grad  $-\lambda_1$  ist, so ist  $u^*(Y)$  homogen vom Grad  $ns - \lambda_1$ . Mithin ist  $\lambda^*_1 = \lambda_1 - ns$ , also  $\lambda^*_1 = 0$  für  $s = \lambda_1/n$ . Es bedeutet demnach keine Einschränkung der Allgemeinheit, von vornherein  $\lambda_1 = 0$  anzunehmen. Im folgenden wird nur dieser Fall diskutiert.

Wir zeigen noch, dass die Differentialgleichungen (11) Lösungen besitzen, die gegenüber den unimodularen Transformationen  $Y \rightarrow Y[U]$  invariant sind. Diese Lösungen sind jedoch auf der Determinantenfläche  $|Y| = 1$  nicht beschränkt. Mit  $Y_1 = Y_1^{(r)}$  werde

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3 \\ Y'_3 & Y_2 \end{bmatrix} \text{ und } \frac{\partial}{\partial Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial Y_1} & 1 & \frac{\partial}{\partial Y_3} \\ 1 & \frac{\partial}{\partial Y_3} & \frac{\partial}{\partial Y_2} \end{bmatrix}$$

gesetzt. Vollständige Induktion nach  $k$  liefert dann

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k |Y_1|^{-s} = (-1)^k s \left( s - \frac{n-r}{2} \right)^{k-1} |Y_1|^{-s} \begin{bmatrix} E & 0 \\ Y'_3 & Y_1^{-1} 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

mit  $E = E^{(r)}$ . In der Tat ist

$$Y \frac{\partial}{\partial Y} |Y_1|^{-s} = -s Y |Y_1|^{-s} \begin{bmatrix} Y_1^{-1} 0 \\ 0 0 \end{bmatrix} = -s |Y_1|^{-1} \begin{bmatrix} E & 0 \\ Y_3' Y_1^{-1} 0 \end{bmatrix}$$

und aus (13) folgt

$$\begin{aligned} & \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^{k+1} |Y_1|^{-s} \\ &= (-1)^k s \left( s - \frac{n-r}{2} \right)^{k-1} Y \frac{\partial}{\partial Y} |Y_1|^{-s} \begin{bmatrix} E & 0 \\ Y_3' Y_1^{-1} 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k s \left( s - \frac{n-r}{2} \right)^{k-1} |Y_1|^{-s} \times \\ & \quad \times Y \begin{bmatrix} -s Y_1^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Y_3} Y_3' Y_1^{-1} 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} s \left( s - \frac{n-r}{2} \right)^k |Y_1|^{-s} \begin{bmatrix} E & 0 \\ Y_3' Y_1^{-1} 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial Y_3} Y_3' = (n-r) E.$$

Durch Spurbildung ergibt sich aus (13)

$$\left\{ \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right) + \lambda_k \right\} |Y_1|^{-s} = 0 \text{ mit } \lambda_k = r s \left( \frac{n-r}{2} - s \right)^{k-1} \text{ für } k \geq 1. \quad (14)$$

Es sei  $U = (QR)$  eine unimodulare Matrix,  $Q$  vom Typus  $Q^{(n,r)}$ .

Die Substitution  $Y \rightarrow Y[U]$  führt  $Y_1 = Y \left[ \begin{bmatrix} E^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} \right]$  über in  $Y[Q]$ .

Auf Grund von (14) folgt nun leicht, dass auch

$$\left\{ \sigma \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right) + \lambda_k \right\} \mathcal{E}(Y, s) = 0$$

mit den dort angegebenen  $\lambda_k$  gilt, wobei

$$\mathcal{E}(Y, s) = \sum_Q |Y[Q]|^{-s} \quad (15)$$

ist. Die Summation ist hier über ein volles System rechts nicht assoziierter primitiver  $Q$  zu erstrecken. Konvergenz liegt für  $s > \frac{n}{2}$  vor. Ausserdem gilt

$$\mathcal{E}(Y[U], s) = \mathcal{E}(Y, s) \text{ für unimodulare } U.$$

Die Reihen (15) stellen Verallgemeinerungen der Epsteinschen Zetafunktionen dar.

