Maaß

II

ÜBERREICHT VOM VERFASSER

ABHANDLUNGEN
AUS DEM
MATHEMATISCHEN SEMINAR
DER
HANSISCHEN UNIVERSITÄT

HERAUSGEGEBEN VON

E. ARTIN — W. BLASCHKE — E. HECKE

SONDERABDRUCK AUS BAND 12, HEFT 2

H. MAASS:

KONSTRUKTION GANZER MODULFORMEN HALBZAHLIGER DIMENSION MIT ϑ-MULTIPLIKATOREN IN EINER UND ZWEI VARIABELN

VERLAG B. G. TEUBNER
LEIPZIG
1937

Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variabeln.

Von H. MAASS in Hamburg.

Die Theorie der automorphen Formen reeller Dimension, durch die Peterssonschen Arbeiten weitgehendst gefördert, bleibt insofern noch ergänzungsbedürftig, als die Formen der Dimension $-r \geqq -2$ nicht systematisch erfaßt werden. Wegen der Schwierigkeiten, die sich in der Behandlung der Formen von der Dimension oberhalb -2 dartun, sind schon spezielle Resultate bemerkenswert. Man hat heute noch keine Ursache, sich über diesen Standpunkt zu erheben. Lassen wir die Formen ganzer Dimension außer acht, so beanspruchen diejenigen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren ein besonderes Interesse, da man mit hinreichender Kenntnis dieser Formen alle Fragen der Darstellbarkeit ganzer Zahlen durch positiv definite quadratische Formen ungerader Variabelnzahl beantworten kann. Zur Konstruktion solcher Formen liefert die vorliegende Arbeit einen Beitrag; dabei ist das Hauptaugenmerk auf die Konstruktion der Formen der Dimension $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ gerichtet. Wir gewinnen alle Formen durch Aufstellen einer Art von Eisensteinreihen, die allerdings nur für Dimensionen <-2 konvergieren. Um den Reihen für größere Dimensionen einen Sinn beizulegen, führt man in geeigneter Weise eine Hilfsvariable s ein und definiert den Reihenwert als den Wert der in s analytischen Funktion im Punkte $s=0$. Der Nachweis, daß dies jeweils unter gewissen Voraussetzungen möglich ist, erfordert zum Teil erhebliche Rechnungen. Die Methode hat den Vorteil, daß die Invarianz bei einer bestimmten Substitutionsgruppe von vornherein sichergestellt ist. Herr Petersson hat gezeigt[1]), daß die Kenntnis eines Multiplikatorsystems schon ausreicht, systematisch Formen zu konstruieren. Durch naheliegende Übertragung des in E entwickelten Formelapparats auf zwei (oder auch mehr) Variable wird die Aufstellung der Eisensteinreihen halbzahliger Dimension in zwei Variabeln erheblich erleichtert. Im Rahmen dieser Untersuchung ist diese Aufgabe nur als Spezialfall des allgemeinen Problems zu betrachten, zu einem vorgegebenen Multiplikatorsystem Formen reeller Dimension in zwei Variabeln zu konstruieren. Die Hilfsmittel, die wir zusammentragen, sind von der Beschaffenheit, um auch das allgemeine Problem erfolg-

[1]) Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie (Hamburger Abhandlungen, Band 8), im folgenden zitiert mit E.

reich angreifen zu können. Eine weitere Methode zur Gewinnung von Modulformen in einer Variabeln besteht in folgendem: Man bestimme die Koeffizienten c_α einer Eisensteinreihe

$$c_\infty + \sum_\alpha \frac{c_\alpha}{(\tau - \alpha)^r} \qquad (\alpha = \text{rationale Zahl})$$

derart, daß das allgemeine Glied der Reihe das gleiche Verhalten zeigt wie eine vorgelegte ganze Modulform $\varphi(\tau)$ bei senkrechter Annäherung von τ an α; m. a. W. es soll gelten:

$$\lim_{\tau\to\alpha} \left\{\varphi(\tau) - \frac{c_\alpha}{(\tau-\alpha)^r}\right\} = 0,$$

überdies

$$\lim_{\tau\to\infty} \{\varphi(\tau) - c_\infty\} = 0.$$

Sind die Koeffizienten so festgelegt, so folgt automatisch die formale Invarianz der Eisensteinreihen bei allen Substitutionen der Gruppe, die $\varphi(\tau)$ festläßt. Man braucht sich also nur noch um Konvergenz zu kümmern. Sinngemäß verallgemeinert erhält man auch ein Verfahren, Modulformen in mehreren Variabeln zu konstruieren.

Nachdem ich nun die Möglichkeiten, Modulformen zu konstruieren, dargelegt habe, gebe ich noch einen Überblick über die Resultate: Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit Modulformen in einer Variabeln. Ich beginne mit der Konstruktion ganzer Formen der Dimension $-r = -\frac{k}{2}$ ($k = 1, 3, 5, \cdots$) zur ϑ-Gruppe Γ_3, d. i. die maximale Substitutionsgruppe, die den ϑ-Nullwert $\vartheta_{00}(\tau)$ festläßt. Für $k = 1, 3, 5, 7$ sind diese Formen auf Grund ihrer durch Dimension und Multiplikatorsystem eindeutigen Bestimmung nichts anderes als die k-ten Potenzen von $\vartheta_{00}(\tau)$. Von diesen analytischen Identitäten ist die für $k = 1$ neu, für $k = 3$ zumindest die Herleitung. Die Entwicklung der Partialbruchreihe für $\vartheta_{00}^3(\tau)$ nach Potenzen von $e^{\pi i \tau}$ liefert dann erneut den Zusammenhang der Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen und der Klassenzahl des imaginär quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{-n})$. Eine eingehende Analyse der Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung der Partialbruchreihe zeigt, daß genau die Koeffizienten mit der Nummer $n = 4^a(8b+7)$ verschwinden. Von diesem Typus sind also alle und nur die Zahlen, die sich nicht als Summe von drei Quadraten darstellen lassen. Dies Resultat kommt in der Weise zustande, daß eine gewisse in s elementare Funktion $\psi_2^{(n)}\left(s, \frac{3}{2}\right)$ bei $s = 0$ genau dann verschwindet, wenn n die Form $4^a(8b+7)$ hat. Das Verschwinden von $\psi_2^{(n)}\left(0, \frac{3}{2}\right)$ für negative n

bewirkt, daß gewisse in τ nicht-analytische Terme in der Partialbruchreihe zu $\vartheta_{00}^3(\tau)$ nicht auftreten. Es zeigt sich also hier eine bemerkenswerte Verschränkung zwischen der Aussage, welche natürlichen Zahlen als Summe von drei Quadraten darstellbar sind, und der Tatsache, daß eine bestimmte Funktion von τ in τ analytisch wird. Mit denselben Hilfsmitteln zeigen wir, daß für neun weitere positiv definite Formen vom Typus $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$ der entsprechende Sachverhalt gilt. Sodann folgt als Ergänzung zu E die Konstruktion ganzer Formen der Dimension $-\frac{3}{2}$ zur Stufe $N \equiv 0\,(4)$. Wir untersuchen die in E, § 5 aufgestellten Eisensteinreihen zur Dimension $-\frac{3}{2}$; es zeigt sich, daß sie alle einen in τ nicht-analytischen Reihenwert besitzen. Die Teilschar der ganzen Formen in der von allen Eisensteinreihen erzeugten linearen Schar enthält aber mindestens N linear unabhängige ganze Formen, sobald $N \neq 4, 8, 12, 24$. Eine Form der Teilschar ist durch ihre Residuen in den parabolischen Spitzen schon eindeutig bestimmt, d. h. die Teilschar enthält keine Spitzenform. Ob die konstruierten Formen ausreichen, um eine vorgelegte ganze Form der Dimension $-\frac{3}{2}$ zur Stufe N mit ϑ-Multiplikatoren auf eine Spitzenform zu reduzieren, kann ich im Augenblick nicht entscheiden.

Im zweiten Teil der Arbeit*) konstruiere ich mit den erprobten Methoden Formen zu Kongruenzuntergruppen der engeren Hilbertschen Modulgruppe des reellquadratischen Zahlkörpers $Z = R(\sqrt{D})$, dessen Diskriminante D ich stets $\equiv 5\,(8)$ annehme (d. h. (2) ist in Z Primideal). Zunächst sind einige Begriffsbildungen aus der Peterssonschen Theorie der automorphen Formen reeller Dimension[2]) auf zwei Variable zu übertragen; es folgt dann die Herleitung der ϑ-Multiplikatoren, d. h. des Multiplikatorsystems der Form

$$\vartheta(\tau, \tau') = \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \tau}{\sqrt{D}}} \quad (\mathfrak{Im}\,\tau > 0,\ \mathfrak{Im}\,\tau' < 0)^{3)}$$
$$(\mathfrak{o} = \text{Maximalordnung in } Z),$$

*) Eine ausführliche Darstellung dieses zweiten Teils erscheint demnächst unter dem Titel „Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variabeln" in der Mathematischen Zeitschrift (im folgenden zitiert mit K II).

