Maass, H.
Math. Annalen. Bd. 126, S. 44–68 (1953).

Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen.

Von
Hans Maass in Heidelberg.

Einleitung.

Es hat sich gezeigt, daß eine angemessene Kennzeichnung der automorphen Formen in der analytischen Zahlentheorie der indefiniten quadratischen Formen durch Differentialgleichungen erfolgen kann. Für die elliptischen Modulfunktionen ergaben sich bereits abschließende Resultate[1]). Der vorliegende Aufsatz soll die in Aussicht gestellte Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf die Siegelschen Modulfunktionen vorbereiten. Ich beschränke mich hier auf die Übertragung des formalen Teils, der sich auf das Rechnen mit den Differentialoperatoren gründet, und verwende demgemäß nur einen vorläufigen Formenbegriff. Dieser ist bei einem funktionentheoretischen Ausbau der Theorie durch eine besondere Vorschrift über das Verhalten der Formen in den „Spitzen" des Fundamentalbereichs der zugrunde liegenden Gruppe zu präzisieren. Es handelte sich zunächst einmal darum, die in[1]) eingeführten Differentialoperatoren K_α und Λ_β sinngemäß auf Formen n-ten Grades zu verallgemeinern. Das kann und muß auf zwei verschiedene Weisen geschehen entsprechend der Tatsache, daß die Operatoren zwei voneinander unabhängigen Aufgaben dienen: Einerseits sind aus K_α und Λ_β die Differentialgleichungen für die Eisenstein-Reihen abzuleiten, andererseits vermitteln K_α und Λ_β den Übergang zwischen Eisenstein-Reihen zu verschiedenen Gewichten. Es ist eine Besonderheit des Falles $n = 1$, daß hier K_α und Λ_β beides zugleich leisten. Da außer einer bescheidenen Analogie keine besonderen Anhaltspunkte vorlagen, so mußten die verallgemeinerten Operatoren zum Teil erraten, zum Teil errechnet werden. Überraschend war dabei, wie glatt sich die Operatorenrechnungen in den Matrizenkalkül einfügen.

Im folgenden seien $X = (x_{\mu\nu})$ und $Y = (y_{\mu\nu})$ n-reihige symmetrische Matrizen. Die Elemente $z_{\mu\nu}$ und $w_{\mu\nu}$ $(\mu \leqq \nu)$ der Matrizen $Z = X + i\,Y$ und $W = X - i\,Y$ können als unabhängige komplexe Variable angesehen werden. Im eigentlichen Operationsgebiet sind jedoch X, Y reell und $Y > 0$. Wir betrachten nun analog zum elliptischen Fall die Eisenstein-Reihen n-ten Grades

$$G(Z, W; \alpha, \beta) = \sum_{C, D}{}' \gamma(C, D)\, |C\,Z + D|^{-\alpha}\, |C\,W + D|^{-\beta}, \tag{1}$$

wobei C, D, etwa ein volles System nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare durchlaufen möge und

$$|C\,Z + D|^{-\alpha} = e^{-\alpha \log |C\,Z + D|}, \quad |C\,W + D|^{-\beta} = e^{-\beta \log |C\,W + D|}$$

[1]) Maass, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **125**, 235—263 (1953).

sei. Da die Mannigfaltigkeit $W = \bar{Z}$, $Y > 0$ einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt, in welchem $|CZ + D|$ und $|CW + D|$ nicht verschwinden, so lassen sich die vieldeutigen analytischen Funktionen $\log|CZ + D|$ und $\log|CW + D|$ in $W = \bar{Z}$, $Y > 0$ eindeutig erklären und zwar so, daß

$$\log|CZ + D| + \log|CW + D| \qquad \text{für } W = \bar{Z}$$

reell wird. Eine derartige Auswahl der Funktionszweige denken wir uns im folgenden irgendwie realisiert.

Es ist nicht zu erwarten, daß zur Kennzeichnung der Formen vom Typus (1) eine Differentialgleichung ausreicht; man wird hierzu vielmehr eines Systems von Differentialgleichungen bedürfen. Man erhält ein solches in folgender Weise: Es bezeichne $\delta_{\mu\nu}$ das Kronecker-Symbol und E die n-reihige Einheitsmatrix. Mit $e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{\mu\nu})$ wird

(2) $$\mathsf{D}_z = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial z_{\mu\nu}}\right), \quad \mathsf{D}_w = \left(e_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\nu}}\right) \qquad (1 \leq \mu, \nu \leq n)$$

und

(3) $$\mathsf{K}_\alpha = \alpha E + (Z - W)\,\mathsf{D}_z, \quad \Lambda_\beta = -\beta E + (Z - W)\,\mathsf{D}_w$$

gesetzt. Sodann stellt

(4) $$\Omega_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta - \frac{n+1}{2}} \mathsf{K}_\alpha + \alpha\left(\beta - \frac{n+1}{2}\right) E$$

ein System von n^2 Differentialoperatoren zweiter Ordnung dar, welche die Eisenstein-Reihen (1) sämtlich annullieren. Wird die Transposition einer Matrix in der üblichen Weise durch einen hochgestellten Strich angezeigt, so gilt

(5) $$\Omega_{\alpha\beta} = (Z - W)\,((Z - W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z + \alpha(Z - W)\,\mathsf{D}_w - \beta(Z - W)\,\mathsf{D}_z\,.$$

Die Umrechnung des Operators $Y^{-1}\Omega_{\alpha\beta}$ auf die Elemente von X, Y führt zugleich zu einer Zerlegung der Matrix in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Bestandteil. Demgemäß ist das Differentialgleichungssystem

(6) $$\Omega_{\alpha\beta} f = 0$$

mit dem System

(7) $$\begin{gathered} \{(Y\,\mathsf{D}_x)'\,\mathsf{D}_x + (Y\,\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_y + i(\beta - \alpha)\,\mathsf{D}_x + (\alpha + \beta)\,\mathsf{D}_y\}\, f = 0, \\ \{(Y\,\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_x - (Y\,\mathsf{D}_x)'\,\mathsf{D}_y\}\, f = 0 \end{gathered}$$

äquivalent. Die Operatoren D_x und D_y sind hier analog zu D_z zu bilden. Es zeigt sich noch, daß $\Omega_{\alpha\beta}$ und

(8) $$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \mathsf{K}_{\alpha - \frac{n+1}{2}} \Lambda_\beta + \beta\left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right) E$$

dieselben Funktionen annullieren. Invarianzuntersuchungen ergeben zudem den Laplace-Beltramischen Differentialoperator für die symplektische Metrik in der Gestalt

(9) $$\Delta = -\operatorname{Sp}(Z - W)\,((Z - W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z\,.$$

Es sei $\{\alpha, \beta\}$ die Schar der in $W = \bar{Z}$, $Y>0$ regulär-analytischen Funktionen $f(Z, W)$, die durch $\Omega_{\alpha\beta}$ annulliert werden. Für symplektische Substitutionen $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und $f(Z, W) \subset \{\alpha, \beta\}$ wird

$$f(Z, W) \mid \sigma = |CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta} f(\sigma Z, \sigma W) \tag{10}$$

mit

$$\sigma Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad \sigma W = (AW + B)(CW + D)^{-1} \tag{11}$$

gesetzt. Die vorgenommenen Bildungen sind durch die Tatsache der Invarianz von $\{\alpha, \beta\}$ gegenüber symplektischen Substitutionen:

$$\{\alpha, \beta\} \mid \sigma = \{\alpha, \beta\} \tag{12}$$

hinreichend gerechtfertigt.

Es sei G eine Gruppe von symplektischen Substitutionen und $v(\sigma)$ ein für $\sigma \subset \mathsf{G}$ erklärtes Zahlensystem mit gewissen multiplikativen Eigenschaften. Unter der Formenschar $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ ist die Gesamtheit der Funktionen $f(Z, W)$ zu verstehen, die den Bedingungen

1. $f(Z, W) \subset \{\alpha, \beta\}$
2. $f(Z, W) \mid \sigma = v(\sigma) f(Z, W)$ für $\sigma \subset \mathsf{G}$

genügen. Die Transformationsformel

$$\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \mid \sigma = \{\sigma^{-1} \mathsf{G} \sigma; \alpha, \beta, v^\sigma\} \tag{13}$$

für eine beliebige symplektische Substitution σ ist unmittelbar zu prüfen. Dabei ist v^σ nach bestimmter Vorschrift aus v und σ abzuleiten.

Die Frage nach den funktionalen Beziehungen der Formenschar $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ zu den Scharen $\{\mathsf{G}; \alpha \pm 1, \beta \mp 1, v\}$ kann anscheinend nur mit Hilfe von Differentialoperatoren n-ter Ordnung befriedigend beantwortet werden. Eine Behandlung dieses Problems ist durch die Formel

$$|\mathsf{D}_z|\, |Z|^\alpha = \alpha \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\right) |Z|^{\alpha - 1} \tag{14}$$

angeregt worden, die M. KÖCHER in seinen noch nicht publizierten funktionentheoretischen Untersuchungen über nicht-analytische Modulformen n-ten Grades angegeben hat. Herr KÖCHER war so freundlich, mir hiervon Kenntnis zu geben. Der entscheidende Schritt bestand nun in der Verallgemeinerung von (14) auf beliebige Unterdeterminanten von $|\mathsf{D}_z|$ an Stelle von $|\mathsf{D}_z|$. Die weiteren Bildungen waren dann einfach zu übersehen und führten schließlich zu folgender Konstruktion. Für beliebige Teilsysteme $1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n$ und $1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n$ sei

$$\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{pmatrix}_z = |z_{i_\mu k_\nu}| \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{bmatrix}_z = \left| e_{i_\mu k_\nu} \frac{\partial}{\partial z_{i_\mu k_\nu}} \right|. \tag{15}$$

Wird

$$s_h(Z - W, \mathsf{D}_z) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n \\ 1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n}} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{pmatrix}_{z-w} \begin{bmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{bmatrix}_z \tag{16}$$

für $h = 1, 2, \ldots, n$ und

$$s_0(Z - W, \mathsf{D}_z) = 1 \tag{17}$$

sowie

$$(18)\qquad \varepsilon_0(\alpha) = 1,\ \ \varepsilon_h(\alpha) = \alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{2}{2}\right)\cdots\left(\alpha - \frac{h-1}{2}\right)\ \text{ für } h = 1, 2, 3, \ldots$$

gesetzt, so erhält man in

$$(19)\qquad \mathsf{M}_\alpha = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)}\, s_h(Z - W, \mathsf{D}_z)$$

einen Operator n-ter Ordnung, der auf die EISENSTEIN-Reihen die gewünschte Wirkung hat:

$$(20)\qquad \mathsf{M}_\alpha\, G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\alpha)\, G(Z, W; \alpha + 1, \beta - 1).$$

Mit dem durch

$$(21)\qquad \mathsf{X}\, f(Z, W) = f(-W, -Z)$$

erklärten Operator X bilden wir noch

$$(22)\qquad \mathsf{N}_\beta = \mathsf{X}\, \mathsf{M}_\beta\, \mathsf{X}.$$

Als unmittelbare Folge von (20) ist dann

$$(23)\qquad \mathsf{N}_\beta\, G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\beta)\, G(Z, W; \alpha - 1, \beta + 1)$$

zu notieren. Damit ergibt sich auch

$$(24)\qquad (\mathsf{N}_{\beta-1}\, \mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha)\, \varepsilon_n(\beta - 1))\, G(Z, W; \alpha, \beta) = 0,$$

$$(25)\qquad (\mathsf{M}_{\alpha-1}\, \mathsf{N}_\beta - \varepsilon_n(\beta)\, \varepsilon_n(\alpha - 1))\, G(Z, W; \alpha, \beta) = 0.$$