2. Berechnung der Integrale. Wir entwickeln nun die für die Berechnung der eingangs genannten Integrale erforderlichen Hilfsmittel. Zunächst notieren wir die zu (12) analoge Identität

$$\left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^k |Y|^s = \sum_{\nu=0}^k s^\nu \binom{k}{\nu} |Y|^s \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{k-\nu}, \quad (16)$$

die ebenfalls durch vollständige Induktion nach  $k$  bewiesen werden kann. Für eine beliebige Funktionenmatrix  $A = (a_{\mu\nu})$  ist ferner

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' AY = \left( Y \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' A \right)' \right)' + \frac{1}{2} A' Y + \frac{1}{2} \sigma(A Y) E. \quad (17)$$

Wegen

$$e_{\rho\mu} \frac{\partial y_{\tau\nu}}{\partial y_{\rho\mu}} = \frac{1}{2} (\delta_{\rho\tau} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\rho\nu} \delta_{\mu\tau})$$

ergibt sich in der Tat

$$\begin{aligned} \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' AY &= \left( \sum_{\rho} y_{\nu\rho} e_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial y_{\rho\mu}} \right) \left( \sum_{\tau} a_{\mu\tau} y_{\tau\nu} \right) \\ &= \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} y_{\sigma\rho} e_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial y_{\rho\mu}} a_{\sigma\tau} y_{\tau\nu} \right) \\ &= \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} y_{\mu\tau} y_{\sigma\rho} e_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\rho\nu}} a_{\sigma\tau} \right)' + \frac{1}{2} \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} y_{\sigma\rho} a_{\sigma\tau} (\delta_{\rho\tau} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\rho\nu} \delta_{\mu\tau}) \right) \\ &= \left( Y \left( \sum_{\rho, \sigma} y_{\sigma\rho} e_{\rho\mu} \frac{\partial}{\partial y_{\rho\mu}} a_{\sigma\tau} \right)' \right)' + \frac{1}{2} \sigma(A Y) E + \frac{1}{2} A' Y. \end{aligned}$$

$$= \left( Y \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' A \right)' \right)' + \frac{1}{2} \sigma(A Y) E + \frac{1}{2} A' Y.$$

Mit Hilfe von (17) beweist man nun

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' Y^k = \frac{k}{2} Y + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \sigma(Y^\nu) Y^{k-\nu} \quad (k \geq 1) \quad (18)$$

durch vollständige Induktion nach  $k$ . Durch Rechnung bestätigt man unmittelbar

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \sigma(Y^k) = k Y^k \quad (k \geq 0), \quad (19)$$

ebenso

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' e^{-2\pi\sigma(Y)} = -2\pi e^{-2\pi\sigma(Y)} Y. \quad (20)$$

Wiederholte Anwendung von (18), (19), (20) ergibt dann

$$\left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^k e^{-2\pi\sigma(Y)} = e^{-2\pi\sigma(Y)} \left\{ (-2\pi)^k Y^k + \sum_{\nu_1+\dots+\nu_r+r < k} a_{\nu_1\dots\nu_r} \sigma(Y^{\nu_1}) \dots \sigma(Y^{\nu_r}) Y^r \right\}$$

mit gewissen Konstanten  $a_{\nu_1\dots\nu_r}$ . Folglich ist

$$\sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^k e^{-2\pi\sigma(Y)} = e^{-2\pi\sigma(Y)} \left\{ (-2\pi)^k \sigma(Y^k) + \sum_{\nu_1+\dots+\nu_r < k} b_{\nu_1\nu_2\dots\nu_r}^k \sigma(Y^{\nu_1}) \sigma(Y^{\nu_2}) \dots \sigma(Y^{\nu_r}) \right\}.$$