[2]) Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen (Math. Annalen, Band 103), im folgenden zitiert mit A.

[3]) Das Spur- und Normzeichen: S, N verwende ich in üblicher Weise. Ist R eine rationale Funktion mit rationalen Zahlen als Koeffizienten, so sei

$$S\,R(\alpha, \ldots; \tau, \ldots) = R(\alpha, \ldots; \tau, \ldots) + R(\alpha', \ldots; \tau', \ldots),$$
$$N\,R(\alpha, \ldots; \tau, \ldots) = R(\alpha, \ldots; \tau, \ldots) \cdot R(\alpha', \ldots; \tau', \ldots),$$
$$(\sqrt{D})' = -\sqrt{D}.$$

In den nun folgenden Betrachtungen setze ich voraus, daß die Klassenzahl von Z gleich 1 ist. Es gibt dann zur Stufe $\nu \equiv 0\,(4)$ zu jeder Dimension $-r = -\frac{k}{2}$, $2 \nmid k$, $k \geqq 3$ ein System von Eisensteinreihen mit ϑ-Multiplikatoren, mit dessen Hilfe man eine vorgegebene ganze Form bis auf eine ganze Spitzenform reduzieren kann, d. h. bis auf eine solche Form, die in allen parabolischen Spitzen (so bezeichne ich aus begreiflichen Gründen die Punkte $\tau = \omega$, $\tau' = \omega'$, $\omega \subset Z + \infty$) verschwindet. Für $k = 3$ ist noch zusätzlich zu fordern, daß die Norm der Grundeinheit von Z gleich -1 ist. Die Tatsache, daß sich mit den gleichen Mitteln für die Formen der Dimension $-\frac{3}{2}$ in zwei Variabeln genauere Aussagen machen lassen, als für die Formen in einer Variabeln, ist überraschend und verleitet zu der Meinung, die Theorie der Formen in zwei Variabeln sei in gewissem Sinne einfacher, als die in einer Variabeln. Es scheint mir aber, daß die eigentlichen Schwierigkeiten, deren Lösung eine Theorie der Formen in zwei Variabeln lohnenswert macht, an ganz anderer Stelle zu suchen sind. Die weiteren Ausführungen zeigen, daß die genannten Reihen bezüglich der Formenreduktion genau dasselbe leisten, wie die gewöhnlichen Eisensteinreihen ganzer Dimension. Sei

$$Q(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{\nu,\mu=1}^{k} q_{\nu\mu}\, x_\nu\, x_\mu \quad (2 \nmid k, \;\; \mathfrak{Q} = (q_{\nu\mu}) = (q_{\mu\nu}),\; q_{\nu\mu} \subset \mathfrak{o})$$

eine primitive total positiv definite quadratische Form, dann ist die ϑ-Reihe

$$f(\mathfrak{Q};\tau,\tau') = \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_k \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{Q(\mu_1,\cdots,\mu_k)\tau}{\sqrt{D}}}$$

eine ganze Form zu einer gewissen Stufe ν. Bilden wir jetzt die Eisensteinreihe, die in allen Spitzen $\tau = \omega$, $\tau' = \omega'$ ($\omega \subset Z + \infty$) das gleiche Verhalten wie $f(Q;\tau,\tau')$ zeigt, so erhalten wir eine Form zur Stufe ν, die offenbar nur vom Formengeschlecht der quadratischen Form $Q(x_1, \cdots, x_k)$ abhängt; wir bezeichnen sie als die Geschlechtsinvariante zu $\mathfrak{Q}$. Ist die Klassenzahl von $R(\sqrt{D})$ gleich 1 und im Falle $k = 3$ die Norm der Grundeinheit gleich -1, so läßt sich die Geschlechtsinvariante zu $\mathfrak{Q}$ aus den oben genannten Eisensteinreihen halbzahliger Dimension linear zusammensetzen. Die Bedeutung, die den Geschlechtsinvarianten im Hinblick auf Darstellbarkeitsfragen zukommt, wird erst durch die Siegelsche Theorie der quadratischen Formen[4]) ins rechte Licht gerückt. Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Geschlechts-

---

[4]) C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen (Annals of Mathematics, Vol. 36).

invariante zu $\mathfrak{E}^{(3)}$ (Einheitsmatrix) stets von $f(\mathfrak{E}^{(3)}; \tau, \tau') = \vartheta^3(\tau, \tau')$ verschieden ist. Die Anregung zur Beschäftigung mit dem gesamten Fragenkomplex verdanke ich Herrn PETERSSON.

Modulformen in einer Variabeln.

§ 1. Partialbruchentwicklung der k-ten Potenz des ϑ-Nullwerts $\vartheta_{00}(\tau)$ $(k = 1, 3, 5, 7)$.

Um die Partialbruchreihen für die Potenzen des ϑ-Nullwerts

(1) $$\vartheta_{00}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} \qquad (\mathfrak{Im}\, \tau > 0)$$

zu gewinnen, hat man das Verhalten von $\vartheta_{00}(\tau)$ in den rationalen Punkten zu bestimmen. Das ist nach bekannten Methoden zu machen und führt uns zum Ansatz der Reihen

(2) $$\varphi_{-r}(\tau, s) = 1 + \sum_{\substack{c>0,\, d \\ (c,d)=1,\; 2/dc}} \left(\frac{H\left(\frac{d}{c}\right)}{\sqrt{c}\,\sqrt{-i(c\tau+d)}} \right)^k \frac{1}{|c\tau+d|^s},$$

wobei s die eingangs erwähnte Hilfsvariable, k eine natürliche ungerade Zahl, $r = \frac{k}{2}$ und

$$H\left(\frac{d}{c}\right) = \sum_{j \bmod c} e^{-\pi i \frac{d}{c} j^2}.$$

Alle Wurzeln bedeuten Hauptwerte. Nach ihrer Herkunft besitzt die Reihe $\varphi_{-r}(\tau, s)$ für alle Substitutionen S der ϑ-Gruppe Γ_3 die Invarianzeigenschaft

(3) $$\frac{\varphi_{-r}(S\tau, s)}{(\gamma\tau+\delta)^r\, |\gamma\tau+\delta|^s} = v^k(S)\, \varphi_{-r}(\tau, s),$$

dabei ist $\underline{S} = (\gamma, \delta)$ die zweite Zeile von S und v das Multiplikatorsystem von $\vartheta_{00}(\tau)$. Da die Reihen (2) für $\mathfrak{Re}\, s > 2 - r$ absolut konvergieren, so stellen also $\varphi_{-r}(\tau, 0)$ für $k \geqq 5$ Modulformen dar. Um $k = 1, 3$ mit zu erfassen, müssen wir in diesen Fällen $\varphi_{-r}(\tau, s)$ als Funktion von s bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ analytisch fortsetzen. Beachtet man

$$H\left(\frac{d}{c}\right) = H\left(\frac{d+2c}{c}\right),$$

so führt man $\varphi_{-r}(\tau, s)$ mit Hilfe von

(4) $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\omega)^r\, |m+\omega|^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}\, dx}{(x+\omega)^r\, |x+\omega|^s} \quad (\mathfrak{Im}\, \omega > 0)$$

leicht in

(5) $\varphi_{-r}(\tau, s)$

$$= 1 + \frac{e^{\frac{\pi i r}{2}}}{2^{r+s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{r+s}} \left\{ \sum_{\substack{j \bmod 2c \\ (c,j)=1 \quad 2/jc}} \frac{H\left(\frac{j}{c}\right)^k}{c^r} e^{\pi i n \frac{j}{c}} \right\} A_n\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right)$$

über. Zur Abkürzung ist

$$A_n\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}\, dx}{\left(x + \frac{\tau}{2}\right)^r \left| x + \frac{\tau}{2} \right|^s} \tag{6}$$

gesetzt. Bezeichnen wir noch

$$a_c(n, r) = \sum_{\substack{j \bmod 2c \\ (c,j)=1 \quad 2/jc}} \frac{H\left(\frac{j}{c}\right)^k}{c^r} e^{\pi i n \frac{j}{c}}, \qquad T_n(s, r) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{a_c(n, r)}{c^{r+s}}, \tag{7}$$

so erhalten wir schließlich

$$\varphi_{-r}(\tau, s) = 1 + \frac{e^{\frac{\pi i r}{2}}}{2^{r+s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(s, r)\, A_n\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right). \tag{8}$$