Die Vermutung liegt nahe, daß die in (20), (23), (24), (25) für die Schar der EISENSTEIN-Reihen ausgesprochenen Eigenschaften auch den allgemeinen Formenscharen $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ zukommen. Doch konnte ich dies bisher nur für $n = 2$ beweisen, wenn man vom Fall $n = 1$ absieht, der in [1]) erledigt wurde. Es bleibt zu hoffen, daß man den Beweis bei etwas besserer Beherrschung des Operatorenkalküls auch für die Formen höheren Grades wird erbringen können. Für $n = 2$ gilt also

$$(26)\qquad (\mathsf{N}_{\beta-1}\, \mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha)\, \varepsilon_n(\beta - 1))\, \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} = 0,$$

$$(27)\qquad (\mathsf{M}_{\alpha-1}\, \mathsf{N}_\beta - \varepsilon_n(\beta)\, \varepsilon_n(\alpha - 1))\, \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} = 0,$$

$$(28)\qquad \mathsf{M}_\alpha\, \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \subset \{\mathsf{G}; \alpha + 1, \beta - 1, v\},$$

$$(29)\qquad \mathsf{N}_\beta\, \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \subset \{\mathsf{G}; \alpha - 1, \beta + 1, v\}.$$

In den beiden letzten Relationen ist das Zeichen $\subset$ durch $=$ zu ersetzen, wenn $\varepsilon_n(\alpha)\, \varepsilon_n(\beta - 1) \neq 0$ bzw. $\varepsilon_n(\beta)\, \varepsilon_n(\alpha - 1) \neq 0$ ist. Die durch M_α bzw. N_β vermittelte Abbildung von $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ ist dann umkehrbar eindeutig.

Das Problem der FOURIER-Entwicklung periodischer Formen bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Es genügt natürlich, die in $\{\alpha, \beta\}$ gelegenen Funktionen vom Typus

$$a(Y, T)\, e^{i\, \mathrm{Sp}\, T X}$$

zu ermitteln, wobei T eine beliebige n-reihige symmetrische reelle Matrix bezeichnet. Die lineare Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ der in Frage kommenden Funktionen $a(Y, T)$ ist durch ein System von Differentialgleichungen bestimmt, das sich aus (7) unmittelbar ergibt. Dieses System ist für den Fall $n = 2$ vollständig gelöst worden. Die Endlichkeit des Ranges der linearen Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ für

$T \neq O$ ist wohl das wesentlichste Ergebnis der umfangreichen Rechnungen. Im einzelnen konnte im Fall $n = 2$ folgendes festgestellt werden: Es sei

$$Y = \sqrt{|Y|}\begin{pmatrix}(x^2+y^2)\,y^{-1} & x\,y^{-1}\\ x\,y^{-1} & y^{-1}\end{pmatrix}, \tag{30}$$
$$u = \operatorname{Sp} YT, \quad v = (\operatorname{Sp} YT)^2 - 4\,|YT|.$$

Dann gilt

1. für $T = O$:

$$a(Y, O) = \varphi(x, y)\,|Y|^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} + c_1\,|Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + c_2, \tag{31}$$

wobei $\varphi(x, y)$ eine beliebige für $y > 0$ reguläre Lösung der Wellengleichung

$$y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\,\varphi = 0 \tag{32}$$

darstellt und c_1, c_2 willkürliche Konstanten bezeichnen. Die Fälle $\alpha + \beta = 1, \frac{3}{2}, 2$ erfordern geringfügige Modifikationen und sind hier auszuschließen.

2. für Rang $T = 1$, $T \geqq 0$:

$$a(Y, T) = \varphi(u)\,|Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + \psi(u), \tag{33}$$

wobei $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ konfluente hypergeometrische Funktionen bezeichnen, die den Differentialgleichungen

$$\begin{gathered} u\,\varphi'' + (3 - \alpha - \beta)\,\varphi' + (\alpha - \beta - u)\,\varphi = 0,\\ u\,\psi'' + (\alpha + \beta)\,\psi' + (\alpha - \beta - u)\,\psi = 0\end{gathered} \tag{34}$$

genügen. Die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ hat also den Rang 4. Wegen $\{\alpha, \beta; T\} = \{\beta, \alpha; -T\}$ ist die Voraussetzung $T \geqq 0$ hier unwesentlich, doch muß $\alpha + \beta \neq \frac{3}{2}$ angenommen werden.

3. für $T > 0$:

$$a(Y, T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(u)\,v^\nu \qquad (|v| < u^2). \tag{35}$$

Die Funktionen $g_\nu(u)$ sind hier rekursiv durch

$$4(\nu+1)^2\,u\,g_{\nu+1} + u\,g_\nu'' + 2(2\nu + \alpha + \beta)\,g_\nu' + (2(\alpha - \beta) - u)\,g_\nu = 0 \quad (\nu \geqq 0) \tag{36}$$

und

$$\begin{gathered} g_0(u) = u^{1-\alpha-\beta}\,\psi(u), \quad \psi'(u) = \frac{1}{u}\,\varphi(u),\\ \varphi'' = \left(1 + \frac{2(\beta-\alpha)}{u} + \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{u^2}\right)\varphi\end{gathered} \tag{37}$$

bestimmt. Jede zulässige Funktion $g_0(u)$ führt zu einer in $Y > 0$ konvergenten Reihe. Die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ hat also den Rang 3.

4. für Rang $T = 2$, T indefinit:

$$a(Y, T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(v)\,u^\nu \qquad (u^2 < v). \tag{38}$$

Die Funktionen $h_\nu(v)$ sind hier ebenfalls rekursiv zu berechnen. Es gelten die Formeln

$$(\nu+2)(\nu+1)\,h_{\nu+2} + 4\,v\,h_\nu'' + 4(\alpha + \beta + \nu)\,h_\nu' - h_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 0) \tag{39}$$

und

$$\begin{gathered} 8\,v^2\,h_0''' + 4(2 + 3\alpha + 3\beta)\,v\,h_0'' +\\ + (4(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta-1) - 2v)\,h_0' - (\alpha+\beta)\,h_0 = (\alpha-\beta)\,h_1,\\ 2\,v\,h_1' + (\alpha+\beta)\,h_1 = (\beta-\alpha)\,h_0.\end{gathered} \tag{40}$$

Jede Lösung h_0, h_1 des Systems (40) führt zu einer in $Y > 0$ konvergenten Reihe. Mithin hat die Schar $\{\alpha, \beta; T\}$ den Rang 4.

Es wäre wünschenswert, etwas über das asymptotische Verhalten der Funktionen (35) und (38) bei Annäherung an den Rand des Bereiches $Y > 0$ zu erfahren.

§ 1. Die Operatoren K_α und Λ_β.

Das Ziel der ersten Betrachtungen ist der Nachweis, daß die EISENSTEIN-Reihen (1) den Differentialgleichungen

$$\Omega_{\alpha\beta}\, G(Z, W; \alpha, \beta) = 0 \tag{41}$$

genügen, wobei $\Omega_{\alpha\beta}$ durch (4) erklärt ist. Es genügt natürlich zu zeigen, daß $\Omega_{\alpha\beta}$ das allgemeine Glied $|CZ + D|^{-\alpha}\, |CW + D|^{-\beta}$ annulliert. Für C, D ist hier die zweite Matrizenzeile einer beliebigen symplektischen Substitution zu nehmen. Da die Paare C, D mit $|C| = 0$ eine Mannigfaltigkeit niederer Dimension bilden, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $|C| \neq 0$ voraussetzen. Ziehen wir aus dem allgemeinen Glied den Faktor $|C|^{-\alpha-\beta}$ heraus, so bleibt $|Z + S|^{-\alpha}\, |W + S|^{-\beta}$ mit $S = C^{-1} D$ übrig. Andererseits ist der Operator $\Omega_{\alpha\beta}$ gegenüber der Substitution $Z \to Z + S$, $W \to W + S$ invariant, so daß nur noch

$$\Omega_{\alpha\beta}\, |Z|^{-\alpha}\, |W|^{-\beta} = 0 \tag{42}$$

bewiesen zu werden braucht.

Wir bestimmen zunächst zwei Operatorenhilfsformeln:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_w (Z - W) &= -\frac{n+1}{2}\, E + ((Z - W)\, \mathsf{D}_w)', \\ \mathsf{D}_z (Z - W) &= \frac{n+1}{2}\, E + ((Z - W)\, \mathsf{D}_z)'. \end{aligned} \tag{43}$$

Eine einfache Umformung ergibt in der Tat

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_w (Z - W) &= \left(\sum_{\varrho=1}^{n} e_{\mu\varrho} \frac{\partial}{\partial w_{\mu\varrho}} (z_{\varrho\nu} - w_{\varrho\nu}) \right) \\ &= \left(\sum_{\varrho=1}^{n} (z_{\mu\varrho} - w_{\mu\varrho})\, e_{\varrho\nu} \frac{\partial}{\partial w_{\varrho\nu}} \right)' - \left(\delta_{\mu\nu} \sum_{\varrho=1}^{n} e_{\mu\varrho} \right) \\ &= ((Z - W)\, \mathsf{D}_w)' - \frac{n+1}{2}\, E. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von Z mit W erhält man die zweite Formel. Es folgt nun

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \left\{ -\left(\beta - \frac{n+1}{2}\right) E + (Z - W)\, \mathsf{D}_w \right\} \{\alpha E + (Z - W)\, \mathsf{D}_z\} + \alpha \left(\beta - \frac{n+1}{2}\right) E \\ &= (Z - W)\, \mathsf{D}_w (Z - W)\, \mathsf{D}_z + \alpha\, (Z - W)\, \mathsf{D}_w - \left(\beta - \frac{n+1}{2}\right) (Z - W)\, \mathsf{D}_z \\ &= (Z - W)\, ((Z - W)\, \mathsf{D}_w)'\, \mathsf{D}_z + \alpha\, (Z - W)\, \mathsf{D}_w - \beta\, (Z - W)\, \mathsf{D}_z \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} &= \left\{ \left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right) E + (Z - W)\, \mathsf{D}_z \right\} \{-\beta E + (Z - W)\, \mathsf{D}_w\} + \beta \left(\alpha - \frac{n+1}{2}\right) E \\ &= (Z - W)\, ((Z - W)\, \mathsf{D}_z)'\, \mathsf{D}_w + \alpha\, (Z - W)\, \mathsf{D}_w - \beta\, (Z - W)\, \mathsf{D}_z. \end{aligned}$$

Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix mit Elementen aus einem kommutativen Ring und $A_{\mu\nu}$ das algebraische Komplement zu $a_{\mu\nu}$. Allgemein werde dann $A^* = (A_{\nu\mu})$ gesetzt, so daß $A\,A^* = |A|\,E$ gilt. Man bestätigt sofort

$$\mathsf{D}_z\,|Z|^{-\alpha} = -\alpha\,|Z|^{-\alpha-1}\,Z^*. \tag{44}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}(Z-W)^{-1}\,\Omega_{\alpha\beta}\,|Z|^{-\alpha}\,|W|^{-\beta} &= -\alpha\,\beta\,|Z|^{-\alpha}\,|W|^{-\beta-1}\,W^* + \alpha\,\beta\,|Z|^{-\alpha-1}\,|W|^{-\beta}Z^* - \\ &\quad -\alpha\,|Z|^{-\alpha-1}\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w\,|W|^{-\beta})'\,Z^* \\ &= -\alpha\,\beta\,|Z|^{-\alpha}|W|^{-\beta-1}\,W^* + \alpha\,\beta\,|Z|^{-\alpha-1}\,|W|^{-\beta}Z^* + \\ &\quad + \alpha\,\beta\,|Z|^{-\alpha-1}\,|W|^{-\beta-1}\,W^*(Z-W)\,Z^* = O.\end{aligned}$$