Diese Formel lässt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern

$$\sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{\nu_p} \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{\nu_{p-1}} \dots \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{\nu_1} e^{-2\pi\sigma(Y)} \quad (21)$$

$$= e^{-2\pi\sigma(Y)} \left\{ (-2\pi)^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_p} \sigma(Y^{\nu_1}) \sigma(Y^{\nu_2}) \dots \sigma(Y^{\nu_p}) + C_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p}(Y) \right\}$$

mit

$$C_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p}(Y) = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_r \\ \mu_1+\dots+\mu_r < \nu_1+\dots+\nu_p}} c_{\mu_1\dots\mu_r}^{\nu_1\dots\nu_p} \sigma(Y^{\mu_1}) \dots \sigma(Y^{\mu_r}). \quad (22)$$

$b_{\nu_1\dots\nu_r}^k$  und  $c_{\mu_1\dots\mu_r}^{\nu_1\dots\nu_p}$  bezeichnen gewisse Konstanten.

Die Methode der partiellen Integration soll nun auf den Fall von Matrizenvariablen weitgehend verallgemeinert werden. Es bezeichne  $\omega_{\mu\nu}$  das äussere Produkt der Differentiale  $dy_{\rho\sigma}$  mit Ausnahme von  $dy_{\mu\nu}$ . Das Vorzeichen von  $\omega_{\mu\nu}$  sei durch  $dy_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = [dY]$  bestimmt. Weiter sei  $\Omega = (e_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu})$ . Im Raum der positiven  $Y$  bezeichne  $G$  ein Gebiet mit stückweise glattem Rand  $R$ . Eine gegebene Orientierung von  $G$  denken wir uns auf  $R$  übertragen. Schliesslich seien  $A = (a_{\mu\nu})$ ,  $B = (b_{\mu\nu})$  willkürliche Funktionenmatrizen vom Typus  $A^{(n)}$  bzw.  $B^{(n)}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_G B \left\{ Y \frac{\partial}{\partial Y} A \right\} [dY] \\ &= - \int_G \left\{ \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' B' \right\}' A [dY] - \frac{n+1}{2} \int_G BA [dY] + \\ & \quad + \int_R BY\Omega A. \quad (23) \end{aligned}$$

Zum Beweis bilden wir das Produkt

$$\begin{aligned} BY \frac{\partial}{\partial Y} A &= \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} b_{\mu\rho} y_{\rho\sigma} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} a_{\tau\nu} \right) \\ &= - \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} a_{\tau\nu} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} b_{\mu\rho} \right) + \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho} \right) \\ &= - \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} a_{\tau\nu} e_{\sigma\tau} \delta_{\tau\rho} b_{\mu\rho} \right) - \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} a_{\tau\nu} y_{\rho\sigma} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} b_{\mu\rho} \right) + \\ & \quad + \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho} \right) \\ &= - \frac{n+1}{2} BA - \left( \sum_{\rho, \sigma} y_{\rho\sigma} e_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\nu}} b_{\mu\rho} \right) A \\ & \quad + \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho} \right) \\ &= - \frac{n+1}{2} BA - \left\{ \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' B' \right\}' A + \\ & \quad + \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho} \right) \end{aligned}$$

Da für eine beliebige Differentialform  $\omega$  bekanntlich

$$\int_G d\omega = \int \omega$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} \int_G \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma\tau}} y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho} \right) [dY] &= \int_G \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} e_{\sigma\tau} d(y_{\rho\sigma} a_{\tau\nu} b_{\mu\rho}) \omega_{\sigma\tau} \right) \\ &= \int_R \left( \sum_{\rho, \sigma, \tau} b_{\mu\rho} y_{\rho\sigma} e_{\sigma\tau} \omega_{\sigma\tau} a_{\tau\nu} \right) \\ &= \int_R B Y \Omega A \end{aligned}$$

