21

MAASS, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 385—390 (1953)

Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen.

Von
HANS MAASS.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß eine allgemeine Klasse von selbstadjungierten Eigenwertproblemen der Art

$$M[y] = \lambda N[y], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m) \tag{1}$$

auf lineare homogene Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern zurückgeführt werden kann. Dabei ist wie üblich

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \left(f_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}, \qquad N[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(g_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}$$

gesetzt worden, während

$$U_\mu[y] = \sum_{\nu=0}^{2m-1} \left(\alpha_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(b)\right) \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

unabhängige Linearformen in $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ bezeichnen. Die Funktionen $f_\nu(x)$ und $g_\nu(x)$ seien im Intervall $a \leq x \leq b$ ν-mal stetig differenzierbar. Ferner sei $f_m(x) \neq 0$ für $a \leq x \leq b$ und $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (1). Dann existiert die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ des Randwertproblems

$$M[y] = f, \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m),$$

und das Eigenwertproblem (1) ist mit der Integrodifferentialgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi \tag{2}$$

äquivalent.

Bei der Reduktion von (2) auf eine gewöhnliche lineare homogene Integralgleichung beschränkt man sich in der Literatur entweder auf die sog. Eingliedklasse[1]), wobei zusätzliche Voraussetzungen betreffs der Randbedingungen und n gemacht werden, oder aber man nimmt einen unsymmetrischen Kern in Kauf[2]), so daß die Frage nach der Existenz von Eigenfunktionen auf

[1]) COLLATZ, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945.
[2]) BUSCHAM, W.: Die Zurückführung von speziellen linearen Integrodifferentialgleichungen auf gewöhnliche Integralgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 32, 20—21 (1952).

diesem Wege nicht geklärt werden kann [3]). Mit Hilfe eines einfachen Gedankens wird hier das für die Eingliedklasse entwickelte Reduktionsverfahren auf solche Eigenwertprobleme verallgemeinert, die folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. $n < m$.

2. Es ist $g_\nu(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$, sofern $g_\nu(x)$ nicht identisch verschwindet $(0 \leq \nu \leq n)$.

3. Genügen $u(x)$ und $v(x)$ den Randbedingungen, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(g_\nu(x)\, v^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 .$$

Wir dürfen also

$$N[y] = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(h_\nu(x)\, y^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu)}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r = n,$$
$$h_\nu(x) > 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b, \quad 1 \leq \nu \leq r$$

ansetzen. Diese Darstellung ist aus beweistechnischen Gründen zweckmäßig. Die dritte Forderung nimmt nun die Gestalt

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(h_\nu(x)\, v^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$

an. Da die Funktionen

$$u(x) = G(x, \xi), \qquad v(x) = \frac{\partial^{n_\mu} G(x, \eta)}{\partial \eta^{n_\mu}}$$

bekanntlich den Randbedingungen genügen, wenn ξ und η im offenen Intervall (a, b) fest gewählt werden, so können wir zunächst einmal

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial x^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial x^{n_\nu-\varrho-1}} \left(h_\nu(x) \frac{\partial^{n_\nu+n_\mu} G(x,\eta)}{\partial x^{n_\nu} \partial \eta^{n_\mu}}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = 0$$

identisch in $a < \xi, \eta < b$ notieren.

---

[3]) N. J. LEHMANN [Math. Nachr. 5, 139—160 (1951)] hat bereits allgemeine Eigenwertprobleme mit den Methoden der Integralgleichungstheorie behandelt. Doch handelt es sich dabei nicht um eine Reduktion auf reine Integralgleichungen; vielmehr wird gezeigt, daß die E. SCHMIDTsche Integralgleichungstheorie auf gewisse Arten von Integrodifferentialgleichungen, wie man sie aus (2) durch partielle Integrationen gewinnt, verallgemeinert werden kann. Hinsichtlich der Bedeutung, die den Untersuchungen von E. HÖLDER in diesem Zusammenhang zukommt, sei auf LEHMANN l. c. Fußnote [3]) hingewiesen. Schließlich sei noch bemerkt, daß die in der vorliegenden Note erzielten Ergebnisse über die Existenz von Eigenfunktionen mühelos aus einem allgemeinen Satz von H. WIELANDT [Math. Nachr. 4, 308—314 (1950/51)] abgeleitet werden können, wenn man dort das Skalarprodukt (y, z) durch

$$(y, z) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\, \bar{z}^{(\nu)}(x)\, dx$$

und die Operation $y = Lz$ durch

$$M[y] = N[z], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

erklärt.