Die Beziehungen (42) und (41) sind nunmehr bewiesen. Da die Matrizen $((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z$ und $((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_w$ durch Transposition auseinander hervorgehen, so folgt noch

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = (Z-W)\,((Z-W)^{-1}\,\Omega_{\alpha\beta})'. \tag{45}$$

Die Operatoren $\Omega_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ annullieren demnach dieselben Funktionen. Die Umrechnung des Operators $\Omega_{\alpha\beta}$ auf die Elemente von X und Y ist mit Hilfe von

$$\mathsf{D}_z = \tfrac{1}{2}\,(\mathsf{D}_x - i\,\mathsf{D}_y)\,,\quad \mathsf{D}_w = \tfrac{1}{2}\,(\mathsf{D}_x + i\,\mathsf{D}_y) \tag{46}$$

auszuführen:

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta} &= -Y(Y(\mathsf{D}_x + i\,\mathsf{D}_y))'\,(\mathsf{D}_x - i\,\mathsf{D}_y) + i\,\alpha\,Y(\mathsf{D}_x + i\,\mathsf{D}_y) - i\,\beta\,Y(\mathsf{D}_x - i\,\mathsf{D}_y),\\ Y^{-1}\,\Omega_{\alpha\beta} &= -(Y\,\mathsf{D}_x)'\,\mathsf{D}_x - (Y\,\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_y + i\,(\alpha-\beta)\,\mathsf{D}_x - (\alpha+\beta)\,\mathsf{D}_y + \\ &\quad + i\,(Y\,\mathsf{D}_x)'\,\mathsf{D}_y - i\,(Y\,\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_x.\end{aligned}$$

Die ersten vier Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung sind symmetrisch, die letzten beiden schiefsymmetrisch. Die Differentialgleichungssysteme (6) und (7) sind daher gleichwertig.

Wir untersuchen nun die Transformationseigenschaften der eingeführten Operatoren bei symplektischen Substitutionen:

$$\hat{Z} = (A\,Z + B)\,(C\,Z + D)^{-1},\quad \hat{W} = (A\,W + B)\,(C\,W + D)^{-1}. \tag{47}$$

Bekanntlich ist

$$\hat{Z} - \hat{W} = (Z\,C' + D')^{-1}\,(Z-W)\,(C\,W + D)^{-1} = (W\,C' + D')^{-1}\,(Z-W)\,(C\,Z + D)^{-1} \tag{48}$$

und

$$d\,\hat{Z} = (Z\,C' + D')^{-1}\,d\,Z\,(C\,Z + D)^{-1},\quad d\,\hat{W} = (W\,C' + D')\,d\,W\,(C\,W + D)^{-1} \tag{49}$$

Das vollständige Differential einer Funktion $f = f(Z, W)$ ist in der Form

$$d\,f = \mathrm{Sp}\,(d\,Z\,\mathsf{D}_z\,f) + \mathrm{Sp}\,(d\,W\,\mathsf{D}_w\,f)$$

darstellbar. Die Transformationsinvarianz dieses Ausdrucks hat

$$\mathrm{Sp}\,(d\,\hat{Z}\,\mathsf{D}_{\hat{z}}\,f) = \mathrm{Sp}\,(d\,Z\,\mathsf{D}_z\,f)\,,\quad \mathrm{Sp}\,(d\,\hat{W}\,\mathsf{D}_{\hat{w}}\,f) = \mathrm{Sp}\,(d\,W\,\mathsf{D}_w\,f)$$

zur Folge. Andererseits ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,(d\,\hat{Z}\,\mathsf{D}_{\hat{z}}\,f) &= \mathrm{Sp}\,\{d\,Z\,(C\,Z + D)^{-1}\,(\mathsf{D}_{\hat{z}}\,f)\,(Z\,C' + D')^{-1}\},\\ \mathrm{Sp}\,(d\,\hat{W}\,\mathsf{D}_{\hat{w}}\,f) &= \mathrm{Sp}\,\{d\,W\,(C\,W + D)^{-1}\,(\mathsf{D}_{\hat{w}}\,f)\,(W\,C' + D')^{-1}\},\end{aligned}$$

mithin

$$(CZ+D)^{-1}(\mathsf{D}_{\hat z} f)(ZC'+D')^{-1} = \mathsf{D}_z f,$$
$$(CW+D)^{-1}(\mathsf{D}_{\hat w} f)(WC'+D')^{-1} = \mathsf{D}_w f.$$

Hieraus ergeben sich die Operatorengleichungen

(50) $\mathsf{D}_{\hat z} = (CZ+D)((CZ+D)\,\mathsf{D}_z)', \quad \mathsf{D}_{\hat w} = (CW+D)((CW+D)\,\mathsf{D}_w)'.$

Beim Beweis der Invarianz des Operators

$$\Delta = \quad \operatorname{Sp}(Z-W)((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z$$

gegenüber symplektischen Substitutionen sind folgende allgemeine Regeln zu beachten: Es seien M_1, M_2, M_3 n-reihige quadratische Matrizen. Die Elemente von M_1 seien mit denen von M_2 vertauschbar. Dann ist

(51) $$\operatorname{Sp} M_1 M_2 = \operatorname{Sp} M_2 M_1,$$

(52) $$(M_1 M_2)' = M_2' M_1',$$

(53) $$(M_1(M_2 M_3)')' = M_2(M_1 M_3')'.$$

Geht Δ bei der Substitution $Z, W \to \hat Z, \hat W$ in $\hat\Delta$ über und bezeichnet $f = f(Z, W)$ eine willkürliche Funktion, so gilt also

$$\begin{aligned} \hat\Delta f &= -\operatorname{Sp}(\hat Z - \hat W)((\hat Z - \hat W)\,\mathsf{D}_{\hat w})'(\mathsf{D}_{\hat z} f) \\ &= -\operatorname{Sp}[(ZC'+D')^{-1}(Z-W)(CW+D)^{-1}\times \\ &\times\{(ZC'+D')^{-1}(Z-W)((CW+D)\,\mathsf{D}_w)'\}'(CZ+D)(\mathsf{D}_z f)(ZC'+D')]. \end{aligned}$$

Die äußeren Faktoren $(ZC'+D')^{-1}$ und $(ZC'+D')$ in der eckigen Klammer fallen nach (51) heraus. Der Faktor $(ZC'+D')^{-1}$ in der geschweiften Klammer fällt mit dem rechten Faktor $(CZ+D)$ der geschweiften Klammer heraus wenn man auf diese (52) anwendet. Es bleibt dann

$$\hat\Delta f = -\operatorname{Sp}[(Z-W)(CW+D)^{-1}\{(Z-W)((CW+D)\,\mathsf{D}_w)'\}'(\mathsf{D}_z f)].$$

Dies ist mit Hilfe von (53) in Δf überzuführen. Damit ist $\hat\Delta = \Delta$ bewiesen. Um die Übereinstimmung von Δ mit dem Laplace-Beltramischen Operator zu prüfen, genügt es wegen des Invarianzcharakters beider Operatoren, wenn wir uns auf die Stelle $Z = -W = iE$ beschränken. In diesem Punkt führen wir das bezüglich der symplektischen Metrik [s. [2])] geodätische Koordinatensystem

(54) $$\tilde Z = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}, \quad \tilde W = (W + iE)(W - iE)^{-1}$$

ein. Analog zu (50) gilt

(55) $$\mathsf{D}_z = -\frac{i}{2}(\tilde Z - E)((\tilde Z - E)\,\mathsf{D}_{\tilde z})', \quad \mathsf{D}_w = \frac{i}{2}(\tilde W - E)((\tilde W - E)\,\mathsf{D}_{\tilde w})'.$$

Mit der angegebenen Methode erhält man sodann

(56) $$\Delta = \operatorname{Sp}(E - \tilde Z\tilde W)((E - \tilde Z\tilde W)\,\mathsf{D}_{\tilde w})'\,\mathsf{D}_{\tilde z}.$$

Setzt man hierin $\tilde Z = \tilde W = O$ und bestimmt man an dieser Stelle den Laplace-Beltramischen Operator, wofür nur die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

$$ds^2 = 4\operatorname{Sp} d\tilde Z(E - \tilde W\tilde Z)^{-1} d\tilde W(E - \tilde Z\tilde W)^{-1}$$

---

[2]) Siegel, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943).

an der betreffenden Stelle benötigt werden, so erhält man dieselben Operatoren. Damit ist schließlich gezeigt, daß Δ überhaupt mit dem Laplace-Beltramischen Operator identisch ist.

Die Transformationsformel für den Operator $\Omega_{\alpha\beta}$ erfordert längere Rechnungen. Entsteht $\hat{\Omega}_{\alpha\beta}$ aus $\Omega_{\alpha\beta}$ durch Ersetzen von Z, W durch $\hat{Z}, \hat{W}$, so gilt

$$(57) \qquad |CZ+D|^{-\alpha}\,|CW+D|^{-\beta}\,\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\,|CZ+D|^{\alpha}\,|CW+D|^{\beta} = (ZC'+D')^{-1}\,((CZ+D)\Omega'_{\alpha\beta})'.$$

Der Beweis für diese Operatorengleichung wird zweckmäßig in mehreren Schritten geführt. Gilt die Transformationsformel (57) für zwei symplektische Substitutionen, dann ist sie auch für das Produkt richtig. Das ist relativ einfach einzusehen, so daß wir hierauf nicht einzugehen brauchen. Es genügt also, die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} E & S \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$$

zu betrachten, aus denen die symplektische Gruppe bekanntlich erzeugt werden kann. Im Falle $\hat{Z} = Z + S$, $\hat{W} = W + S$ wird $\hat{\Omega}_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$ behaupt. e Das ist evident. Wir wenden uns dem zweiten Fall

$$\hat{Z} = U'ZU, \quad \hat{W} = U'WU$$

zu. Mit Hilfe von (50) ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_{\alpha\beta} &= \alpha(\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{w}} - \beta(\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{z}} + (\hat{Z}-\hat{W})\,((\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{w}})'\,\mathsf{D}_{\hat{z}} \\ &= U'\{\alpha(Z-W)\,\mathsf{D}_w - \beta(Z-W)\,\mathsf{D}_z + (Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\mathsf{D}_z\}\,U'^{-1} \\ &= U'\,\Omega_{\alpha\beta}\,U'^{-1} = U'(U^{-1}\,\Omega'_{\alpha\beta})',\end{aligned}$$

also (57). Im dritten Fall

$$\hat{Z} = -Z^{-1}, \quad \hat{W} = -W^{-1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_{\alpha\beta} &= \alpha(\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{w}} - \beta(\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{z}} + (\hat{Z}-\hat{W})\,((\hat{Z}-\hat{W})\,\mathsf{D}_{\hat{w}})'\,\mathsf{D}_{\hat{z}} \\ &= \alpha Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)' - \beta W^{-1}(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \\ &\quad + Z^{-1}(Z-W)\,W^{-1}\{Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)'\}'\,Z(Z\,\mathsf{D}_z)'\end{aligned}$$