und damit auch (23). Wiederholte Anwendung von (23) ergibt

$$\begin{aligned} &\int_G B \left\{ \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^k A \right\} [dY] \\ &= (-1)^k \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} \left( \frac{n+1}{2} \right)^{k-\mu} \times \\ &\quad \times \int_G \left\{ \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\mu B' \right\}' A [dY] + \\ &+ \sum_{\rho=0}^{k-1} (-1)^\rho \sum_{\mu=0}^{\rho} \binom{\rho}{\mu} \left( \frac{n+1}{2} \right)^{\rho-\mu} \times \\ &\quad \times \int_R \left\{ \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\mu B' \right\}' Y \Omega \left\{ \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)^{k-1-\rho} A \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Wir spezialisieren diese Formel auf den Fall  $B = f(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} E$ ,  $A = u_1(Y) E$ , wobei  $u_1(Y)$  eine in  $Y > 0$  beschränkte Lösung des Differentialgleichungssystems (11) sei. Zugleich erweitern wir den Bereich  $G$  auf den vollen Raum  $Y > 0$ . Durch Wahl der Funktion  $f(Y)$  wird später dafür gesorgt, dass alle auftretenden, uneigentlichen Integrale

$$\int_{Y>0} = \lim \int_G \text{ existieren und } \lim \int_R = 0$$

ist, sofern nur der Realteil von  $s$  hinreichend gross ist. Wir machen hiervon bereits Gebrauch und erhalten so aus (24) durch Spurbildung mit Hilfe von (11) und (16) für  $k \leq n$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_k \int_{Y>0} f(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \\
& = (-1)^k \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{k-\mu} \times \\
& \quad \times \int_{Y>0} \left\{ \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\mu f(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} \right\} u_1(Y) [dY] \\
& = (-1)^k \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \binom{k}{\mu} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{k-\mu} \left(s - \frac{n+1}{2}\right)^{\mu-\nu} \times \\
& \quad \times \int_{Y>0} \left\{ \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\nu f(Y) \right\} |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \\
& = (-1)^k \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \sum_{\mu=\nu}^k \binom{k-\nu}{k-\mu} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{k-\mu} \left(s - \frac{n+1}{2}\right)^{\mu-\nu} \times \\
& \quad \times \int_{Y>0} \left\{ \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\nu f(Y) \right\} |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \\
& = (-1)^k \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} s^{k-\nu} \int_{Y>0} \left\{ \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^\nu f(Y) \right\} \times \\
& \quad \times |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY].
\end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung dieser Formel liefert schliesslich für  $k, < n$  ( $\nu = 1, 2, \dots, \rho$ ):

$$\begin{aligned}
& \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_\rho} \int_{Y>0} f(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \\
& = (-1)^{k_1+\dots+k_\rho+\rho} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \dots \sum_{\nu_\rho=0}^{k_\rho} \binom{k_1}{\nu_1} \dots \binom{k_\rho}{\nu_\rho} s^{k_1+\dots+k_\rho-\nu_1-\dots-\nu_\rho} \times \\
& \quad \times \int_{Y>0} \left\{ \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{\nu_1} \dots \sigma \left( \left( Y \frac{\partial}{\partial Y} \right)' \right)^{\nu_\rho} f(Y) \right\} \times \\
& \quad \times |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY]. \quad (25)
\end{aligned}$$

Wir wählen nun speziell  $f(Y) = e^{-2\sigma(Y)}$ . Auf Grund der Entwicklung (21) ist nun festzustellen, dass alle Integrale existieren und die Randintegrale zur Identität (25) keinen Beitrag liefern vorausgesetzt, dass der Realteil von  $s$  hinreichend gross ist. Mit Hilfe von (21) und (22) ergibt sich nun