Es sind nun die Integrale $A_n(s, \omega, r)$ in ihrer Abhängigkeit von s zu studieren; das geschieht in der Weise, daß man $|x + \omega|^s$ ersetzt durch $(x + \omega)^{\frac{s}{2}} (x + \overline{\omega})^{\frac{s}{2}}$; dadurch wird der Integrand in x analytisch, und der Integrationsweg kann für positives n in die untere x-Halbebene, für nicht positives n in die obere x-Halbebene umgebogen werden[5]. Aus den Darstellungen, die man so gewinnt, erhellt, daß

1. $A_n(s, \omega, r)$ für $n \neq 0$ eine ganze Funktion in s ist,
2. gleichmäßig für alle s aus einem endlichen Bereich

$$A_n(s, \omega, r) = O(e^{-\delta |n|}) \qquad (|n| \to \infty)$$

für ein geeignetes $\delta > 0$ gilt,

(9) 3. $A_0(s, \omega, r)$ für $\Re s > -\frac{1}{2}$ regulär ist, sobald $r \geqq \frac{3}{2}$,

4. $$A_n(0, \omega, r) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi i r}{2}} \dfrac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)} n^{r-1} e^{2\pi i \omega n} & \text{für } n > 0, \\ 0 & \text{für } n < 0, \end{cases}$$

$$A_0\left(0, \omega, \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Eine besondere Überlegung erfordert die Diskussion von $A_0\left(s, \omega, \frac{1}{2}\right)$. Unterwirft man die Integrationsvariable einer geeigneten linearen Trans-

---

[5]) Vgl. E. Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen II. (Hamburger Abhandlungen, Band 3.)

formation, so reduziert sich die Betrachtung auf den Fall $\omega = i$; es gilt nämlich

$$A_0\left(s, \omega, \frac{1}{2}\right) = y^{\frac{1}{2}-s} \cdot A_0\left(s, i, \frac{1}{2}\right), \qquad y = \Im \omega.$$

Wir integrieren über einen Weg, der den Schnitt von i vertikal nach oben im positiven Sinne umläuft, und wählen den Weg speziell so, daß wir den Strahl, der von $\frac{3i}{2}$ nach $i\infty$ führt, in jeder Richtung einmal durchlaufen und außerdem den Punkt i im Abstand $\frac{1}{2}$ im positiven Sinne umkreisen. Wir erhalten demnach

$$A_0\left(s, i, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{|x-i|=\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+i)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(x-i)^{\frac{s}{2}}} + (1-e^{\pi i s}) \int\limits_{\frac{3i}{2}}^{i\infty} \frac{dx}{(x+i)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(x-i)^{\frac{s}{2}}},$$

dabei ist im zweiten Integral längs des Integrationsweges $\log(x-i) = \log|x-i| + \frac{\pi i}{2}$. Das erste Integral ist ersichtlich eine ganze Funktion in s, die bei $s = 0$ verschwindet. Wir brauchen also nur noch

$$\int\limits_{\frac{3i}{2}}^{i\infty} \frac{dx}{(x+i)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(x-i)^{\frac{s}{2}}} = e^{\frac{\pi i}{4}-\frac{\pi i}{2}s} \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{dz}{(z+1)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(z-1)^{\frac{s}{2}}}$$

zu untersuchen. Das letzte Integral vergleichen wir mit einem einfacheren, welches sich elementar berechnen läßt:

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{dz}{(z+1)^{\frac{1}{2}+s}} = \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + h(s)$$

$h(s)$ ist eine ganze Funktion in s. Variiert s in einem abgeschlossenen endlichen Bereich, so gilt für $z \to \infty$ gleichmäßig in s

$$\varphi(z, s) = \frac{1}{(z+1)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(z-1)^{\frac{s}{2}}} - \frac{1}{(z+1)^{\frac{1}{2}+s}} = O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}+s}}\right),$$

d. h. also

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} \varphi(z, s)\, dz$$

ist für $\Re s > -\frac{1}{2}$ in s regulär-analytisch. Aus der Darstellung

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{dz}{(z+1)^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}(z-1)^{\frac{s}{2}}} = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} \varphi(z, s)\, dz + \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + h(s)$$

folgt schließlich: Bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s=\frac{1}{2}$ ist $A_0\left(s,\omega,\frac{1}{2}\right)$ für $\Re s>-\frac{1}{2}$ in s regulär und hat bei $s=0$ eine Nullstelle. Damit ist die Diskussion der Integrale $A_n(s,\omega,r)$ abgeschlossen und wir können uns den singulären Reihen $T_n(s,r)$ zuwenden. Beachtet man

$$(10)\qquad \frac{H\begin{pmatrix} j \\ c \end{pmatrix}}{\sqrt{c}}=\begin{cases}\left(\frac{j}{c}\right)e^{\pi i\frac{c-1}{4}} & \text{für } 2/j,\\ \left(\frac{c}{j}\right)e^{-\pi i\frac{j}{4}} & \text{für } 2/c,\end{cases}$$
$$c>0\quad (j,c)=1,$$

so folgt die Multiplikativität der Koeffizienten $a_c(n,r)$:

$$a_{c_1c_2}(n,r)=a_{c_1}(n,r)\,a_{c_2}(n,r)\quad\text{für}\quad (c_1,c_2)=1,\qquad c_i>0,$$

mithin für die singulären Reihen die Darstellung

$$(11)\qquad T_n(s,r)=\prod_p \psi_p^{(n)}(s,r),\qquad \psi_p^{(n)}(s,r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{p^\nu}(n,r)}{p^{\nu(r+s)}}.$$

Auf Grund elementar arithmetischer Überlegungen ergeben sich für die Koeffizienten $a_{p^\nu}(n,r)$ die folgenden Werte:

1. $p>2$

$$(12)\quad a_{p^\nu}(n,r)=\begin{cases}0 & \text{für } p^{\nu-1}\nmid n,\\ p^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{n}{p^{\nu-1}}}{p}\right) & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu\nmid n,\ \nu\equiv 1(2),\\ 0 & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu/n,\ \nu\equiv 1(2),\\ -p^{\nu-1} & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu\nmid n,\ \nu\equiv 0(2),\\ \varphi(p^\nu) & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu/n,\ \nu\equiv 0(2).\end{cases}$$

2. $p=2$

$$(13)\quad a_{2^\nu}(n,r)=\begin{cases}0 & \text{für } \nu\equiv 1(2),\ 2^{\nu-1}\nmid n,\\ 2^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\pi i\frac{j}{2}}\left(\frac{2}{k}\right) & \text{für } \nu\equiv 1(2),\ 2^{\nu-1}/n,\ j=\frac{n}{2^{\nu-1}},\ 2/j,\\ 2^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\pi i\frac{j-1}{2}}\left(\frac{2}{k-2}\right) & \text{für } \nu\equiv 1(2),\ 2^{\nu-1}/n,\ j=\frac{n}{2^{\nu-1}},\ 2\nmid j,\\ 2^\nu\,\delta\left(\frac{u-k}{4}\right)e^{\pi i\frac{u-k}{4}} & \text{für } \nu\equiv 0(2),\ n=2^{\nu-2}u,\ u\equiv 1(2),\\ 0 & \text{für } \nu\equiv 0(2)\ \text{sonst}.\end{cases}$$

Dabei ist

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & \text{für ganzes } x,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wenn

$$d = d\left((-1)^{\frac{k-1}{2}} n\right)$$

die Diskriminante des quadratischen Körpers $R\left(\sqrt{(-1)^{\frac{k-1}{2}} n}\right)$, $\left(\frac{d}{x}\right)_*$ der Charakter mod d, der für positive x mit $\left(\frac{d}{x}\right)$ übereinstimmt, so ergibt sich nach einfacher Rechnung für unsere singuläre Reihe $T_n(s, r)$ der Ausdruck

$$(14)\qquad \begin{aligned} T_n(s, r) &= \frac{L\left(\frac{k-1}{2}+s, \left(\frac{d}{x}\right)_*\right)}{\zeta(k-1+2s)}\, U_n(s, r) \quad \text{für } n \neq 0, \\ T_0(s, r) &= \frac{\zeta(k-2+2s)}{\zeta(k-1+2s)}\, U_0(s, r), \end{aligned}$$

wobei $\zeta(s)$ die ζ-Funktion des rationalen Zahlkörpers,

$$L\left(s, \left(\frac{d}{x}\right)_*\right) = \prod_p \left(1 - \frac{\left(\frac{d}{p}\right)}{p^s}\right)^{-1},$$

$$(15)\quad U_n(s, r) = \frac{\psi_2^{(n)}(s, r)}{\chi_2^{(n)}(s, r)} \cdot \prod_{\substack{p/d \\ p>2}} \frac{\psi_p^{(n)}(s, r)}{1 - \frac{1}{p^{k-1+2s}}} \prod_{\substack{p/n \\ p \nmid d \\ p>2}} \frac{\psi_p^{(n)}(s, r)}{1 + \frac{\left(\frac{d}{p}\right)}{p^{\frac{k-1}{2}+s}}} \quad \text{für } n \neq 0,$$

$$(16)\qquad \chi_2^{(n)}(s, r) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\left(\frac{d}{2}\right)}{2^{\frac{k-1}{2}+s}} & \text{für } 2 \nmid d, \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{2^{k-1+2s}} & \text{für } 2/d \end{cases}$$

und

$$(17)\qquad U_0(s, r) = \frac{1 - \frac{1}{2^{k-2+2s}}}{1 - \frac{1}{2^{k-1+2s}}}\, \psi_2^{(0)}(s, r).$$