oder, wenn noch

$$W^{-1}\{Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)'\}'\,Z = \{Z^{-1}(Z-W)\,\mathsf{D}_w\}'\,Z = ((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'$$

beachtet wird,

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_{\alpha\beta} &= \alpha Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)' - \beta W^{-1}(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \\ &\quad + Z^{-1}(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,(Z\,\mathsf{D}_z)'.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}(Z\,\mathsf{D}_z)'\,|Z|^{\alpha} &= |Z|^{\alpha}(Z\,\mathsf{D}_z)' + \alpha|Z|^{\alpha}E, \\ (W\,\mathsf{D}_w)'\,|W|^{\beta} &= |W|^{\beta}(W\,\mathsf{D}_w)' + \beta|W|^{\beta}E\end{aligned}$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned}&\alpha Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)'\,|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta} \\ &\qquad = \alpha|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta}\,Z^{-1}(Z-W)\,(W\,\mathsf{D}_w)' + \alpha\beta|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta}\,Z^{-1}(Z-W),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\beta W^{-1}(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)'\,|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta} \\ &\qquad = \beta|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta}\,W^{-1}(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \alpha\beta|Z|^{\alpha}\,|W|^{\beta}\,W^{-1}(Z-W)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&Z^{-1}(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,(Z\,\mathsf{D}_z)'\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta \\
&\qquad = Z^{-1}(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\{|Z|^\alpha\,|W|^\beta\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \alpha\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta\,E\} \\
&\qquad = |Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \\
&\qquad\quad + \beta\,|Z|^\alpha\,|W|^{\beta-1}\,Z^{-1}(Z-W)\,W^*(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \\
&\qquad\quad + \alpha\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)' + \\
&\qquad\quad + \alpha\,\beta\,|Z|^\alpha\,|W|^{\beta-1}\,Z^{-1}(Z-W)\,W^*(Z-W)\,.
\end{aligned}$$

Nach geeigneter Zusammenfassung resultiert

$$\begin{aligned}
&\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta = \alpha\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_w)' - \\
&- \beta\,|Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + |Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'(Z\,\mathsf{D}_z)' \\
&= |Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,\{\alpha\,(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_w)' - \beta\,(Z-W)\,(Z\,\mathsf{D}_z)' + \\
&\qquad\qquad + (Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,(Z\,\mathsf{D}_z)'\} \\
&= |Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,[\alpha\,Z\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)' - \beta\,Z\,((Z-W)\,\mathsf{D}_z)' + \\
&\qquad\qquad + Z\,\{(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z\}']' \\
&= |Z|^\alpha\,|W|^\beta\,Z^{-1}\,(Z\,\Omega'_{\alpha\beta})'.
\end{aligned}$$

Damit ist (57) für ein Erzeugendensystem der symplektischen Gruppe, also allgemein bewiesen. σ bezeichne die Substitution $Z, W \to \hat{Z}, \hat{W}$. Wir wenden den Operator (57) auf $f(Z, W)\,|\,\sigma$ an, wobei $f(Z, W)$ der Schar $\{\alpha, \beta\}$ angehöre. Wegen $\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\,f(\hat{Z}, \hat{W}) = 0$ folgt dann $\Omega_{\alpha\beta}(f(Z, W)\,|\,\sigma) = 0$. Es gilt also $\{\alpha, \beta\}\,|\,\sigma \subset \{\alpha, \beta\}$. Wird hierin σ durch σ^{-1} ersetzt, so ergibt sich schließlich

$$\{\alpha, \beta\}\,|\,\sigma = \{\alpha, \beta\}\,. \tag{58}$$

Wir bestimmen noch die Wirkung der symplektischen Substitutionen σ auf die Formenscharen $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$. Das Multiplikatorsystem v genügt gewissen Bedingungen, die hier kurz genannt werden sollen. Es seien

$$\sigma_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

gegebene symplektische Substitutionen, dabei $\sigma_1\,\sigma_2 = \sigma_3$. Bei geeigneter Festlegung der Funktionszweige [vgl. hierzu [1])] ist dann

$$\begin{aligned}
&|C_1\,\sigma_2(Z) + D_1|^\alpha\,|C_1\,\sigma_2(W) + D_1|^\beta\,|C_2\,Z + D_2|^\alpha\,|C_2\,W + D_2|^\beta \\
&\qquad = \eta\,(\sigma_1, \sigma_2)\,|C_3\,Z + D_3|^\alpha\,|C_3\,W + D_3|^\beta
\end{aligned} \tag{59}$$

mit gewissen Faktoren

$$\eta\,(\sigma_1, \sigma_2) = \eta^{(\alpha-\beta)}\,(\sigma_1, \sigma_2)\,.$$

In der üblichen Weise ist nun

$$\eta(\sigma_1, \sigma_2)\,(f\,|\,\sigma_1)\,|\,\sigma_2 = f\,|\,\sigma_1\,\sigma_2 \tag{60}$$

für $f \subset \{\alpha, \beta\}$ beweisbar, außerdem

$$v\,(\sigma_1\,\sigma_2) = \eta\,(\sigma_1, \sigma_2)\,v(\sigma_1)\,v(\sigma_2) \qquad \text{für } \sigma_1, \sigma_2 \subset \mathsf{G}, \tag{61}$$

falls in $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ eine nicht identisch verschwindende Form f liegt. Wir setzen voraus, daß (61) stets erfüllt ist. Berücksichtigen wir (58), so folgt mit (60) leicht

$$\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}\,|\,\sigma = \{\sigma^{-1}\,\mathsf{G}\,\sigma; \alpha, \beta, v^\sigma\}, \tag{62}$$

wenn v^σ durch

(63) $$v^\sigma(\varrho) = \frac{\eta(\sigma\varrho\sigma^{-1},\sigma)}{\eta(\sigma,\varrho)}\, v(\sigma\varrho\sigma^{-1}) \qquad \text{für } \varrho \subset \sigma^{-1}\,\mathsf{G}\,\sigma$$

erklärt wird.

§ 2. Die Operatoren M_α und N_β.

Für die Unterdeterminanten von $|Z|$ und $|\mathsf{D}_z|$ verwenden wir die durch (15) eingeführten Bezeichnungen. Außerdem sei

$$\overline{\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{pmatrix}}_z \text{ das algebraische Komplement zu } \begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{pmatrix}_z.$$

Es unterscheidet sich von der Unterdeterminante, die aus $|Z|$ durch Streichen der Zeilen und Spalten mit den Indices $i_1,\ldots,i_h$ bzw. $k_1,\ldots,k_h$ entsteht, um das Vorzeichen $(-1)^{i_1+\cdots+i_h+k_1+\cdots+k_h}$. Im Falle $h=n$ soll das algebraische Komplement den Wert 1 haben. Die Verallgemeinerung der von KÖCHER gefundenen Formel (14) lautet dann

(64) $$\begin{vmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{vmatrix}_z |Z|^\alpha = \alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{h-1}{2}\right)|Z|^{\alpha-1}\overline{\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{pmatrix}}_z.$$

Sie läßt sich durch vollständige Induktion nach h beweisen. Für $h=1$ erkennt man sofort die Richtigkeit der Behauptung. Der allgemeine Schritt von $h-1$ nach h erfordert zahlreiche Determinantenumformungen, die hier nur skizziert werden können. Das Verfahren ist deswegen etwas umständlich, weil diejenigen Indices, die in den Zahlenreihen $i_1,\ldots,i_h$ und $k_1,\ldots,k_h$ gleichzeitig vorkommen, aus beweistechnischen Gründen in besonderer Weise ausgezeichnet werden müssen und weil der Nachweis gewisser Identitäten eine weitgehende Zerlegung der auftretenden Determinanten erfordert.

Es sei $c_1,\ldots,c_q$ das System der gemeinsamen Ziffern in den Zahlenreihen $i_1,\ldots,i_h$ und $k_1,\ldots,k_h$. Von der Reihenfolge abgesehen seien

$$a_1,\ldots,a_p,c_1,\ldots,c_q \qquad \text{mit} \qquad i_1,\ldots,i_h$$

und

$$b_1,\ldots,b_p,c_1,\ldots,c_q \qquad \text{mit} \qquad k_1,\ldots,k_h$$

identisch. Schließlich sei

$$a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p,c_1,\ldots,c_q,d_1,\ldots,d_r$$

das System aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; es ist also $2p+q+r=n$. Wir verwenden nun die genaueren Bezeichnungen

$$\begin{bmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ c_1,\ldots,c_q \\ b_1,\ldots,b_p \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_h \\ k_1,\ldots,k_h \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ c_1,\ldots,c_q \\ b_1,\ldots,b_p \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man jedes Element z_{ik} durch sein algebraisches Komplement, so gehe

$$\begin{pmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ c_1,\ldots,c_q \\ b_1,\ldots,b_p \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{Bmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ c_1,\ldots,c_q \\ b_1,\ldots,b_p \end{Bmatrix}$$

über. Nach einer bekannten Regel ist dann

$$\overline{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{pmatrix}}_z = (-1)^{a_1 + \cdots + a_p + b_1 + \cdots + b_p} \begin{pmatrix} b_1, \ldots, b_p \\ d_1, \ldots, d_r \\ a_1, \ldots, a_p \end{pmatrix}$$
$$= |Z|^{1-p-q} \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix},$$

so daß (64) in

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{bmatrix} |Z|^\alpha = v_{p+q}(\alpha)\, |Z|^{\alpha-p-q} \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix} \tag{65}$$

mit

$$v_h(\alpha) = \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(\alpha + \frac{h-1}{2}\right)$$

übergeht. Zu einem Ansatz für die Induktion kommen wir nun, wenn wir die $(p+q)$-reihige Operatorendeterminante auf der linken Seite von (65) nach den Elementen irgendeiner Zeile entwickeln und wenn wir sämtliche $p+q$ Entwicklungen dieser Art addieren; letzteres geschieht nur, um Fallunterscheidungen zu vermeiden. Wendet man (65) auf die $(p+q-1)$-reihigen Unterdeterminanten an, die bei diesem Prozeß erscheinen, so ergibt sich nach einer längeren Rechnung für

$$(p+q) \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{bmatrix} |Z|^\alpha$$

eine Zerlegung in mehrere ein- und zweifache Summen, die sich mit einer Ausnahme alle zu der mit einem gewissen Faktor versehenen Determinante

$$\begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix}$$

zusammenfügen. Das endgültige Resultat lautet

$$\begin{aligned} (p+q) \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{bmatrix} |Z|^\alpha &= -\frac{1}{2} v_{p+q-1}(\alpha)\, |Z|^{\alpha-p-q}\, \Phi + \\ &+ \left(\frac{q(q+1)}{2} + p\,q + \frac{p^2}{2} + (\alpha-1)(p+q)\right) v_{p+q-1}(\alpha)\, |Z|^{\alpha-p-q} \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{\mu,\nu=1}^{p}{}' (-1)^{\mu+\nu} (a_\mu | b_1, \ldots, b_p)\, (b_\nu | a_1, \ldots, a_p) \times \\ \times \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots, a_p, b_\nu \\ c_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_{\nu-1}, b_{\nu+1}, \ldots, b_p, a_\mu \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{67}$$

wobei allgemein

$$(a \mid b_1, \ldots, b_p) = (-1)^\sigma \tag{68}$$

gesetzt wird, wenn es unter den b_ν genau σ Zahlen gibt, die kleiner als a sind.