$$\begin{aligned}
& \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_p} \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(Y)} |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \\
&= (-1)^{k_1+\dots+k_p+p} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \dots \sum_{\nu_p=0}^{k_p} \binom{k_1}{\nu_1} \dots \binom{k_p}{\nu_p} s^{k_1+\dots+k_p-\nu_1-\dots-\nu_p} \times \\
&\quad \times \left\{ (-2\pi)^{\nu_1+\dots+\nu_p} \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(Y)} \sigma(Y^{\nu_1}) \dots \sigma(Y^{\nu_p}) \times \right. \\
&\quad \times |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] + \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_r \\ \mu_1+\dots+\mu_r < \nu_1+\dots+\nu_p}} c_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_p} \times \\
&\quad \left. \times \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(Y)} \sigma(Y^{\mu_1}) \dots \sigma(Y^{\mu_r}) |Y|^{s-(n+1)/2} u_1(Y) [dY] \right\}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Wir führen nun  $y$  und  $Y_1$  an Stelle von  $Y$  durch

$$Y = y Y_1, \quad |Y| = y^n, \quad y > 0$$

ein und verwenden die Beziehung (10). Ferner ist zu beachten, dass  $\lambda_1 = 0$ , d. h.  $u_1(Y)$  homogen vom Grad 0 vorausgesetzt wird. Die Integration nach  $y$  kann dann in (26) mit Hilfe des Eulerschen Gammaintegrals ausgeführt werden. Nach einfacher Rechnung erhält man für die Integrale

$$\begin{aligned}
& I_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}(s, u_1) \\
&= \frac{\Gamma(ns + \nu_1 + \dots + \nu_r)}{\Gamma(ns)} \int_{Y_1>0} u_1(Y_1) (\sigma(Y_1))^{-ns-\nu_1-\dots-\nu_r} \times \\
&\quad \times \sigma(Y_1^{\nu_1}) \dots \sigma(Y_1^{\nu_r}) d\nu_1 \quad (27)
\end{aligned}$$

und

$$I(s, u_1) = \int_{Y_1>0} u_1(Y_1) \sigma(Y_1)^{-ns} d\nu_1 \quad (28)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_p} I(s, u_1) \\
&= (-1)^{k_1+\dots+k_p+p} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \dots \sum_{\nu_p=0}^{k_p} \binom{k_1}{\nu_1} \dots \binom{k_p}{\nu_p} s^{k_1+\dots+k_p-\nu_1-\dots-\nu_p} \times \\
&\quad \times \left\{ (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_p} I_{\nu_1 \dots \nu_p}(s, u_1) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_r \\ \mu_1+\dots+\mu_r < \nu_1+\dots+\nu_p}} c_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_p} (2\pi)^{-\mu_1-\dots-\mu_r} I_{\mu_1, \dots, \mu_r}(s, u_1) \right\}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Für das zu  $(\nu_1, \dots, \nu_p) = (k_1, \dots, k_p)$  gehörige Integral ergibt sich hieraus eine Darstellung der Art

$$I_{k_1 k_2 \dots k_p}(s, u_1) = (-1)^p \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_p} I(s, u_1) + \\ + \dots \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_r \\ \mu_1 + \dots + \mu_r < k_1 + \dots + k_p}} p_{k_1 \dots k_p}^{\mu_1 \dots \mu_r}(s) I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}(s, u_1), \quad (30)$$

wobei  $p_{k_1 \dots k_p}^{\mu_1 \dots \mu_r}(s)$  entweder 0 oder ein Polynom in  $s$  vom Grade höchstens  $k_1 + \dots + k_p - \mu_1 - \dots - \mu_r$  ist. Da die Koeffizienten  $c_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_p}$  gemäss ihrer Herkunft von den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  unabhängig sind, so trifft dies auch für die Polynome  $p_{k_1 \dots k_p}^{\mu_1 \dots \mu_r}(s)$  zu. Mit vollständiger Induktion nach  $k_1 + k_2 + \dots + k_p$  folgt nun auf Grund von (30), dass

$$I_{k_1 k_2 \dots k_p}(s, u_1) = q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s) I(s, u_1) \quad (31)$$

ist, wobei  $q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s)$  entweder 0 oder ein Polynom vom Grade höchstens  $k_1 + k_2 + \dots + k_p$  ist. Für  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = 0$ , d.h. also  $k_1 = k_2 = \dots = k_p = 0$  ist  $q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s) = n^p$  evident. Allgemein beweisen wir nun, dass

$$q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s) = n^p s^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} + \text{niedere Potenzen von } s \quad (32)$$

ist. Wir schliessen wieder mit vollständiger Induktion nach  $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ . Sei  $k_1 + k_2 + \dots + k_p > 0$  und

$$q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s) = c s^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} + \text{niedere Potenzen von } s,$$

$$q_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}(s) = n^r s^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r} + \text{niedere Potenzen von } s$$

für  $\mu_1 + \dots + \mu_r < k_1 + \dots + k_p$ .