Die unendliche Reihe für $\psi_2^{(0)}(s, r)$ läßt sich einfach summieren und liefert

$$(18)\qquad U_0(s, r) = \frac{1 + \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-\left(\frac{k-3}{2}+s\right)}}{1 + \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-\left(\frac{k-1}{2}+s\right)}}.$$

Die Fälle $k \geqq 5$ betrachten wir als erledigt, da hier Konvergenzschwierigkeiten gar nicht auftreten. Es bleibt also noch $U_n(s, r)$ für $n \neq 0$,

$r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ zu untersuchen. Für jeden der Faktoren, aus denen sich $U_n(s, r)$ zusammensetzt, kann man nach einfachen Umformungen eine einfache Gestalt gewinnen. Ich übergehe diese Rechnung und gebe nur das Resultat an. Sei $p > 2$ und p^h/n, $p^{h+1} \nmid n$, dann gilt

$$\frac{\psi_p^{(n)}(s, r)}{1 - p^{-(k-1+2s)}} = \sum_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} p^{-(k-2+2s)\nu} \quad \text{für } p/d, \tag{19}$$

$$\frac{\psi_p^{(n)}(s, r)}{1 + \left(\frac{d}{p}\right) p^{-\left(\frac{k-1}{2}+s\right)}} = \left(1 - \left(\frac{d}{p}\right) p^{-\left(\frac{k-1}{2}+s\right)}\right) \sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} p^{-(k-2+2s)\nu} + p^{-(k-2+2s)\frac{h}{2}} \quad \text{für } p \nmid d. \tag{20}$$

Etwas komplizierter sind die Rechnungen für $p = 2$; sie decken aber gerade die Eigenschaften von $U_n(s, r)$ auf, die bewirken, daß der Ansatz zum Erfolg führt. Sei im folgenden 2^h die genaue Potenz von 2, die in n steckt:

$$2^h/n, \qquad 2^{h+1} \nmid n,$$
$$n = 2^h \cdot u.$$

Es gilt dann

$$\frac{\psi_2^{(n)}(s, r)}{\chi_2^{(n)}(s, r)} = \left(1 + \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-\left(\frac{k-1}{2}+s\right)}\right)^{-1} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} 2^{-(k-2+2s)\nu} + \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-\left(\frac{k-3}{2}+s\right)} \sum_{\nu=0}^{\frac{h-3}{2}} 2^{-(k-2+2s)\nu} \right\} \quad \text{für } h \equiv 1\,(2), \tag{21}$$

$$\frac{\psi_2^{(n)}\left(s, \frac{1}{2}\right)}{\chi_2^{(n)}\left(s, \frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{-2^s}{1+2^{-s}} + 2^s \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}} 2^{\nu(1-2s)} & \text{für } h \equiv 0\,(2),\ u \equiv -1\,(4), \\ (1+2^{1-s}) \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}} 2^{\nu(1-2s)} & \text{für } h \equiv 0\,(2),\ u \equiv 5\,(8), \\ \dfrac{2}{1+2^{-s}} + (2^{1-s}-1) \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\frac{h}{2}} 2^{\nu(1-2s)} & \text{für } h \equiv 0\,(2),\ u \equiv 1\,(8), \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(n)}\left(s, \frac{3}{2}\right) = (1-2^{-(1+2s)})^{-1} \Big\{ & 1 - 2^{-(1+2s)} - 2^{-(1+s)} + 2^{-\frac{h}{2}(1+2s)-(1+s)} \\ & + (1-2^{-(1+2s)}) \Big(e^{\pi i \frac{u-3}{4}} \delta\left(\frac{u-3}{4}\right) 2^{-\frac{h+2}{2}(1+2s)} \\ & + e^{\pi i \frac{u-1}{2}} 2^{-\frac{h}{2}(1+2s)-(1+s)} \Big) \Big\} \quad \text{für } h \equiv 0\,(2), \end{aligned} \tag{23}$$

$$(24)\qquad \frac{\psi_2^{(n)}\left(s,\frac{3}{2}\right)}{\chi_2^{(n)}\left(s,\frac{3}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{\psi_2^{(n)}\left(s,\frac{3}{2}\right)}{1-2^{-2(1+s)}} & \text{für } 2/d, \\ \dfrac{\psi_2^{(n)}\left(s,\frac{3}{2}\right)}{1+\left(\frac{d}{2}\right)2^{-(1+s)}} & \text{für } 2\nmid d. \end{cases}$$

Damit haben wir alle Formeln zusammengestellt. Wir führen jetzt die Betrachtungen für $k=3$ zu Ende. Die Formeln (19), (20), (21), (23) und (24) zeigen, daß $U_n\left(s,\frac{3}{2}\right)$ für $\Re s \geqq -\frac{1}{4}$ regulär ist und bei $s=0$ genau dann verschwindet, wenn $\psi_2^{(n)}\left(0,\frac{3}{2}\right) = 0$. Nach (21) kann dies nur für $h\equiv 0(2)$ eintreten. Aus

$$(25)\quad \psi_2^{(n)}\left(0,\frac{3}{2}\right) = 2^{-\frac{h}{2}}\left(1+\frac{1}{2}e^{\pi i\frac{u-1}{2}}+\frac{1}{2}e^{\pi i\frac{u-3}{4}}\delta\left(\frac{u-3}{4}\right)\right) \text{ für } h\equiv 0(2)$$

resultiert dann:

$\psi_2^{(n)}\left(0,\frac{3}{2}\right)$ und mithin auch $U_n\left(0,\frac{3}{2}\right)$ verschwindet genau dann, wenn

$$n = 4^a(8b+7),$$

insbesondere also für $n=-g^2$.

Aus (14) und (18) folgt daher, daß $T_n\left(s,\frac{3}{2}\right)$ für alle n bei $s=0$ regulär ist. Außerdem gewinnt man aus den abgeleiteten Formeln mühelos eine Abschätzung

$$(26)\qquad T_n\left(s,\frac{3}{2}\right) = O(|n|^{\varkappa}) \qquad (|n|\to\infty),$$

gleichmäßig für alle s des Bereichs

$$-\frac{1}{4} \leqq \Re s \leqq 1$$
$$-1 \leqq \Im s \leqq 1,$$

für eine gewisse Konstante $\varkappa>0$. Dabei beachte man, daß für die L-Reihen $L\left(1+s,\left(\frac{d}{x}\right)_*\right)$ selbst eine in s gleichmäßige Abschätzung vom Typus (26) gilt, sofern $\left(\frac{d}{x}\right)_*$ nicht der Hauptcharakter ist. Es gibt also für die Reihe

$$\varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau,s) = 1+\frac{e^{\frac{\pi i 3}{4}}}{2^{\frac{3}{2}+s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n\left(s,\frac{3}{2}\right)A_n\left(s,\frac{\tau}{2},\frac{3}{2}\right)$$

eine von s unabhängige konvergente Majorante

$$c_1 + c_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{\varkappa}\, e^{-\delta |n|} \qquad (\varkappa > 0,\ \delta > 0).$$

Damit ist die analytische Fortsetzung geleistet, und wir erhalten die Modulform

$$\text{(27)} \qquad \varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0) = 1 + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(0, \frac{3}{2}\right) n^{\frac{1}{2}}\, e^{\pi i \tau n}.$$