Aus der Formel (66) ergibt sich sofort (65), wenn

$$\Phi = -p \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix} \tag{69}$$

bewiesen ist. Die Differentiationsformel (65) ist damit auf die Identität (69) zurückgeführt. Wir beweisen (69) durch vollständige Induktion nach $p+q$. Für $p = 0$ oder 1 ist (69) offenbar richtig. Sei also $p > 1$. Dann kommen in den Determinanten, aus denen sich Φ zusammensetzt, Elemente vor, die auf der rechten Seite von (69) nicht erscheinen. Man hat zunächst zu zeigen, daß sich diese Glieder in Φ gegenseitig aufheben. Zu dem Zweck entwickelt man die zu μ, ν gehörige Determinante in Φ nach den Elementen der b_ν-ten Zeile und der a_μ-ten Spalte, sodann hat man die einzelnen Bestandteile von Φ wieder geeignet zusammenzufassen und die Symmetrie der z_{ik} zu beachten. Φ ändert sich also nicht, wenn man diejenigen Elemente durch 0 ersetzt, die auf der rechten Seite von (69) nicht vorkommen. Weiter ist zu beachten, daß beide Seiten der Gl. (69) von den Elementen

$$z_{a_\mu c_\nu}, \quad z_{c_\mu b_\nu}, \quad z_{a_\mu b_\nu} \tag{70}$$

jeweils nur linear abhängen. Nimmt man nun (69) für $(p+q-1)$-reihige Determinanten als richtig an, so läßt sich zeigen, daß jede der Variablen (70) auf beiden Seiten von (69) jeweils mit demselben Faktor versehen erscheint, so daß also

$$\Phi + p \begin{Bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ c_1, \ldots, c_q \\ b_1, \ldots, b_p \end{Bmatrix} \tag{71}$$

von den Elementen (70) unabhängig ist. Der Ausdruck (71) ändert sich also nicht, wenn man

$$z_{a_\mu c_\nu} = z_{c_\mu b_\nu} = z_{a_\mu b_\nu} = z_{a_\mu a_\nu} = z_{b_\mu b_\nu} = 0$$

setzt. Andererseits verschwinden bei dieser Spezialisierung alle Determinanten, aus denen (71) gebildet ist. Mithin ist der Ausdruck (71) identisch gleich 0, q. e. d.

Wir verwenden (64) mit $-\alpha$ an Stelle von α, um die Wirkung des durch (16) erklärten Operators $s_h(Z-W, \mathsf{D}_z)$ auf $|Z|^{-\alpha}$ zu bestimmen. Man erhält

$$s_h(Z-W, \mathsf{D}_z)\,|Z|^{-\alpha} = (-1)^h\,\varepsilon_h(\alpha)\,|Z|^{-\alpha-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n} D_{i_1 i_2 \ldots i_h}$$

mit

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_h} = \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{pmatrix}_{z-w} \overline{\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_h \\ k_1, \ldots, k_h \end{pmatrix}}_z .$$

Auf Grund des Laplaceschen Zerlegungssatzes ist $D_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ mit der n-reihigen Determinante identisch, die aus $|Z|$ hervorgeht, wenn man hierin die Zeilen mit den Indices $i_1, i_2, \ldots, i_h$ durch die entsprechenden Zeilen in $|Z-W|$ ersetzt. Demgemäß kann $D_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ additiv in 2^h Determinanten zerlegt werden, so daß — vom Vorzeichen abgesehen — jede Zeile entweder eine Zeile von $|Z|$ oder $|W|$ ist. $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ bezeichne die Determinante, die aus $|Z|$

entsteht, wenn man die Zeilen mit den Indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$ durch die entsprechenden Zeilen in $|W|$ ersetzt. Lassen wir bei festem h die Ziffern $1 \leqq i_1 < \cdots < i_h \leqq n$ alle möglichen Systeme durchlaufen, so tritt in den additiven Zerlegungen der Determinanten $D_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ eine feste Determinante $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ insgesamt $\binom{n-r}{h-r}$ mal auf und zwar mit dem Vorzeichen $(-1)^r$. Folglich ist

$$\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_h \leqq n} D_{i_1 i_2 \ldots i_h} = \sum_{r=0}^{n} \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq n} (-1)^r \binom{n-r}{h-r} \Delta_{j_1 j_2 \ldots j_r}$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n-r}{h-r} A_r$$

mit

$$A_r = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq n} \Delta_{j_1 j_2 \ldots j_r} \quad \text{für } r > 0 \text{ und } A_0 = |Z|.$$

Wegen $A_n = |W|$ ist also

$$\mathsf{M}_\alpha |Z|^{-\alpha} = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)} s_h(Z - W, \mathsf{D}_z) |Z|^{-\alpha}$$
$$= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sum_{r=0}^{h} (-1)^r \binom{n-r}{h-r} A_r$$
$$= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{h=r}^{n} (-1)^{h-r} \binom{n-r}{h-r} \right) A_r$$
$$= \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} |W|$$

oder etwas allgemeiner

(72) $$\mathsf{M}_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta+1}.$$

Ähnlich wie beim Beweis von (41) ergibt sich hieraus sofort

(73) $$\mathsf{M}_\alpha G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\alpha)\, G(Z, W; \alpha + 1, \beta - 1).$$

Mit den durch (21) und (22) erklärten Operatoren folgt noch

$$\mathsf{N}_\beta |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = \mathsf{X}\, \mathsf{M}_\beta\, \mathsf{X} |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = \mathsf{X}\, \mathsf{M}_\beta |-W|^{-\alpha} |-Z|^{-\beta}$$
$$= \varepsilon_n(\beta)\, \mathsf{X} |-W|^{-\alpha+1} |-Z|^{-\beta-1} = \varepsilon_n(\beta) |Z|^{-\alpha+1} |W|^{-\beta-1}$$

und damit auch

(74) $$\mathsf{N}_\beta\, G(Z, W; \alpha, \beta) = \varepsilon_n(\beta)\, G(Z, W; \alpha - 1, \beta + 1).$$

Das Differentialgleichungssystem (7) ist offenbar invariant gegenüber der Substitution $X \to -X$, wenn man zugleich α mit β vertauscht. Diese Tatsache kommt in

(75) $$\mathsf{X}\,\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$$

zum Ausdruck. Es folgt dann auch leicht

(76) $$\mathsf{X}\,\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} = \{\mathsf{G}^*; \beta, \alpha, v^*\}$$

mit

$$G^* = \iota G \iota^{-1}, \; v^*(\sigma) = v(\iota\sigma\iota^{-1})\, u(\iota\sigma\iota^{-1}),$$

wobei $\iota = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}$ ist und $u(\sigma)$ ein gewisses von v unabhängiges Faktorensystem bezeichnet, das von der Auswahl der Funktionszweige $\log |C'Z + D|$,

$\log|CW+D|$ wesentlich abhängt. Beim Beweis von (76) ist von der allgemeinen Transformationsformel

$$(\mathsf{X}\,f(Z,W))|\sigma = u(\iota\,\sigma\,\iota^{-1})\,\mathsf{X}\,(f(Z,W)|\iota\,\sigma\,\iota^{-1})$$

Gebrauch zu machen. Im Falle $n=1$ ergibt sich, wenn man die Hauptwerte

$$\log(c\,z+d) = \log|c\,z+d| + i\arg(c\,z+d),\quad -\pi < \arg(c\,z+d) \leqq \pi,$$
$$\log(c\,w+d) = \log|c\,w+d| + i\arg(c\,w+d),\quad -\pi \leqq \arg(c\,w+d) < \pi,$$

zugrunde legt, das Faktorensystem

$$u\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } c \neq 0,\\ e^{(\alpha-\beta)\,i\,\pi\,(1-\operatorname{sgn} d)} & \text{für } c = 0\text{[3]}.\end{cases}$$

Wir zeigen noch, daß (27) aus (26) folgt, auch wenn n beliebig ist. Wendet man auf die Relation

$$(\mathsf{N}_{\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha)\,\varepsilon_n(\beta-1))\,\{\mathsf{G};\,\alpha,\,\beta,\,v\} = 0$$

den Operator X an, so ergibt sich wegen (76) und $\mathsf{N}_{\beta-1} = \mathsf{X}\,\mathsf{M}_{\beta-1}\,\mathsf{X}$ sofort

$$(\mathsf{M}_{\beta-1}\,\mathsf{N}_\alpha - \varepsilon_n(\alpha)\,\varepsilon_n(\beta-1))\,\{\mathsf{G}^*;\,\beta,\,\alpha,\,v^*\} = 0.$$

Ersetzt man hierin G^*, v^* durch G, v und vertauscht man außerdem α mit β, so erhält man in der Tat

$$(\mathsf{M}_{\alpha-1}\,\mathsf{N}_\beta - \varepsilon_n(\beta)\,\varepsilon_n(\alpha-1))\,\{\mathsf{G};\,\alpha,\,\beta,\,v\} = 0.$$

Analog folgt (29) aus (28), ebenfalls für beliebiges n. Aus der Definition von N_β geht übrigens hervor, daß der Operator in der Form

$$\mathsf{N}_\beta = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h\,\frac{\varepsilon_n(\beta)}{\varepsilon_h(\beta)}\,s_h(Z-W,\,\mathsf{D}_v) \tag{77}$$

darzustellen ist.

Wir beweisen nun die Relationen (26) und (28). Dabei machen wir die Voraussetzung $n=2$, die wir bis zum Ende des Paragraphen beibehalten. Um Indices einzusparen, werde

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1\\ z_1 & z_2\end{pmatrix},\quad W = \begin{pmatrix} w_0 & w_1\\ w_1 & w_2\end{pmatrix} \tag{78}$$

gesetzt. Ferner sei

$$(Z-W)^{-1}\,\Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1\\ \omega_3 & \omega_2\end{pmatrix}. \tag{79}$$

Die Relation

$$(\mathsf{N}_{\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1))\,\{\mathsf{G};\,\alpha,\,\beta,\,v\} = 0 \tag{80}$$

erweist sich als unmittelbare Folge der Operatorenidentität

$$\begin{aligned} &\mathsf{N}_{\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1)\\ &= -\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{3}{2}\right)\operatorname{Sp}\Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}|Z-W|\,(\omega_0\,\omega_2 - \omega_1\,\omega_3 + \omega_2\,\omega_0 - \omega_3\,\omega_1)\\ &\quad + \frac{1}{4}|Z-W|\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial w_2}\right)\omega_0 + \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial}{\partial w_0}\right)\omega_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\partial}{\partial z_1}\right)(\omega_1+\omega_3)\right\}, \end{aligned} \tag{81}$$

wenn man

$$\Omega_{\alpha\beta}\,\{\mathsf{G};\,\alpha,\,\beta,\,v\} = 0$$

[3] In [1], Hilfssatz 4 ist das Faktorensystem u irrtümlich vergessen worden. Demzufolge sind in [1] die Multiplikatorwerte v^* sämtlich durch die angegebenen korrigierten Werte zu ersetzen.

beachtet. Zu der Identität (81) gelangt man in folgender Weise: Für

$$
\begin{aligned}
(82)\quad & \mathsf{N}_{\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha - \varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1) = -\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)(\beta-1)\left(\beta-\frac{3}{2}\right) + \\
& + \left\{(\beta-1)\left(\beta-\frac{3}{2}\right) - \left(\beta-\frac{3}{2}\right)\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right) + |Z-W|\,|\mathsf{D}_w|\right\} \times \\
& \times \left\{\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right) + \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right) + |Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\right\}
\end{aligned}
$$

bestimmt man zunächst durch gliedweises Ausmultiplizieren und Anwenden der Vertauschungsregeln