Wir gehen mit diesem Ansatz in (29). Nach Kürzung durch  $I(s_1 u_1)$  erhalten wir eine Polynomidentität. Die Potenz  $s^{k_1 + k_2 + \dots + k_p}$  erscheint nur auf der rechten Seite der Gleichung. Der Koeffizient von  $s^{k_1 + k_2 + \dots + k_p}$  ist daher gleich 0. Demzufolge ist

$$\sum_{\substack{k_1 \\ \nu_1=0}}^{k_1} \dots \sum_{\substack{k_p \\ \nu_p=0}}^{k_p} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_p} \binom{k_1}{\nu_1} \dots \binom{k_p}{\nu_p} n^{\nu_1+\dots+\nu_p} + \\ + (-1)^{k_1+\dots+k_p} c = 0,$$

woraus  $c = n^p$  zu entnehmen ist, da mindestens ein  $k_p > 0$  ist. Schliesslich zeigen wir noch, dass auch der Koeffizient von  $s^{k_1+\dots+k_p-1}$  in  $q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s)$  von den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  unabhängig ist. Für  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1$  ist das evident zufolge

$$q_{k_1 k_2 \dots k_p}(s) = n^p s \quad \text{für } k_1 + k_2 + \dots + k_p = 1.$$

Für  $k_1 + k_2 + \dots + k_p > 1$  folgt die Behauptung mit vollständiger Induktion, wenn man mit dem Ansatz (31) in (30) geht.

Wegen  $|Y_1| = 1$  besteht auf Grund der Newtonschen Formeln über elementar-symmetrische Funktionen eine Identität der Art

$$\sigma(Y_1^n) = (-1)^{n+1} n + \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_r < n \\ \nu_1 + \dots + \nu_r = n}} d_{\nu_1 \dots \nu_r} \sigma(Y^{\nu_1}) \dots \sigma(Y^{\nu_r}) \quad (33)$$

mit konstanten Koeffizienten  $d_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}$ . Damit wird

$$I_n(s, u_1) = \frac{\Gamma(ns+n)}{\Gamma(ns)} \int_{Y_1 > 0} u_1(Y) (\sigma(Y_1))^{-ns-n} \sigma(Y_1^n) dv_1 \\ = (-1)^{n+1} n \frac{\Gamma(ns+n)}{\Gamma(ns)} I(s+1, u_1) + \\ + \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_r < n \\ \nu_1 + \dots + \nu_r = n}} d_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} I_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}(s, u_1),$$

also 
$$\frac{\Gamma(ns+n)}{\Gamma(ns)} I(s+1, u_1) = q(s) I(s, u_1)$$

mit

$$q(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( q_n(s) - \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_r < n \\ \nu_1 + \dots + \nu_r = n}} d_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} q_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}(s) \right).$$

Dies ist ein Polynom in  $s$  vom Grade  $n$ . Die Potenz  $s^n$  erscheint in  $q(s)$  mit dem Koeffizienten

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( n - \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_r < n \\ \nu_1 + \dots + \nu_r = n}} d_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} n^r \right).$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich 1, wie man sofort feststellt, wenn man in (33)  $Y_1 = E$  setzt. Da die Koeffizienten  $d_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}$  natürlich von den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  unabhängig sind, so folgt auf Grund der  $q_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}(s)$  betreffenden Feststellungen sofort, dass auch der Koeffizient, mit welchem  $s^{n-1}$  in  $q(s)$  erscheint, nicht von  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  abhängt. Wird also

$$q(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n) \quad (34)$$

gesetzt, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ von } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ unabhängig.} \quad (35)$$