Da die Koeffizienten dieser Reihe nur wie eine feste Potenz von n wachsen, so folgt

$$\varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0) = O(y^{-\varkappa}) \qquad (\mathfrak{Im}\, \tau = y \to 0)$$

gleichmäßig in $\mathfrak{Re}\, \tau$. Infolgedessen kommen in den Potenzreihenentwicklungen von $\varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0)$ in den parabolischen Spitzen des Fundamentalbereichs der ϑ-Gruppe Glieder mit negativen Exponenten nicht vor; d. h. $\varphi_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0)$ ist eine ganze Form. Es gibt aber zur ϑ-Gruppe Γ_3 nur eine ganze Form der Dimension $-\frac{k}{2}$ $(k = 1, 2, \cdots, 7)$ mit dem Multiplikatorsystem v^k. Denn ist $\psi_{-\frac{k}{2}}(\tau)$ eine solche Form, so hat sie im Punkte $\tau = 1$ des Fundamentalbereichs der ϑ-Gruppe (beschrieben durch die Ungleichungen: $x^2 + y^2 \geqq 1$, $|x| \leqq 1$, $\tau = x + iy$) eine im Sinne der Peterssonschen Theorie der automorphen Formen zwangsläufige Nullstelle der Mindestordnung $\frac{k}{8}$. $\vartheta_{00}^k(\tau)$ hat in $\tau = 1$ eine Nullstelle von der genauen Ordnung $\frac{k}{8}$ und verschwindet sonst nirgends im Fundamentalbereich. $\psi_{-\frac{k}{2}}(\tau)\, \vartheta_{00}^{-k}(\tau)$ ist also eine Funktion zu Γ_3 ohne Singularität, folglich konstant. Damit ist gezeigt:

$$\text{(28)} \qquad \vartheta_{00}^3(\tau) = 1 + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(0, \frac{3}{2}\right) n^{\frac{1}{2}}\, e^{\pi i \tau n}.$$

Der n-te Koeffizient der Reihe ist also gleich der Anzahl der Darstellungen von n als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen. Beachtet man, daß für $n > 0$

$$L\left(1, \left(\frac{d}{x}\right)_*\right) = \frac{2\pi\, h(d)}{w \sqrt{|d|}},$$

wobei $h(d)$ die Klassenzahl von $R(\sqrt{-n})$ und w die Anzahl der Einheitswurzeln in $R(\sqrt{-n})$ bedeutet, so erhält man schließlich:

Satz 1: *Die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von drei Quadraten ist gleich*

$$\frac{24}{w}\left|\frac{n}{d}\right|^{\frac{1}{2}} h(d)\, U_n\left(0, \frac{3}{2}\right);$$

es gibt genau dann eine solche Darstellung, wenn

$$n \neq 4^a\,(8\,b + 7).$$

Die Behandlung des Falles $k = 1$ bereitet jetzt keine Schwierigkeit mehr. Die gleiche Schlußweise liefert

$$(29)\qquad \vartheta_{00}(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n\left(0, \frac{1}{2}\right) n^{-\frac{1}{2}}\, e^{\pi i \tau n}.$$

Die Formeln (20) und (22) gestatten überdies, diese Identität rechnerisch festzustellen. Ist nämlich n keine Quadratzahl, so ist $L\left(0, \left(\frac{d}{x}\right)_*\right) = 0$, weil $\left(\frac{d}{x}\right)_*$ ein eigentlicher Charakter mod d ist. Für $n = \nu^2$ gilt aber

$$U_n\left(0, \frac{1}{2}\right) = 2\,\nu.$$

Die rechte Seite von (29) wird also in der Tat gleich

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\pi i \tau \nu^2}.$$

§ 2. Partialbruchentwicklung der analytischen Geschlechtsinvarianten einiger spezieller Typen von positiv definiten ternären quadratischen Formen.

Mit der Methode, die uns die Partialbruchentwicklung von $\vartheta_{00}^3(\tau)$ und damit eine explizite Formel für die Anzahl der Darstellungen von n durch die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ lieferte, kann man für eine ansehnliche Reihe weiterer ternärer Formen von der Art $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$ entsprechende Aussagen herleiten, wie sie für die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ in Satz 1 formuliert sind. Es ist zweierlei auszuführen: Wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x}$ (in üblicher Matrizenbezeichnung) eine primitive positiv definite ternäre quadratische Form, $\mathfrak{Q}$ eine ganzzahlige symmetrische Matrix, so hat man eine Partialbruchreihe zu konstruieren, die in allen rationalen Punkten das gleiche Verhalten zeigt wie die ϑ-Reihe

$$\vartheta(\mathfrak{Q};\tau) = \sum_{\mathfrak{x}} e^{\pi i \tau \mathfrak{x}'\mathfrak{Q}\mathfrak{x}},$$

wo über alle ganzzahligen Spalten

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

summiert wird. Alsdann ist zu untersuchen, ob die Partialbruchreihe, falls sie existiert, mit der ϑ-Funktion $\vartheta(\mathfrak{Q}; \tau)$ identisch ist. Für jede numerisch gegebene ternäre Form kann man diese Frage durch Ausrechnen der ersten Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung der Partialbruchreihe zur Spitze ∞ entscheiden; denn eine Form der Dimension $-\frac{3}{2}$ mit denselben Multiplikatoren wie $\vartheta(\mathfrak{Q}, \tau)$ hat im Fundamentalbereich der Gruppe, die $\vartheta(\mathfrak{Q}, \tau)$ festläßt, eine Nullstellenzahl, die unter einer angebbaren Schranke liegt, sofern die genannte Form nicht identisch verschwindet.

Verfahren wir nach der eingangs erläuterten Vorschrift, so erhalten wir zu $\vartheta(\mathfrak{Q}; \tau)$ die Partialbruchreihe

$$(30) \qquad F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = 1 + \sum_{\substack{c>0,\, d \\ (c,d)=1,\, 2/dc}} \frac{H\left(\mathfrak{Q}, \frac{d}{c}\right)}{Q^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} \{-i(c\tau+d)\}^{\frac{3}{2}} |c\tau+d|^s},$$

wobei

$$Q = |\mathfrak{Q} \quad \text{die Diskriminante von } \mathfrak{Q}$$

und

$$H\left(\mathfrak{Q}, \frac{d}{c}\right) = \sum_{\mathfrak{x} \bmod c} e^{-\pi i \frac{d}{c} \mathfrak{x}' \mathfrak{Q} \mathfrak{x}} \quad \text{für } (d, c) = 1,\ 2/dc.$$

Aus der Fourierentwicklung

$$F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = 1 + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2^{\frac{3}{2}+s} Q^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(\mathfrak{Q}; s)\, A_n\left(s, \frac{\tau}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$(31) \qquad T_n(\mathfrak{Q}; s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{a_c(\mathfrak{Q}, n)}{c^{\frac{3}{2}+s}},$$

$$a_c(\mathfrak{Q}, n) = \sum_{\substack{j \bmod 2c \\ (j,c)=1,\, 2/jc}} \frac{H\left(\mathfrak{Q}, \frac{j}{c}\right)}{c^{\frac{3}{2}}} e^{\pi i n \frac{j}{c}},$$

ergibt sich mit Hilfe späterer Betrachtungen die Möglichkeit der analytischen Fortsetzung von $F(\mathfrak{Q}, \tau, s)$ in eine volle Umgebung von $s = 0$. Nur unter einschränkenden Voraussetzungen für $\mathfrak{Q}$ gelingt dann der Nachweis, daß

$$F(\mathfrak{Q}; \tau) = F(\mathfrak{Q}; \tau, 0)$$

in τ analytisch ist und eine ganze Modulform darstellt. Trifft dies zu, so erkennt man aus der Struktur der Koeffizienten in der Fourierentwicklung von $F(\mathfrak{Q}; \tau)$, daß $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ mit der von Herrn Siegel eingeführten analytischen Geschlechtsinvariante zur quadratischen Form $\mathfrak{Q}$

identisch ist (loc. cit[4])). Deutet man die Reihenabschnitte

$$\sum_{\substack{c/d \\ c>0}} \frac{a_c(\mathfrak{Q}, n)}{c^{\frac{3}{2}}}$$

als Kongruenzlösungsanzahlen, so folgt aus deren Multiplikativität die Multiplikativität der $a_c(\mathfrak{Q}, n)$:

$$a_c(\mathfrak{Q}, n) = a_{c_1}(\mathfrak{Q}, n) \cdot a_{c_2}(\mathfrak{Q}, n), \qquad (c_1, c_2) = 1,\ c = c_1 c_2.$$

In K II, § 3 werden wir diesen Sachverhalt beim entsprechenden Konstruktionsproblem im reell quadratischen Zahlkörper als Musterbeispiel genauer explizieren. Für die singulären Reihen T_n erhalten wir somit die Darstellung:

$$(32)\quad T_n(\mathfrak{Q}; s) = \prod_p \psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s), \qquad \psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{p^\nu}(\mathfrak{Q}, n)}{p^{\nu\left(\frac{3}{2}+s\right)}}.$$