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right)\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right) \\
& \qquad = \sum_{\mu,\nu=0}^{2} (z_\mu - w_\mu)\,(z_\nu - w_\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial w_\mu\,\partial z_\nu} - \mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right), \\
& |\mathsf{D}_w|\,\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right) \\
& \qquad = \mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right)|\mathsf{D}_w| - \frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_0} - \frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}, \\
& \mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right)|Z-W| = |Z-W|\,\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right) - 2\,|Z-W|, \\
& |\mathsf{D}_w|\,|Z-W| = \frac{3}{2} - \mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right) + |Z-W|\,|\mathsf{D}_w|
\end{aligned}
$$

eine gewisse Normaldarstellung. Man erkennt nun leicht, daß die Glieder höchster, d. h. vierter Ordnung in (82) mit den Gliedern höchster Ordnung in $\omega_0\,\omega_2 - \omega_1\,\omega_3$ oder auch $\omega_2\,\omega_0 - \omega_3\,\omega_1$ übereinstimmen. Für die erste Reduktion ist also mit

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial w_0} - \beta\,\frac{\partial}{\partial z_0} + \\
&\quad + (z_0 - w_0)\,\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_0} + \frac{1}{2}\,(z_1 - w_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_0} + \frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_1}\right) + \frac{1}{4}\,(z_2 - w_2)\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}, \\
\omega_1 &= \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\beta}{2}\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(z_0 - w_0)\,\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_1} + (z_1 - w_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_2} + \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}\right) + \frac{1}{2}\,(z_2 - w_2)\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_2}, \\
\omega_2 &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial w_2} - \beta\,\frac{\partial}{\partial z_2} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\,(z_0 - w_0)\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1} + \frac{1}{2}\,(z_1 - w_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_2}\right) + (z_2 - w_2)\,\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_2}, \\
\omega_3 &= \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial}{\partial w_1} - \frac{\beta}{2}\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(z_0 - w_0)\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_0} + (z_1 - w_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_0} + \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}\right) + \frac{1}{2}\,(z_2 - w_2)\,\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_1}
\end{aligned}
$$

der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\,(\omega_0\,\omega_2 - \omega_1\,\omega_3 + \omega_2\,\omega_0 - \omega_3\,\omega_1) \\
& \qquad = |Z-W|\,|\mathsf{D}_w|\,|\mathsf{D}_z| + \alpha^2\,|\mathsf{D}_w| + \beta^2\,|\mathsf{D}_z| + \\
& \qquad + \left(\frac{\alpha+\beta}{4} - \alpha\,\beta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_0} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}\right) + \\
& \qquad + \left(\alpha-\frac{1}{4}\right)\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_z\right)|\mathsf{D}_w| - \left(\beta-\frac{1}{4}\right)\mathrm{Sp}\left((Z-W)\,\mathsf{D}_w\right)|\mathsf{D}_z|
\end{aligned}
$$

zu berechnen. Die Reduktion der Glieder dritter Ordnung wird dann durch

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_2}-\frac{\partial}{\partial w_2}\right)\omega_0+\left(\frac{\partial}{\partial z_0}-\frac{\partial}{\partial w_0}\right)\omega_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1}-\frac{\partial}{\partial z_1}\right)(\omega_1+\omega_3)\right\}$$
$$=-\frac{\beta}{2}|\mathsf{D}_z|-\frac{\alpha}{2}|\mathsf{D}_w|+\frac{\alpha+\beta-1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_2}+\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_0}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_w)\,|\mathsf{D}_z|-\frac{1}{4}\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,|\mathsf{D}_w|$$

geleistet. Schließlich bleiben noch Glieder erster und zweiter Ordnung übrig, die man auch durch Multiplikation von

$$\operatorname{Sp}\Omega_{\alpha\beta}=\alpha\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_w)-\beta\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)+$$
$$+\sum_{\mu,\nu=0}^{2}(z_\mu-w_\mu)(z_\nu-w_\nu)\frac{\partial^2}{\partial w_\mu\,\partial z_\nu}-|Z-W|\left(\frac{\partial^2}{\partial w_0\,\partial z_2}+\frac{\partial^2}{\partial w_2\,\partial z_0}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w_1\,\partial z_1}\right)$$

mit $-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{3}{2}\right)$ erhält.

Zum Beweis von (28) benötigen wir die beiden Aussagen

$$\mathsf{M}_\alpha\{\alpha,\beta\}\subset\{\alpha+1,\beta-1\},\tag{83}$$

$$\mathsf{M}_\alpha(f\,|\,\sigma)=(\mathsf{M}_\alpha f)\,|\,\sigma \qquad \text{für } f\subset\{\alpha,\beta\}.\tag{84}$$

Die erste folgt aus der Operatorenidentität

$$\Omega_{\alpha+1\,\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha=\mathsf{M}_\alpha\,\Omega_{\alpha\beta}+\left\{\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)E+\mathsf{D}_z^*(Z-W)^*\right\}(\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta}-\Omega_{\alpha\beta}),\tag{85}$$

die zweite aus der Transformationsformel

$$\widehat{\mathsf{M}}_\alpha=|CZ+D|^{\alpha+1}\,\mathsf{M}_\alpha|CZ+D|^{-\alpha}\,|CW+D|^{-1}.\tag{86}$$

Der Operator $\widehat{\mathsf{M}}_\alpha$ entsteht aus M_α, wenn man Z, W durch

$$\sigma Z=\widehat{Z}=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\quad \sigma W=\widehat{W}=(AW+B)(CW+D)^{-1}$$

ersetzt.

Die Identität (85) erhält man wie folgt: Bildet man mit den Operatoren M_α, $\Omega_{\alpha\beta}$, $\Omega_{\alpha+1\,\beta-1}$ in ihrer ursprünglichen Bedeutung den Ausdruck $\Omega_{\alpha+1\,\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha-\mathsf{M}_\alpha\,\Omega_{\alpha\beta}$, so gelangt man durch Ausmultiplikation zu einer gewissen Normaldarstellung, wenn man auf die von $\Omega_{\alpha+1\,\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha$ herrührenden Produkte erforderlichenfalls eine der Vertauschungsregeln

$$(Z-W)\,\mathsf{D}_w\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)$$
$$=\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,(Z-W)\,\mathsf{D}_w-(Z-W)\,\mathsf{D}_z-(Z-W)\,\mathsf{D}_w,$$

$$(Z-W)\,\mathsf{D}_w|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|$$
$$=|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,(Z-W)\,\mathsf{D}_w-|Z-W|\,\mathsf{D}_z^*\,\mathsf{D}_w-|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,E,$$

$$(Z-W)\,\mathsf{D}_z\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)=\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,(Z-W)\,\mathsf{D}_z,$$

$$(Z-W)\,\mathsf{D}_z|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|=|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,(Z-W)\,\mathsf{D}_z,$$

$$(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)$$
$$=\operatorname{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z-(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_z-$$
$$-(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z,$$

$$(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|$$
$$=|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,(Z-W)\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z+\frac{3}{2}|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,E-$$
$$-|Z-W|\,|\mathsf{D}_z|\,(Z-W)\,\mathsf{D}_z-|Z-W|\,\mathsf{D}_z^*\,((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z$$

anwendet. Berücksichtigt man außerdem

$$|Z - W|\,\mathsf{D}_z^*\,\{((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_w - ((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z\} = (\mathsf{D}_z^*(Z-W)^* - E)\,(\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta})$$

und

$$\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,(Z-W)\,\mathsf{D}_w - (Z-W)\,\mathsf{D}_w = (Z-W)\,\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_w,$$
$$\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,(Z-W)\,\mathsf{D}_z - (Z-W)\,\mathsf{D}_z = (Z-W)\,\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_z,$$

so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha+\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha - \mathsf{M}_\alpha\,\Omega_{\alpha\beta} + (E - \mathsf{D}_z^*(Z-W)^*)\,(\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta})\\
= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(Z-W)\{-(Z-W)^*\,|\mathsf{D}_z| + \mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_w -\\
- ((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z + \mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_z - ((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_z\\
- (Z-W)^*\,\mathsf{D}_z^*\,\mathsf{D}_w\}\\
= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(Z-W)\,\{((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_w - ((Z-W)\,\mathsf{D}_w)'\,\mathsf{D}_z\}\\
= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(\widetilde{\Omega}_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta});\end{aligned}$$

denn es ist

$$\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_z - (Z-W)^*\,|\mathsf{D}_z| = ((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_z,$$
$$\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,\mathsf{D}_w - (Z-W)^*\,\mathsf{D}_z^*\,\mathsf{D}_w = ((Z-W)\,\mathsf{D}_z)'\,\mathsf{D}_w.$$

Damit ist (85) bewiesen.

Ist die Transformationsformel (86) für zwei Substitutionen richtig, dann gilt sie auch, wie man leicht sieht, für das Produkt. Wir können uns also auf das schon oben verwendete Erzeugendensystem der symplektischen Gruppe beschränken. Für affine Substitutionen ($C = O$) ist $\widehat{\mathsf{M}}_\alpha = \mathsf{M}_\alpha$ zu beweisen, was keine Mühe bereitet. Wir können uns gleich dem Fall

$$\hat{Z} = -Z^{-1},\ \hat{W} = -W^{-1}$$

zuwenden. Nun ist zu zeigen, daß der Operator

$$\widehat{\mathsf{M}}_\alpha - |Z|^{\alpha+1}\,\mathsf{M}_\alpha |Z|^{-\alpha}\,|W|^{-1}$$

verschwindet. Die Umrechnung von $\widehat{\mathsf{M}}_\alpha$ auf die Elemente von Z ist mit Hilfe von

$$\mathsf{D}_{\hat{z}} = Z\,(Z\,\mathsf{D}_z)'$$

auszuführen und ergibt

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{M}}_\alpha = \alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\{\mathrm{Sp}(Z\,W^{-1}\,Z\,\mathsf{D}_z) - \mathrm{Sp}(Z\,\mathsf{D}_z)\} -\\
- \frac{1}{2}\,|Z - W|\,|W|^{-1}\,\mathrm{Sp}(Z\,\mathsf{D}_z) + |Z|\,|W|^{-1}\,|Z - W|\,|\mathsf{D}_z|.\end{aligned}$$

Bei der Umrechnung des Operators $|Z|^{\alpha+1}\,\mathsf{M}_\alpha |Z|^{-\alpha}\,|W|^{-1}$ ist von den Vertauschungsregeln

$$\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z)\,|Z|^{-\alpha} = |Z|^{-\alpha}\,\mathrm{Sp}((Z-W)\,\mathsf{D}_z) - \alpha\,|Z|^{-\alpha-1}\,\mathrm{Sp}((Z-W)\,Z^*),$$
$$|\mathsf{D}_z|\,|Z|^{-\alpha} = |Z|^{-\alpha}\,|\mathsf{D}_z| - \alpha\,|Z|^{-\alpha-1}\,\mathrm{Sp}(Z\,\mathsf{D}_z) + \alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)|Z|^{-\alpha-1}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält schließlich

$$\hat{\mathsf{M}}_\alpha - |Z|^{\alpha+1}\mathsf{M}_\alpha |Z|^{-\alpha}|W|^{-1}$$
$$= \alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\{1 - |Z|\,|W|^{-1} + |W|^{-1}\,\mathrm{Sp}\,((Z-W)Z^*) - |Z-W|\,|W|^{-1}\} +$$
$$+ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Sp}\,[Z\,\{W^{-1}Z - E - |Z|\,|W|^{-1}(E - Z^{-1}W) + |Z-W|\,|W|^{-1}E\}\,\mathsf{D}_z].$$

Die beiden geschweiften Klammern können durch die charakteristischen Wurzeln der Matrix WZ^{-1} ausgedrückt werden. Führt man dies aus, so sieht man, daß die Klammern verschwinden. Damit ist die Transformationsformel bewiesen.