Die Integrodifferentialgleichung (2) wird nun in ein homogenes System von gewöhnlichen Integralgleichungen übergeführt. Beachtet man, daß (3) für $u(\xi) = G(x, \xi)$, $v(\xi) = y(\xi)$ gilt, wenn $y(\xi)$ eine Eigenfunktion darstellt und x im Intervall (a, b) fest gewählt wird, so erhält man aus (2) durch partielle Integration

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x, \xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} h_\nu(\xi)\, y^{(n_\nu)}(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Die n_μ-te Ableitung nach x kann hier wegen $n < m$ formal unter dem Integralzeichen gebildet werden. Für die Funktionen

$$\varphi_\mu(x) = \sqrt{h_\mu(x)}\, y^{(n_\mu)}(x) \qquad (1 \leq \mu \leq r) \tag{6}$$

ergibt sich so das Integralgleichungssystem

$$\varphi_\mu(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Sehen wir μ als eine mit x gleichberechtigte (diskrete) Variable und die Summation über ν als eine besondere Art der Integration an, so läßt sich das System (7) auch als eine einzige Integralgleichung auffassen. Ihr Kern

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)} \tag{8}$$

ist wegen $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ symmetrisch:

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = K(\nu, \xi; \mu, x).$$

Folglich läßt sich die von E. Schmidt entwickelte Theorie[4]) auf das System (7) vollständig übertragen. Insbesondere ist folgendes festzustellen: Alle Eigenwerte λ von (7) sind reell und liegen diskret; es gibt mindestens einen. Bilden $\varphi_{1\mu}(x), \varphi_{2\mu}(x), \varphi_{3\mu}(x), \ldots$ ein vollständiges System von reellen, orthogonalen und normierten Eigenfunktionen:

$$\sum_{\mu=1}^{r} \int_a^b \varphi_{k\mu}(x)\, \varphi_{l\mu}(x)\, dx = \delta_{kl} \quad (= \text{Kroneckersymbol})$$

und wird $\chi_\mu(x)$ durch den Kern mit stetigem $\omega_\nu(\xi)$ dargestellt:

$$\chi_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b K(\mu, x; \nu, \xi)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

so gilt mit konstanten c_k eine Entwicklung der Art

$$\chi_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_{k\mu}(x), \tag{10}$$

die im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

---

[4]) Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Ann. 63, 433—476 (1907).

Umgekehrt ist jetzt zu zeigen, daß jeder Lösung $\varphi_\mu(x)$ des Systems (7) auch eine Lösung $y(x)$ der Integrodifferentialgleichung (2) in der angegebenen Weise entspricht. Zufolge (5) und (6) ist

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x,\xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

anzusetzen. Um hier gewisse partielle Integrationen ausführen zu können, müssen wir zunächst beweisen, daß $\varphi_\mu(x)$ nach x n_μ-mal stetig differenziert werden kann. Da $\frac{\partial^{\varrho+\sigma} G(x,\xi)}{\partial x^\varrho \partial \xi^\sigma}$ für $\varrho+\sigma \leq 2m-2$ in $a \leq x,\ \xi \leq b$ und für $\varrho \leq 2m$, $\sigma \leq 2m$ in den Teilbereichen $a \leq x < \xi \leq b$ und $a \leq \xi < x \leq b$ gleichmäßig stetig ist, so folgt aus (7), daß $\varphi_\mu(x)$ jedenfalls einmal stetig differenzierbar ist. Setzen wir $\mathrm{Min}(n_\nu, \varrho) = \varrho_\nu$ für eine natürliche Zahl ϱ und nehmen an, $\varphi_\nu(x)$ sei ϱ_ν-mal stetig differenzierbar, so liefert partielle Integration

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &= \lambda \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\varrho_\nu} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu+n_\nu-\varrho_\nu} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu-\varrho_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(\varrho_\nu)} d\xi + \\ &\quad + \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\sigma=0}^{\varrho_\nu-1} (-1)^\sigma \frac{\partial^{n_\mu+n_\nu-\sigma-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu-\sigma-1}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(\sigma)} \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{aligned}\right.$$

woraus zu ersehen ist, daß $\varphi_\mu(x)$ auch $(\varrho+1)_\mu$-mal stetig differenzierbar ist; denn es ist

$$\begin{aligned} (\varrho+1)_\mu + n_\mu + n_\nu - \varrho_\nu &= \mathrm{Min}(\varrho+1, n_\mu) - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu \\ &\leq \varrho + 1 - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu = \mathrm{Max}(\varrho+1+n_\mu, n_\mu+n_\nu+1) \\ &\leq 2n_r + 1 \leq 2m-1, \end{aligned}$$

wenn $\varrho \leq n_r$ angenommen wird. Vollständige Induktion nach ϱ zeigt schließlich, daß $\varphi_\mu^{(n_\mu)}(x)$ existiert und stetig ist.