Für die Primzahlen $p \nmid 2Q$ ist die Berechnung von $a_{p^\nu}(\mathfrak{Q}, n)$ unschwer durchzuführen, da man die Form $\mathfrak{Q}$ mod p^ν unimodular auf Diagonalgestalt transformieren kann. Man erhält:

$$(33)\quad a_{p^\nu}(\mathfrak{Q}, n) = \begin{cases} 0 & \text{für } p^{\nu-1} \nmid n, \\ p^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{-Q\dfrac{n}{p^{\nu-1}}}{p}\right) & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu \nmid n,\ \nu \equiv 1\,(2), \\ 0 & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu/n,\ \nu \equiv 1\,(2), \\ -p^{\nu-1} & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu \nmid n,\ \nu \equiv 0\,(2), \\ \varphi(p^\nu) & \text{für } p^{\nu-1}/n,\ p^\nu/n,\ \nu \equiv 0\,(2), \end{cases}$$

$$(p \nmid 2Q),$$

daher für $p \nmid 2Qn$:

$$\psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s) = \frac{1-p^{-2(1+s)}}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-(1+s)}},$$

wenn d die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{-Qn})$. Bis auf einen elementaren Faktor ist also T_n für $n \neq 0$ Quotient zweier L-Reihen:

$$T_n(\mathfrak{Q}, s) = \frac{L\left(1+s, \left(\frac{d}{x}\right)_*\right)}{\zeta(2+2s)} \cdot U_n(\mathfrak{Q}, s) \quad \text{für } n \neq 0,$$

$$(34)\qquad U_n(\mathfrak{Q}, s) = \prod_{p/2Qn} \frac{\psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s)}{\chi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s)},$$

$$\chi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s) = \begin{cases} 1+\left(\frac{d}{p}\right)p^{-(1+s)} & \text{für } p \nmid d, \\ 1-p^{-2(1+s)} & \text{für } p/d. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ergibt sich

$$T_0(\mathfrak{Q}, s) = \frac{\zeta(1+2s)}{\zeta(2+2s)} U_0(\mathfrak{Q}, s),$$
(35)
$$U_0(\mathfrak{Q}, s) = \prod_{p/2Q} \frac{1-p^{-(1+2s)}}{1-p^{-2(1+s)}} \psi_p^{(0)}(\mathfrak{Q}, s).$$

Die Faktoren von U_n $(n \neq 0)$ zu den $p \nmid 2Q$ lassen sich auf Grund der Tabelle (33), wie folgt, darstellen:

$$p^h/n, \quad p^{h+1} \nmid n, \quad p \nmid 2Q,$$
(36)
$$\frac{\psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s)}{\chi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, s)} = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{d}{p}\right) p^{-(1+s)}\right) \sum\limits_{\nu=0}^{\frac{h-1}{2}} p^{-\nu(1+2s)} & \text{für } h \equiv 1(2), \\ \left(1-\left(\frac{d}{p}\right) p^{-(1+s)}\right) \sum\limits_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} p^{-\nu(1+2s)} + p^{-\frac{h}{2}(1+2s)} & \\ & \text{für } h \equiv 0(2), \end{cases}$$

Es ist also stets

(37)
$$\frac{\psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0)}{\chi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0)} \neq 0 \quad \text{für } p \nmid 2Q.$$

Die weitere Rechnung wird jetzt unter der Voraussetzung durchgeführt, daß $\mathfrak{Q}$ Diagonalgestalt hat:

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalelemente α_i quadratfreie natürliche Zahlen sind. Wir verabreden die folgende feste Bezeichnung:

$$\alpha_k = 2^{\nu_{0k}} q_1^{\nu_{1k}} \cdots q_r^{\nu_{rk}} \qquad (k = 1, 2, 3).$$
$$2 < q_1 < q_2 < \cdots < q_r, \qquad q_i = \text{Primzahl},$$
$$0 \leqq \nu_{ik} \leqq 1,$$
$$\nu_i = \nu_{i1} + \nu_{i2} + \nu_{i3} \qquad (i = 0, \cdots, r),$$
$$0 \leqq \nu_0 \leqq 2, \qquad 1 \leqq \nu_k \leqq 2 \qquad (k = 1, \cdots, r),$$
$$Q = 2^{\nu_0} q_1^{\nu_1} \cdots q_r^{\nu_r},$$
$$Q = 2^{\nu_0} R_0, \qquad Q = q_k^{\nu_k} R_k \qquad (k = 1, \cdots, r),$$
$$\alpha_k = q_i^{\nu_{ik}} \beta_{ki} = 2^{\nu_{0k}} \beta_{k0} \qquad (k = 1, 2, 3, \quad i = 1, \cdots, r),$$
$$\varrho_{i\nu} = \begin{cases} \nu_i & \text{für } 2/\nu \\ 3-\nu_i & \text{für } 2 \nmid \nu \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, r),$$
$$B_i = \beta_{1i}^{\nu_{i1}} \beta_{2i}^{\nu_{i2}} \beta_{3i}^{\nu_{i3}} \qquad (i = 0, 1, \cdots, r),$$
$$\beta = \beta_{10} + \beta_{20} + \beta_{30}$$

und, falls $n \neq 0$,

$$n = 2^{h_0} q_1^{h_1} \cdots q_r^{h_r} \cdot n_0 = 2^{h_0} \cdot u, \qquad (n_0, 2Q) = 1.$$

Mit den Werten der verallgemeinerten Gaußschen Summen:

$$H\left(\mathfrak{Q}, \frac{2j}{q_\iota^\nu}\right) = q_\iota^{\frac{3\nu}{2}+\frac{\nu_\iota}{2}} \left(\frac{-2}{q_\iota}\right)^{\nu+\nu_\iota} \left(\frac{B_\iota}{q_\iota}\right) \left(\frac{R_\iota}{q_\iota}\right)^{\nu} \left(\frac{j}{q_\iota}\right)^{\nu+\nu_\iota} e^{-\pi i \frac{q_\iota - 1}{2} \varrho_{\iota\nu}}$$
$$(\iota = 1, \cdots, r),$$

$$H\left(\mathfrak{Q}, \frac{j}{2^\nu}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \equiv 1\,(2),\quad \nu = 1,\quad \nu_0 > 0, \\ 2^{\frac{3\nu}{2}+\frac{\nu_0}{2}} \left(\frac{2}{R_0}\right)^{\nu} \left(\frac{2}{B_0}\right) \left(\frac{2}{j}\right)^{\nu+\nu_0} e^{-\pi i \frac{\beta j}{4}} & \text{für } j \equiv 1\,(2) \text{ sonst,} \end{cases}$$
$$(\text{dabei stets } \nu > 0),$$

die man aus § 1 (10) ableitet, gewinnt man für die noch nicht bestimmten Koeffizienten von T_n mit Primzahlpotenzindex die Darstellung:

$$(38)\quad a_{q_i^\nu}(\mathfrak{Q}, n) = \begin{cases} 0 & \text{für } q_i^{\nu-1} \nmid n, \\ q_i^{\nu+\frac{\nu_i}{2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{B_i}{q_i}\right) \left(\frac{R_i}{q_i}\right)^{\nu} \left(\frac{\frac{n}{q_i^{\nu-1}}}{q_i}\right) & \text{für } q_i^{\nu-1}/n,\ q_i^\nu \nmid n,\ \nu \not\equiv \nu_i\,(2), \\ 0 & \text{für } q_i^{\nu-1}/n,\ q_i^\nu/n,\ \nu \not\equiv \nu_i\,(2), \\ -q_i^{\nu+\frac{\nu_i}{2}-1} \left(\frac{-B_i}{q_i}\right) \left(\frac{R_i}{q_i}\right)^{\nu} & \text{für } q_i^{\nu-1}/n,\ q_i^\nu \nmid n,\ \nu \equiv \nu_i\,(2), \\ q_i^{\frac{\nu_i}{2}} \varphi(q_i^\nu) \left(\frac{-B_i}{q_i}\right) \left(\frac{R_i}{q_i}\right)^{\nu} & \text{für } q_i^{\nu-1}/n,\ q_i^\nu/n,\ \nu \equiv \nu_i\,(2), \end{cases}$$

ferner

$$a_2(\mathfrak{Q}, n) = 0 \quad \text{für } \nu_0 > 0$$

und in allen übrigen Fällen:

$$(39)\quad a_{2^\nu}(\mathfrak{Q}, n) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \not\equiv \nu_0\,(2),\ 2^{\nu-1} \nmid n, \\ 2^{\nu+\frac{\nu_0}{2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{R_0}\right)^{\nu} \left(\frac{2}{B_0\,\beta}\right) e^{\pi i \frac{j}{2}} & \text{für } \nu \not\equiv \nu_0\,(2),\ j = \frac{n}{2^{\nu-1}} \equiv 0\,(2), \\ 2^{\nu+\frac{\nu_0}{2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{R_0}\right)^{\nu} \left(\frac{2}{B_0(\beta-2)}\right) e^{\pi i \frac{j-1}{2}} & \text{für } \nu \not\equiv \nu_0\,(2),\ j = \frac{n}{2^{\nu-1}} \equiv 1\,(2), \\ 2^{\nu+\frac{\nu_0}{2}} \left(\frac{2}{R_0}\right)^{\nu} \left(\frac{2}{B_0}\right) \delta\left(\frac{u-\beta}{4}\right) e^{\pi i \frac{u-\beta}{4}} & \text{für } \nu \equiv \nu_0\,(2),\ n = 2^{\nu-2} u,\ u \equiv 1\,(2), \\ 0 & \text{für } \nu \equiv \nu_0\,(2) \text{ sonst,} \end{cases}$$

dabei ist

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für ganz rationales } x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus diesen Daten bestimmt man die Größen $\psi_2^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0)$ und $\psi_{q_i}^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0)$, in deren Verhalten sich die besonderen Eigenschaften der quadratischen Form $\mathfrak{Q}$ spiegeln:

$$(40)\quad \psi_{q_i}^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0) = \begin{cases} 1 + \left(\dfrac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right) & \text{für } n = 0, \\ \left(1 + \left(\dfrac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right)\right) - \left(\dfrac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right) q_i^{-\frac{h_i+1-\nu_i}{2}} \left(1 + \dfrac{1}{q_i}\right) & \\ \qquad\qquad \text{für } n \neq 0,\ h_i \not\equiv \nu_i\,(2), & \\ \left(1 + \left(\dfrac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right)\right) - \left(\dfrac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right) q_i^{-\frac{h_i+2-\nu_i}{2}} & \\ \qquad \times \left(1 - \left(\dfrac{-R_i \frac{n}{q_i^{h_i}}}{q_i}\right)\right) & \text{für } n \neq 0,\ h_i \equiv \nu_i\,(2), \end{cases}$$

$$(41)\qquad \psi_2^{(0)}(\mathfrak{Q}, 0) = 1 + \left(\frac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right)$$

und für $n \neq 0$:

$$(42)\quad \psi_2^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0) = \begin{cases} \left(1 + \left(\dfrac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right)\right) - \left(\dfrac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right) 2^{-\frac{h_0-\nu_0-1}{2}} \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) & \\ \qquad\qquad \text{für } h_0 \not\equiv \nu_0\,(2),\ h_0 > \nu_0, & \\ 1 & \text{für } h_0 \not\equiv \nu_0\,(2),\ h_0 < \nu_0, \end{cases}$$

$$(43)\quad \psi_2^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0) = \begin{cases} \left(1 + \left(\dfrac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right)\right) - \left(\dfrac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right) 2^{-\frac{h_0-\nu_0}{2}} & \\ \quad \times \left\{1 - (-1)^{\frac{u-1}{2}} \left(\dfrac{2}{1-2\beta}\right) \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{2}{R_0 \beta}\right) \delta\left(\dfrac{u-\beta}{4}\right) \right. & \\ \quad \left. \times\, e^{\pi i \frac{u-\beta}{4}} \dfrac{1}{2} \right\} & \text{für } h_0 \equiv \nu_0(2),\ h_0 \geqq \nu_0, \\ 1 + \left(\dfrac{2}{B_0}\right) \delta\left(\dfrac{u-\beta}{4}\right) e^{\pi i \frac{u-\beta}{4}} & \text{für } h_0 = 0,\ \nu_0 = 2. \end{cases}$$

Wenn nicht zugleich $h_0 = 0$ und $\nu_0 = 2$, so ist $\left(\dfrac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right) = 1$ mit $\psi_2^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0) = 0$ nicht verträglich; denn aus dem Bestehen der Gleichungen würde folgen:

$$h_0 = \nu_0, \qquad \left(\frac{2}{1-2\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} = (-1)^{\frac{u+1}{2}}, \qquad u \equiv \beta\,(4),$$

d. i. ein Widerspruch.

für die n mit $-Qn = g^2$, d. h. also, wenn

$$\prod_{p/2Q} \psi_p^{(n)}(\mathfrak{Q}, 0) = 0, \quad \text{falls } -Qn = g^2.$$

Ist die Bedingung für $n = 0$ erfüllt:

$$\prod_{p/2Q} \psi_p^{(0)}(\mathfrak{Q}, 0) = \left(1 + \left(\frac{2}{R_0^{\nu_0+1} B_0 \beta}\right)\right) \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \left(\frac{-B_i R_i^{\nu_i}}{q_i}\right)\right) = 0,$$

so folgt sie für die übrigen n bereits aus (44) und (45). Wenn nämlich $-Qn = g^2 (n \neq 0)$, so gilt

$$-R_0 u = g_0^2 \equiv 1\,(8), \qquad -R_i \frac{n}{q_i^{h_i}} = g_i^2,$$

also

$$\left(\frac{-R_i \dfrac{n}{q_i^{h_i}}}{q_i}\right) = 1;$$

wegen

$$R_0 \beta \equiv \sum_{i<k} \beta_{i0} \beta_{k0}\,(8),$$

$$\left(\sum_i \beta_{i0}\right)^2 \equiv 3 + 2 R_0 \beta \equiv 1\,(8), \qquad R_0 \beta \equiv -1\,(4)$$

folgt dann aus $\left(\frac{2}{R_0 \beta}\right) = 1$, daß $R_0 \beta \equiv -1\,(8)$ und $u \equiv \beta\,(8)$, aus $\left(\frac{2}{R_0 \beta}\right) = -1$ dagegen, daß $R_0 \beta \equiv 3\,(8)$ und $u \equiv -3\beta \equiv \beta + 4\,(8)$. Damit ist gezeigt: $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ ist genau dann eine ganze Modulform, wenn

$$\prod_{p/2Q} \psi_p^{(0)}(\mathfrak{Q}, 0) = 0. \tag{46}$$

Der Nachweis, daß das Produkt (46) unter den gemachten Voraussetzungen verschwindet, erfolgt indirekt. Aus der Annahme

$$\prod_{p/2Q} \psi_p^{(0)}(\mathfrak{Q}, 0) \neq 0,$$

d. h. also aus

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{-\alpha_j \alpha_k}{q_i}\right) &= 1 && \text{für } \nu_i = 1,\ q_i \nmid \alpha_j \alpha_k \\ \left(\frac{-\alpha_h}{q_i}\right) &= \left(\frac{Q q_i^{-2}}{q_i}\right) && \text{für } \nu_i = 2,\ q_i \nmid \alpha_h \end{aligned}\right\} i = 1, \cdots, r,$$

$$\text{(46a)} \quad \begin{aligned} \left(\frac{2}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3}\right) &= 1 && \text{für } \nu_0 = 0, \\ \left(\frac{2}{1 + \beta_{10}(\alpha_2 + \alpha_3)}\right) &= 1 && \text{für } \nu_0 = 1 \text{ und (etwa) } 2 / \alpha_1, \\ \left(\frac{2}{1 + \alpha_1(\beta_{20} + \beta_{30})}\right) &= 1 && \text{für } \nu_0 = 2 \text{ und (etwa) } 2 \nmid \alpha_1 \end{aligned}$$

leiten wir einen Widerspruch her. Die Koeffizienten α_i lassen sich offenbar eindeutig, wie folgt, in ganzzahlige positive Faktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_1\,\eta_2\,\eta_3, \\ \alpha_2 &= \xi_2\,\eta_1\,\eta_3, \\ \alpha_3 &= \xi_3\,\eta_1\,\eta_2, \end{aligned} \tag{46b}$$

$$\xi_i\,\eta_i = \zeta_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3 \text{ quadratfrei.}$$

Bezeichnen wir generell mit $\bar{a}$ den ungeraden Bestandteil in der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl a, so erhalten wir, indem wir ξ_i, η_i durch $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$ ersetzen, eine entsprechende Zerlegung von $\bar{\alpha}_i = \beta_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$. Aus (46a) folgt nun

$$\left(\frac{-\zeta_2\,\zeta_3}{\bar{\xi}_1}\right) = \left(\frac{-\zeta_2\,\zeta_3}{\bar{\eta}_1}\right) = 1;$$

dazu kommen noch weitere Gleichungen, die man aus den gegebenen durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 erhält. Somit ergibt sich

$$\begin{gathered} \left(\frac{-\zeta_2\,\zeta_3}{\bar{\zeta}_1}\right) = \left(\frac{-\zeta_1\,\zeta_3}{\bar{\zeta}_2}\right) = \left(\frac{-\zeta_1\,\zeta_2}{\bar{\zeta}_3}\right) = 1, \\ \left(\frac{2}{\zeta_1\,\zeta_2 + \zeta_1\,\zeta_3 + \zeta_2\,\zeta_3}\right) = 1 \quad \text{für } \nu_0 = 0, \\ \left(\frac{2}{1 + \bar{\zeta}_1\,(\zeta_2 + \zeta_3)}\right) = 1 \quad \text{für } \nu_0 > 0, \quad 2/\zeta_1. \end{gathered} \tag{46c}$$

Falls $\nu_0 = 0$, so gewinnt man durch Multiplikation entsprechender Seiten der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{\zeta_1}\right) &= \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_1}\right), \\ \left(\frac{-1}{\zeta_2}\right) &= \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_2}\right), \\ \left(\frac{-1}{\zeta_3}\right) &= \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_3}\right)\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_3}\right) \end{aligned}$$

auf Grund des quadratischen Reziprozitätsgesetzes die Relation

$$\left(\frac{-1}{\zeta_1}\right)^{\frac{\zeta_2+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_2}\right)^{\frac{\zeta_3+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_3}\right)^{\frac{\zeta_1+1}{2}} = 1,$$

die offenbar nur dann bestehen kann, wenn

$$\zeta_1 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \quad (4),$$

also etwa

$$\zeta_1 \equiv \zeta_2 \quad (8);$$

dann ist aber

$$\left(\frac{2}{\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_3}\right) = \left(\frac{2}{1 + 2 \zeta_1 \zeta_3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

im Widerspruch zu (46c).