Mit Hilfe von  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  ergibt sich schliesslich

$$I(s+1, u_1) = \frac{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n)}{n^n s(s+1/n) \dots (s + (n-1)/n)} I(s, u_1). \quad (36)$$

Die explizite Berechnung von  $I(s, u_1)$  erfolgt nun auf Grund dieser Transformationsformel nach einer von H. Huber kürzlich angegebenen Methode. Offenbar zeigt die Funktion

$$G(s) = \frac{\Gamma(s - \alpha_1) \Gamma(s - \alpha_2) \dots \Gamma(s - \alpha_n)}{n^n \Gamma(s) \Gamma(s + 1/n) \dots \Gamma(s + (n-1)/n)} \quad (37)$$

bezüglich der Substitution  $s \rightarrow s+1$  dasselbe Verhalten wie  $I(s, u_1)$ ; d. h.

$$H(s, u_1) = \frac{I(s, u_1)}{G(s)} \quad (38)$$

ist eine periodische Funktion von  $s$ :

$$H(s+1, u_1) = H(s, u_1). \quad (39)$$

Da  $H(s, u_1)$  für hinreichend grosse Werte des Realteils von  $s$  eine reguläre Funktion von  $s$  darstellt, so ist  $H(s, u_1)$  eine ganze Funktion von  $s$ . Wir werden beweisen, dass sie konstant ist. Zufolge

$$\Gamma(s-a) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-a-\frac{1}{2}} e^{-s} \text{ für } s \rightarrow \infty$$

wird

$$G(s) \sim n^{-ns} s^{-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n - (n-1)/2} \text{ für } s \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Der asymptotische Wert von  $G(s)$  ist also nach (35) von  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  unabhängig. Wir wählen nun speziell  $u_1 \equiv 1$  und erhalten mit der bekannten Verallgemeinerung des Gammaintegrals [3]

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^{-ns} \pi^{n(n-1)/4} \Gamma(s) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right) \\
&= \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(Y)} |Y|^{s-(n+1)/2} [dY] \\
&= \frac{1}{c_n} \int_{Y_1>0} \int_{y>0} e^{-2\pi y\sigma(Y_1)} y^{ns-1} dy dv_1 = \frac{1}{c_n} (2\pi)^{-ns} \Gamma(ns) I(s, 1),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
I(s, 1) &= c_n \pi^{n(n-1)/4} \frac{\Gamma(s) \Gamma(s - 1/2) \dots \Gamma(s - (n-1)/2)}{\Gamma(ns)} \\
&= \frac{(2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} \Gamma(s) \Gamma(s - 1/2) \dots \Gamma(s - (n-1)/2)}{n^{ns} \Gamma(s) \Gamma(s + 1/n) \dots \Gamma(s + (n-1)/n)}, \quad (41)
\end{aligned}$$

mithin

$$\frac{I(s+1, 1)}{I(s, 1)} = \frac{s(s-1/2)\dots(s-\frac{1}{2}(n-1)/2)}{n^n s(s+1/n)\dots(s+(n-1)/n)}.$$

Ein Vergleich mit (37) liefert

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n(n-1)/4. \quad (42)$$

Aus der Darstellung (41) ergibt sich sofort

$$I(s, 1) \sim (2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} n^{-ns} s^{-(n+2)(n-1)/4} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad (43)$$

und

$$I(s, 1) \sim (2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} G(s) \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Im folgenden durchlaufe  $k$  die Reihe der natürlichen Zahlen. Beachtet man

$$G(s+k) \sim n^{-ns} G(k) \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

so folgt mit  $w(Y) = u_1(Y) \left(\frac{\sigma(Y)}{n}\right)^{-ns}$  zufolge (39)

$$\begin{aligned}
H(s, u_1) &= H(s+k, u_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(s+k, u_1)}{G(s+k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(s+k, u_1)}{n^{-ns} G(k)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(k, w)}{G(k)} = (2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(k, w)}{I(k, 1)}.
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu beweisen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(k, w)}{I(k, 1)} = w(E) \quad (44)$$

ist für stetige und beschränkte Funktionen  $w(Y_1)$ . Es folgt dann sofort

$$H(s, u_1) = (2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} u_1(E). \quad (45)$$