Bei der Abbildung von $\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$ durch M_α in $\{\mathsf{G};\alpha+1,\beta-1,v\}$ tritt im Falle $\varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1)\neq 0$ jede Funktion $f\subset\{\mathsf{G};\alpha+1,\beta-1,v\}$ als Bild auf; denn es ist

$$\frac{1}{\varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1)}\,\mathsf{N}_{\beta-1}f\subset\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\},\quad \mathsf{M}_\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1)}\,\mathsf{N}_{\beta-1}f\right)=f.$$

Ist $g\subset\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$, $\mathsf{M}_\alpha g=0$, so folgt

$$\mathsf{N}_{\beta-1}\,\mathsf{M}_\alpha g=\varepsilon_2(\alpha)\,\varepsilon_2(\beta-1)\,g=0,\qquad \text{also } g=0.$$

Das heißt M_α ist auf $\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$ umkehrbar eindeutig. Analog zeigt man, daß N_β im Falle $\varepsilon_2(\beta)\,\varepsilon_2(\alpha-1)\neq 0$ die Schar $\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{\mathsf{G};\alpha-1,\beta+1,v\}$ abbildet.

§ 3. Fourier-Entwicklungen.

Mit $\{\alpha,\beta;T\}$ haben wir die lineare Schar der Funktionen $a(Y,T)$ bezeichnet, für die

$$a(Y,T)\,e^{i\,\mathrm{Sp}\,TX}\subset\{\alpha,\beta\} \tag{87}$$

gilt. Kennzeichnend für die Schar $\{\alpha,\beta;T\}$ ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\{(Y\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_y+(\alpha+\beta)\,\mathsf{D}_y+(\alpha-\beta)\,T-TYT\}\,a(Y,T)&=0,\\ \{(Y\mathsf{D}_y)'\,T-TY\mathsf{D}_y\}\,a(Y,T)&=0.\end{aligned} \tag{88}$$

Es ergibt sich aus (7), wobei

$$\mathsf{D}_x\,e^{i\,\mathrm{Sp}\,TX}=i\,T\,e^{i\,\mathrm{Sp}\,TX} \tag{89}$$

zu beachten ist.

Da $\{\alpha,\beta\}$ gegenüber symplektischen Substitutionen invariant ist, so folgt aus $a(Y,T)\subset\{\alpha,\beta;T\}$, wenn U eine n-reihige reelle Matrix mit $|U|\neq 0$ darstellt,

$$a(Y[U],T)\,e^{i\,\mathrm{Sp}\,TX[U]}=a(Y[U],T)\,e^{i\,\mathrm{Sp}\,T[U']X}\subset\{\alpha,\beta\},$$

also

$$a(Y[U],T)\subset\{\alpha,\beta;T[U']\}.$$

Wir bezeichnen diese Funktion sinngemäß mit $\hat{a}(Y,T[U'])$. Durch

$$\hat{a}(\hat{Y},\hat{T})=a(Y,T)\ \text{ mit }\ \hat{Y}=Y[U^{-1}],\ \hat{T}=T[U'] \tag{90}$$

wird die Schar $\{\alpha,\beta;\hat{T}\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{\alpha,\beta;T\}$ abgebildet. Die Matrizen $\hat{Y}\hat{T}$ und YT haben dieselben charakteristischen Wurzeln, insbesondere ist also

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{Y}\hat{T}) = \mathrm{Sp}\,(Y\,T), \quad |\hat{Y}\hat{T}| = |Y\,T|. \tag{91}$$

Im Fall $n = 2$, auf den wir uns fortan beschränken wollen, ist nun folgendes festzustellen: Ist $T \neq O$, $\hat{T} = T[U']$, $|U| \neq 0$ und gestattet $a(Y, T) \subset \{\alpha, \beta; T\}$ entsprechend dem Charakter von T eine Entwicklung der Art (33), (35) oder (38), so trifft dies auch für die zugeordnete Form $\hat{a}(Y, \hat{T}) \subset \{\alpha, \beta; \hat{T}\}$ zu; denn die durch (30) eingeführten Variablen u, v sind gegenüber der Transformation $Y, T \to \hat{Y}, \hat{T}$ invariant, während sich $|Y|$ nur um einen positiven konstanten Faktor ändert. Es genügt also, die in der Einleitung zusammengestellten Entwicklungssätze für die speziellen Matrizen

$$T = O\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zu beweisen. Zur Abkürzung wird

$$(Y\,\mathsf{D}_y)'\,\mathsf{D}_y + (\alpha + \beta)\,\mathsf{D}_y = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (Y\,\mathsf{D}_y)'\,T - T\,Y\,\mathsf{D}_y = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \tag{93}$$

gesetzt. Es sind nun für die speziellen Matrizen (92) die in $Y > 0$ regulären Funktionen $f = a(Y, T)$ zu bestimmen, die von den Operatoren ω und

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} + (\alpha - \beta)\,T - T\,Y\,T$$

annulliert werden. Wir beginnen mit der Diskussion.

$$T = O\,.$$

An Stelle von Y werden die Variablen u, x, y durch

$$Y = u \begin{pmatrix} (x^2 + y^2)\,y^{-1} & x\,y^{-1} \\ x\,y^{-1} & y^{-1} \end{pmatrix}$$

eingeführt. u wird in dieser Bedeutung nur vorübergehend verwendet. Eine Umrechnung ergibt

$$\begin{aligned}
y_1\,\omega_0 + y_2\,\omega_1 &= \frac{1}{2}\left(u\,\frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1\right)\frac{\partial}{\partial x}\,, \\
y_1\,\omega_2 + y_0\,\omega_1 &= \left(u\,\frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1\right)\left(\frac{1}{2}\,(y^2 - x^2)\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,y\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
2\,u\,y\,\omega_1 &= \left(y^2\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,y\,\frac{\partial}{\partial y} - x\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(u\,\frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1\right) + \\
&\quad + \frac{x}{2}\left\{-\,y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + u^2\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\right\}.
\end{aligned}$$

Die zu lösenden Differentialgleichungen

$$\omega_0\,f = \omega_1\,f = \omega_2\,f = 0$$

sind daher mit dem System

$$\begin{gathered}
\left(u\,\frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1\right)\frac{\partial}{\partial x}\,f = \left(u\,\frac{\partial}{\partial u} + \alpha + \beta - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\,f = 0\,, \\
\left\{u^2\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\,(\alpha + \beta - 1)\,u\,\frac{\partial}{\partial u} + y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\}f = 0
\end{gathered}$$

äquivalent. Die ersten beiden Differentialgleichungen rechtfertigen den Ansatz

$$f_x = \varrho(x, y)\, u^{1-\alpha-\beta}, \quad f_y = \sigma(x, y)\, u^{1-\alpha-\beta}.$$

Es folgt dann

$$f = \varphi(x, y)\, u^{1-\alpha-\beta} + \psi(u)$$

mit $\varphi_x = \varrho$, $\varphi_y = \sigma$. Die dritte Differentialgleichung für f ergibt die Bedingung

$$u^2 \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1)\, u\, \psi' +$$
$$+ \{y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\varphi\}\, u^{1-\alpha-\beta} = 0.$$

Mit einer Konstanten c ist also

$$(u^2 \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1)\, u\, \psi')\, u^{\alpha+\beta-1} = c,$$
$$y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\,\varphi = -c.$$

Wir setzen $\alpha + \beta \neq 1, 2$ und im folgenden auch noch $\neq \frac{3}{2}$ voraus. Da φ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann durch geeignete Wahl von φ erreicht werden, daß c verschwindet. Es ist dann

$$y^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - (\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\,\varphi = 0$$

und

$$u\, \psi'' + 2(\alpha + \beta - 1)\, \psi' = 0,$$

also

$$\psi(u) = c_1\, u^{2\left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta\right)} + c_2,$$

wobei c_1, c_2 konstant sind. Mit $u = \sqrt{|Y|}$ ergibt sich das gewünschte Resultat

$$f = \varphi(x, y)\, |Y|^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} + c_1 |Y|^{\frac{3}{2}-\alpha-\beta} + c_2.$$

Es sei noch bemerkt, daß

$$|Y|^{\frac{n+1}{2}-\alpha-\beta}, \quad 1 \subset \{\alpha, \beta; O\}$$

für alle n gilt.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im vorliegenden Fall ist das Differentialgleichungssystem

$$(\omega_0 + \alpha - \beta - y_0)\, f = \omega_1 f = \omega_2 f = 0,$$
$$\left(\frac{1}{2}\, y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) f = 0$$

zu lösen. Wir verwenden hier und im folgenden die Bezeichnung

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Die drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden durch drei weitere ergänzt, die man aus der Differentialgleichung erster Ordnung durch Differentiation nach y_0, y_1, y_2 gewinnt. Das so bestimmte System wird mit den Methoden reduziert, die zur Auflösung linearer Gleichungen dienen. Es ergibt sich, daß das gegebene Differentialgleichungssystem mit dem folgenden äquivalent ist:

$$\left\{y_0 \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + y_1 \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial y_1} + \frac{1}{4} y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial y_0} + \alpha - \beta - y_0\right\} f = 0,$$

$$\left\{(y_0 y_2 - y_1^2) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + y_0 \left(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y_2}\right\} f = 0.$$

$$\left(\frac{1}{2} y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) f = 0.$$

Die zweite Differentialgleichung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = g(y_0, y_1) |Y|^{\frac{1}{2} - \alpha - \beta}.$$

Aus der dritten, die auch für $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ an Stelle von f gilt, ist zu entnehmen, daß $g(y_0, y_1) = g(y_0)$ von y_1 unabhängig ist. Sodann ergibt die dritte Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{2 y_1 g(y_0)}{y_0} |Y|^{\frac{1}{2} - \alpha - \beta}.$$

Im Falle $\alpha + \beta \neq \frac{3}{2}$ kann also

$$f = \frac{g(y_0)}{y_0\left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta\right)} |Y|^{\frac{3}{2} - \alpha - \beta} + \psi(y_0)$$

geschlossen werden. Geht man nun mit dem Ansatz

$$f = \varphi(y_0) |Y|^{\frac{3}{2} - \alpha - \beta} + \psi(y_0)$$

in die erste Differentialgleichung ein, so ergeben sich für φ und ψ die Bedingungen

$$\begin{aligned} y_0 \varphi'' + (3 - \alpha - \beta) \varphi' + (\alpha - \beta - y_0) \varphi &= 0, \\ y_0 \psi'' + (\alpha + \beta) \psi' + (\alpha - \beta - y_0) \psi &= 0. \end{aligned}$$

Hier ist noch $y_0 = u$ zu setzen.