Mit Hilfe partieller Integrationen können wir nun (11) in

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_a^b G(x,\xi) \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right)^{(n_\nu)} d\xi - \\ &\quad - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial \xi^{n_\nu-\varrho-1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} \end{aligned}\right.$$

überführen. Andererseits folgt aus (11) mit Hilfe von (7) sofort (6) und damit

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi - \\ &\quad - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial \xi^{n_\nu-\varrho-1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{aligned}\right.$$

so daß nur noch das Verschwinden dieser Doppelsumme gezeigt zu werden braucht. Mit Hilfe von (7) erhält man in der Tat

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\,\varphi_\nu(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\\
&-\lambda\sum_{\mu=1}^{r}\int_a^b\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\frac{\partial^{n_\nu+n_\mu}G(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n_\nu}\partial\eta^{n_\mu}}\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\}\times\\
&\quad\times\sqrt{h_\mu(\eta)}\,\varphi_\mu(\eta)\,d\eta=0
\end{aligned}\right.
$$

für $a<x<b$; denn die Doppelsumme in der geschweiften Klammer verschwindet identisch in $a<x$, $\eta<b$. Das folgt aus (4), wenn man hierin x mit ξ vertauscht. Die Äquivalenz von (2) und (7) ist damit bewiesen.

Wir wollen noch kurz feststellen, in welcher Weise sich der HILBERTsche Entwicklungssatz (10) auf die Integrodifferentialgleichung überträgt. Es bezeichne $w(x)$ eine Vergleichsfunktion; sie ist also $2m$-mal stetig differenzierbar und genügt den Randbedingungen. Wir setzen $M[w]=f$ und bestimmen v aus $N[v]=f$. Dann ist

$$
(16)\qquad w(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,N[v(\xi)]\,d\xi.
$$

Für die n_μ-te Ableitung von $w(x)$ ergibt sich nach partiellen Integrationen

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sqrt{h_\mu(x)}\left\{w^{(n_\mu)}(x)-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^{n_\mu+\varrho}G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu}\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\}\\
&\qquad=\sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi
\end{aligned}\right.
$$

mit

$$
(18)\qquad \omega_\nu(\xi)=\sqrt{h_\nu(\xi)}\,v^{(n_\nu)}(\xi).
$$

Der Eigenfunktion $\varphi_{k\mu}(x)$ von (7) möge die Eigenfunktion $y_k(x)$ von (2) entsprechen. Zufolge (6) ist

$$
(19)\qquad \varphi_{k\mu}(x)=\sqrt{h_\mu(x)}\,y_k^{(n_\mu)}(x).
$$

Der HILBERTsche Entwicklungssatz liefert nun gleichmäßig konvergente Entwicklungen der Art

$$
(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi=\sqrt{h_\mu(x)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k^{(n_\mu)}(x).
$$

n_1-malige Integration der für $\mu=1$ aus (17) und (20) resultierenden Identität ergibt schließlich

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
w(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k(x)+\sum_{\varrho=0}^{n_1-1}d_\varrho x^\varrho+\\
&\quad+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}.
\end{aligned}\right.
$$

Wie bekannte Beispiele zeigen, kann ohne zusätzliche Voraussetzung nicht erwartet werden, daß stets

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, y_k(x) \tag{22}$$

gilt. Beweisbar ist (22), wenn unter den Randbedingungen die Bedingungen

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0 \tag{23}$$

vorkommen. Dann ist nämlich

$$\frac{\partial^\varrho G(x,a)}{\partial a^\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad a < x \leqq b, \qquad 0 \leqq \varrho < n_r,$$

während

$$v^{(\nu)}(b) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu < 2n_r$$

durch geeignete Wahl von v erreicht werden kann. Die Doppelsumme in (21) verschwindet also identisch. Bildet man nun noch die Ableitungen von $w(x)$ an der Stelle $x = a$ bis zur $(n_1 - 1)$-ten Ordnung, so folgt bei Berücksichtigung der Randbedingungen auch noch $d_\varrho = 0$ für $0 \leqq \varrho < n_1$.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)