Da  $I(k, w)$  in  $w$  linear ist, genügt es, (44) für den Fall  $w(E) = 0$  zu beweisen, was nun geschehen soll. Stellt man  $\sigma(Y)$  und  $|Y|$  durch die charakteristischen Wurzeln von  $Y$  dar, so erkennt man, dass  $\sigma(Y) \geq n |Y|^{1/n}$  für  $Y > 0$  gilt. Insbesondere folgt also  $\sigma(Y_1) \geq n$  für  $Y_1 > 0$ ,  $|Y_1| = 1$ . Man überlegt sich ferner, dass das Minimum  $\sigma(Y_1) = n$  nur für  $Y_1 = E$  angenommen wird. Dies hat  $Y_1 \rightarrow E$  für  $\sigma(Y_1) \rightarrow n$  zur Folge. Es lässt sich also zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  finden, so dass

$$|w(Y_1)| > \epsilon \text{ für } \sigma(Y_1) < n(1 + \delta)$$

gilt. Schliesslich sei  $|w(Y_1)| < C$  für alle  $Y_1$ . Es folgt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(k, w)}{I(k, 1)} \right| &< \epsilon \frac{\int_{\sigma(Y_1) \leq n(1+\delta)} (\sigma(Y_1))^{-nk} dv_1}{I(k, 1)} + \\ &+ C \frac{\int_{\sigma(Y_1) \geq n(1+\delta)} (\sigma(Y_1))^{-nk} dv_1}{I(k, 1)} \\ &< \epsilon + C(1 + \delta)^{-(nk)/2} n^{-(nk)/2} \frac{I(k/2, 1)}{I(k, 1)}. \end{aligned}$$

Nach (43) ist aber

$$n^{-(nk)/2} \frac{I(k/2, 1)}{I(k, 1)} \sim 2^{(n+2)(n-1)/4} \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

mithin wird

$$\left| \frac{I(k, w)}{I(k, 1)} \right| < 2\epsilon \text{ für } k \geq k_0(\epsilon)$$

waranus (44) für  $w(E) = 0$  erhält.

Die Berechnung der fraglichen Integrale ist damit geleistet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(Y)} u_1(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY] &= \frac{1}{c_n} (2\pi)^{-ns} \Gamma(ns) I(s, u_1) \\ &= \frac{1}{c_n} (2\pi)^{-ns} \Gamma(ns) G(s) H(s, u_1) \\ &= \frac{1}{c_n} (2\pi)^{-ns} \Gamma(ns) n^{-ns} \frac{\Gamma(s-\alpha_1)\Gamma(s-\alpha_2)\dots\Gamma(s-\alpha_n)}{\Gamma(s)\Gamma(s+1/n)\dots\Gamma(s+(n-1)/n)} \times \\ &\quad \times (2\pi)^{(n+2)(n-1)/4} u_1(E) \\ &= (2\pi)^{-ns} \Gamma(s-\alpha_1)\Gamma(s-\alpha_2)\dots\Gamma(s-\alpha_n) \pi^{n(n-1)/4} u_1(E) \end{aligned}$$

und damit das eingangs formulierte Resultat.

### SCHRIFTENVERZEICHNIS

1. H. MAASS: Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen  
*Math. Annalen* 122 (1950), 90-108.
2. W. ROELOKE: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art, *Sitz. Bericht. d. Heidelberger. Akad. der. Wiss. Math. Naturwiss. Klasse.* (im Druck).
3. C. L. SIEGEL: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, *Ann. of Math.* 36 (1935), 527-606, insbesondere Hilfssatz 37.