$$T = E.$$

Das vorliegende Differentialgleichungssystem

$$(\omega_0 + \alpha - \beta - y_0) f = (\omega_1 - y_1) f = (\omega_2 + \alpha - \beta - y_2) f = \omega f = 0$$

ist zunächst in geeigneter Weise zu reduzieren. Man ergänzt das System durch drei weitere Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die man aus der Differentialgleichung erster Ordnung durch Differentiation nach y_0, y_1, y_2 erhält. Sodann eliminiert man die Glieder, in denen partielle Ableitungen nach y_1 vorkommen. Man stellt dabei fest, daß die Differentialgleichungen nicht unabhängig von einander sind. Eine von den ursprünglich gegebenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann also entbehrt werden. Man kommt schließlich auf das folgende System:

$$(y_0 y_2 - y_1^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\right) - \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right) y_2 + \frac{1}{2} y_0\right) \frac{\partial f}{\partial y_0} +$$
$$+ \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right) y_0 + \frac{1}{2} y_2\right) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (\alpha - \beta)(y_2 - y_0) f = 0,$$

$$\left(y_0 - \frac{y_1^2}{y_2 - y_0}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{2\,y_1^2}{y_2 - y_0}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\,\partial y_2} - \left(y_2 + \frac{y_1^2}{y_2 - y_0}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} +$$
$$+\left(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \frac{2\,y_1^2}{(y_2 - y_0)^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y_0} + \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta + \frac{2\,y_1^2}{(y_2 - y_0)^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y_2} + (y_2 - y_0)\,f = 0\,,$$
$$y_1\,\frac{\partial f}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\,(y_2 - y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1\,\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0\,.$$

An Stelle von y_0, y_1, y_2 führen wir nun die Koordinaten

$$u = y_0 + y_2\,,\quad v = (y_0 - y_2)^2 + 4\,y_1^2,\quad w = y_2 - y_0$$

ein. u und v haben die in (30) angegebene Bedeutung. Die Einführung ist im Bereich $Y > 0$ nur dann singularitätenfrei möglich, wenn die Lösungen f gerade Funktionen von y_1 sind. Das trifft aber zu, wie die folgende Betrachtung lehrt. Es sei f eine in y_1 ungerade Lösung. Wir können dann $f = y_1\,g(u, v, w)$ mit einer in $-u < w < u$, $|v| < u^2$ regulären Funktion g setzen. Die letzte Differentialgleichung für f ergibt für g die Bedingung

$$w\,g + (w^2 - v)\,\frac{\partial g}{\partial w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial w}\,((w^2 - v)\,g^2) = 0\,.$$

Mithin ist

$$(w^2 - v)\,(g\,(u, v, w))^2 = h\,(u, v)\,.$$

Bei gegebenen u, v kann die linke Seite durch Wahl von w zu 0 gemacht werden. $h\,(u, v)$ verschwindet also identisch; folglich ist auch $g\,(u, v, w) \equiv 0$. Es sei nun $f(y_0, y_1, y_2)$ eine beliebige Lösung. Dann genügt, wie man unmittelbar sieht, auch $f(y_0, -y_1, y_2)$ den Differentialgleichungen. Es ist also $f(y_0, y_1, y_2) - f(y_0, -y_1, y_2)$ eine in y_1 ungerade Lösung; sie muß, wie eben gezeigt wurde, identisch verschwinden. Jede Lösung kann also als Funktion von u, v, w angesetzt werden. Die letzte Differentialgleichung besagt, daß f von w unabhängig ist, so daß mit $f = f(u, v)$ weitergerechnet werden kann.

In den neuen Variablen nehmen die Differentialgleichungen zweiter Ordnung die relativ einfache Gestalt

$$2\,(v - u^2)\,f_{uv} + (\alpha + \beta)\,f_u + 2\,(1 - \alpha - \beta)\,u\,f_v + (\alpha - \beta)\,f = 0\,,$$
$$f_{uu} + 4\,u\,f_{uv} + 4\,v\,f_{vv} + 4\,(\alpha + \beta)\,f_v - f = 0$$

an. Wir lösen das System im Bereich

$$|v| < u^2$$

mit einem Potenzreihenansatz:

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(u)\,v^\nu\,.$$

Es ergeben sich die Rekursionsformeln

$$2\,u^2(\nu + 1)\,g'_{\nu+1} + 2\,(\alpha + \beta - 1)\,(\nu + 1)\,u\,g_{\nu+1} -$$
$$- (2\,\nu + \alpha + \beta)\,g'_\nu + (\beta - \alpha)\,g_\nu = 0\,,$$
$$4\,(\nu + 1)\,u\,g'_{\nu+1} + 4\,(\nu + \alpha + \beta)\,(\nu + 1)\,g_{\nu+1} + g''_\nu - g_\nu = 0\,,$$

die mit dem System

$$u^2\,g_0''' + (3\,\alpha + 3\,\beta - 1)\,u\,g_0'' + \{2\,(\alpha + \beta)\,(\alpha + \beta - 1) + 2\,(\alpha - \beta)\,u - u^2\}\,g_0' +$$
$$+ \{(1 - \alpha - \beta)\,u + 2\,(\alpha + \beta - 1)\,(\alpha - \beta)\}\,g_0 = 0\,,$$
$$4\,(\nu + 1)^2\,u\,g_{\nu+1} + u\,g''_\nu + 2\,(2\,\nu + \alpha + \beta)\,g'_\nu + (2\,(\alpha - \beta) - u)\,g_\nu = 0 \quad (\nu \geqq 0)$$

gleichwertig sind. Die Differentialgleichung dritter Ordnung für g_0 ist mit dem Ansatz

$$g_0 = u^{1-\alpha-\beta}\,\psi(u)\,, \qquad \psi'(u) = \frac{1}{u}\,\varphi(u)$$

auf die WHITTAKERsche Differentialgleichung

$$\varphi'' = \left(1 + \frac{2(\beta-\alpha)}{u} + \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{u^2}\right)\varphi$$

zurückzuführen.

Es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Potenzreihe für f im Bereich $|v| < u^2$ konvergiert. Zu dem Zweck werden $g_{\nu+1}, g'_{\nu+1}, g''_{\nu+1}$ mit Hilfe der Rekursionsformeln durch g_ν, g'_ν, g''_ν dargestellt:

$$g^{(\varkappa)}_{\nu+1} = \sum_{\lambda=0}^{2} a^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}\, g^{(\lambda)}_\nu \qquad (\varkappa = 0, 1, 2;\ \ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Das ist möglich, da g_ν der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{aligned} u^2 g'''_\nu &+ (4\nu - 1 + 3\alpha + 3\beta)\, u\, g''_\nu + \\ &+ \{2(2\nu+\alpha+\beta)(\nu-1+\alpha+\beta) + 2(\alpha-\beta)\,u - u^2\}\, g'_\nu + \\ &+ \{(1-\alpha-\beta)\,u + 2(\nu-1+\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\}\, g_\nu = 0 \end{aligned}$$

genügt, die aus den Rekursionsformeln abzuleiten ist. Einfache Abschätzungen der Koeffizienten $a^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}$ genügen, um zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante C zu finden, so daß

$$|g_\nu| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{u^2}\right)^\nu, \quad |g'_\nu| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{u^2}\right)^\nu, \quad |g''_\nu| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{u^2}\right)^\nu$$

für alle ν gilt. Aus diesen Ungleichungen folgt die Konvergenz der Potenzreihe für $|v| < u^2$. Es gibt also genau drei linear unabhängige Lösungen des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems, die im ganzen Bereich $Y > 0$ regulär sind.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der vorliegende Fall ist durch eine komplexe Transformation auf den vorangehenden zurückzuführen. Wendet man (90) auf $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ und $T = E$ an, so erkennt man, daß durch $a\left(\begin{pmatrix} y_0 & i\,y_1 \\ i\,y_1 & -y_2 \end{pmatrix}, E\right)$ alle Funktionen der Schar $\left\{\alpha, \beta; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ geliefert werden, wenn $a(Y, E)$ die Funktionen der Schar $\{\alpha, \beta, E\}$ durchläuft. Wegen des invarianten Charakters der Variablen u, v können also die im Fall $T = E$ gefundenen Differentialgleichungen hier übernommen werden:

$$\begin{gathered} 2(v-u^2)\, f_{uv} + (\alpha+\beta)\, f_u + 2(1-\alpha-\beta)\, u\, f_v + (\alpha-\beta)\, f = 0\,, \\ f_{uu} + 4\,u\, f_{uv} + 4\,v\, f_{vv} + 4(\alpha+\beta)\, f_v - f = 0\,. \end{gathered}$$

Nach (30) ist jetzt $u = y_0 - y_2$, $v = (y_0 + y_2)^2 - 4\,y_1^2$. Wir haben also die in

$$u^2 < v$$

regulären Lösungen zu ermitteln. Das geschieht wieder mit einem Potenzreihenansatz:

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(v)\, u^\nu.$$

Die Funktionen $h_\nu(v)$ genügen den Rekursionsformeln

$$(\nu+2)(\nu+1)\, h_{\nu+2} + 4\, v\, h_\nu'' + 4\,(\nu+\alpha+\beta)\, h_\nu' - h_\nu = 0\,,$$

$$2\,(\nu+1)\, v\, h_{\nu+1}' + (\alpha+\beta)(\nu+1)\, h_{\nu+1} + (\alpha-\beta)\, h_\nu + 2\,(2-\nu-\alpha-\beta)\, h_{\nu-1}' = 0\,.$$

Ein gleichwertiges System hat man in

$$8\, v^2 h_0''' + 4\,(2+3\,\alpha+3\,\beta)\, v\, h_0'' + \{4\,(\alpha+\beta)^2 + 2\,(\alpha+\beta-1) - 2\, v\}\, h_0' - (\alpha+\beta)\, h_0 = (\alpha-\beta)\, h_1\,,$$

$$2\, v\, h_1' + (\alpha+\beta)\, h_1 = (\beta-\alpha)\, h_0\,,$$

$$(\nu+2)(\nu+1)\, h_{\nu+2} + 4\, v\, h_\nu'' + 4\,(\alpha+\beta+\nu)\, h_\nu' - h_\nu = 0 \quad (\nu \geqq 0)\,.$$

Die Konvergenz der Potenzreihe im Bereich $u^2 < v$ ergibt sich wieder mit der im Fall $T = E$ skizzierten Methode. Mit Hilfe von

$$8\, v^2 h_\nu''' + 4\,(3\,\alpha+3\,\beta+2\,\nu+2)\, v\, h_\nu'' + \{4\,(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\nu) + 2\,(\nu+1)(\alpha+\beta+\nu-1) - 2\, v\}\, h_\nu' - (\alpha+\beta)\, h_\nu + (\nu+1)(\beta-\alpha)\, h_{\nu+1} = 0$$

lassen sich Darstellungen

$$h_{\nu+2} = a_{00}^{(\nu)}\, h_\nu + a_{01}^{(\nu)}\, h_\nu' + a_{02}^{(\nu)}\, h_\nu'',$$

$$h_{\nu+2}' = a_{10}^{(\nu)}\, h_\nu + a_{11}^{(\nu)}\, h_\nu' + a_{12}^{(\nu)}\, h_\nu'' + b_{10}^{(\nu+1)}\, h_{\nu+1}\,,$$

$$h_{\nu+2}'' = a_{20}^{(\nu)}\, h_\nu + a_{21}^{(\nu)}\, h_\nu' + a_{22}^{(\nu)}\, h_\nu'' + b_{20}^{(\nu+1)}\, h_{\nu+1} + b_{21}^{(\nu+1)}\, h_{\nu+1}'$$

bestimmen, die für $\varepsilon > 0$ eine Abschätzung

$$|h_\nu| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}}\right)^\nu,\quad |h_\nu'| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}}\right)^\nu,\quad |h_\nu''| < C\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{v}}\right)^\nu$$

mit $C = C(\varepsilon)$ gestatten. Daraus folgt die behauptete Konvergenz.

(Eingegangen am 20. September 1952.)