Wenn $\nu_0 > 0$ und $2/\zeta_1$, so liefert dieselbe Schlußweise zunächst

$$\left(\frac{2}{\zeta_2 \zeta_3}\right) = \left(\frac{-1}{\zeta_1}\right)^{\frac{\zeta_2+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_2}\right)^{\frac{\zeta_3+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_3}\right)^{\frac{\zeta_1+1}{2}}$$

und nach Multiplikation mit der letzten der Gleichungen (46c) also

$$\left(\frac{2}{\zeta_2 \zeta_3 + \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3}\right) = \left(\frac{-1}{\bar{\zeta}_1}\right)^{\frac{\zeta_2+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_2}\right)^{\frac{\zeta_3+1}{2}} \left(\frac{-1}{\zeta_3}\right)^{\frac{\zeta_1+1}{2}} = \pm 1.$$

Gilt das obere Vorzeichen, so ergibt sich ein Widerspruch wie oben; gilt das untere Vorzeichen, so können $\bar{\zeta}_1, \zeta_2, \zeta_3$ offenbar nicht in derselben Restklasse mod 4 liegen. Sei etwa (ohne Einschränkung der Allgemeinheit)

$$\bar{\zeta}_1 \equiv -\zeta_2 \quad (4),$$

d. h. also

$$\bar{\zeta}_1 = -(\zeta_2 + 4\nu),$$

dann wird

$$\left(\frac{2}{\zeta_2 \zeta_3 + \bar{\zeta}_1 (\zeta_2 + \zeta_3)}\right) = \left(\frac{2}{-\zeta_2^2 - 4\nu (\zeta_2 + \zeta_3)}\right) = 1,$$

was nicht sein sollte.

Bezeichnen wir mit $h(d)$ die Klassenzahl von $R(\sqrt{d}) = R(\sqrt{-Qn})$ und mit w die Anzahl der Einheitswurzeln in $R(\sqrt{d})$, so ist also bewiesen:

Satz 2: *$F(\mathfrak{Q}; \tau)$ ist eine ganze Modulform, wenn*

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$$

und α_i quadratfrei ($i = 1, 2, 3$). In diesem Fall gilt die Darstellung

$$(47) \qquad F(\mathfrak{Q}; \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{w} \left|\frac{n}{Qd}\right|^{\frac{1}{2}} h(d)\, U_n(\mathfrak{Q}, 0)\, e^{\pi i \tau n}.$$

Wir geben jetzt noch ein Verfahren an, wie man entscheidet, ob die Identität

$$F(\mathfrak{Q}; \tau) = \vartheta(\mathfrak{Q}; \tau)$$

besteht oder nicht. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist $\vartheta(\mathfrak{Q}; \tau) = \vartheta_{00}(\alpha_1 \tau)\, \vartheta_{00}(\alpha_2 \tau)\, \vartheta_{00}(\alpha_3 \tau)$ und damit auch $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ eine ganze Form der Dimension $-\frac{3}{2}$ zu der Gruppe $\Gamma_0^*(2\alpha)$ der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad b \equiv 0(2), \quad c \equiv 0(2\alpha),$$

wo α das kleinste, gemeinschaftliche Vielfache aller α_i. Das Multiplikatorsystem v von $\vartheta(\mathfrak{Q}, \tau)$ ist das Produkt von drei Multiplikatorsystemen, die alle aus dem Multiplikatorsystem von $\vartheta_{00}(\tau)$ durch Transformation hervorgehen. Daher ist v^8 identisch gleich 1 und $\psi(\tau) = (F(\mathfrak{Q};\tau) - \vartheta(\mathfrak{Q};\tau))^8$ eine ganze Modulform zu $\Gamma_0^*(2\alpha)$ der Dimension -12 und dem Multiplikatorsystem 1. Die Nullstellenzahl von $\psi(\tau)$, gemessen in den Ortsvariabeln des Fundamentalbereichs zu $\Gamma_0^*(2\alpha)$, ist daher gleich $\mu_0^*(2\alpha) = (\Gamma(1):\Gamma_0^*(2\alpha))$, falls $\psi(\tau)$ nicht identisch gleich 0 ist. Da nun

$$\Gamma_0(2\alpha) = \Gamma_0^*(2\alpha) + \Gamma_0^*(2\alpha)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so hat also $F(\mathfrak{Q};\tau) - \vartheta(\mathfrak{Q};\tau)$ die Nullstellenzahl $\frac{\mu_0(2\alpha)}{4}$ oder verschwindet identisch $\big(\mu_0(2\alpha) = (\Gamma(1):\Gamma_0(2\alpha))\big)$. Um das zu entscheiden, braucht man also in der Entwicklung (47) nur die Koeffizienten mit der Nummer $n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\mu_0(2\alpha)}{4}\right]$ auszurechnen. Auf diesem Wege habe ich insgesamt zehn Identitäten ermittelt. Repräsentieren wir die Form $\mathfrak{Q}$ durch das Tripel $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, so erhalten wir die folgenden Aussagen:

Satz 3: *Für die zehn Formen*

$$\{a, 1, 1\} \quad (a = 1, 2, 3, 5), \qquad \{b, b, 1\} \quad (b = 2, 3, 5),$$
$$\{3, 2, 1\}, \quad \{3, 2, 2\}, \quad \{3, 3, 2\}$$

besteht die Identität

$$F(\mathfrak{Q};\tau) = \vartheta_{00}(\alpha_1\tau)\,\vartheta_{00}(\alpha_2\tau)\,\vartheta_{00}(\alpha_3\tau),$$

d. h.

$$\frac{24}{w}\left|\frac{n}{Qd}\right|^{\frac{1}{2}} h(d)\, U_n(\mathfrak{Q}, 0)$$

ist die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n durch die Form $\mathfrak{Q}$. Es gibt genau dann eine solche Darstellung, wenn für n keine der Relationen (44) *und* (45) *erfüllt ist.*

Unter den quadratischen Körpern, deren Klassenzahl in der Formel für die Darstellungsanzahl der zehn Formen des Satzes 3 wesentlich vorkommt, sind nicht alle imaginär quadratischen Zahlkörper vertreten. Es sei noch bemerkt, daß für die Formen $\{q, 1, 1\}$ bzw. $\{q, q, 1\}$, $q =$ Primzahl > 5, stets

$$F(\mathfrak{Q};\tau) \neq \vartheta_{00}(q\tau)\,\vartheta_{00}^2(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \vartheta_{00}^2(q\tau)\,\vartheta_{00}(\tau).$$

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich natürlich zwanglos aus der Siegelschen Theorie der quadratischen Formen (vgl. loc. cit. [4])); es ist jedoch von Interesse, eine von dieser Theorie unabhängige, rein funktionentheoretische Begründung für diese Identitäten zu haben.

§ 3. Formen der Dimension $-\frac{3}{2}$ zur Stufe N.

Die Eisensteinreihen, aus denen wir die Formen der Dimension $-\frac{3}{2}$ ableiten, entnehmen wir aus E, § 5.

Unter der Voraussetzung

$$(a_1, a_2) = 1, \quad N \equiv 0\,(4), \quad r = \frac{k}{2}, \quad k = 1, 3, 5, \cdots$$

betrachten wir die für $\Re s > 2 - r$ in s regulären Funktionen

$$(48) \qquad G_{-r}(\tau, s; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_2 \equiv a_2 (N) \\ (m_1, m_2) = 1}} \frac{v(M)}{(m_1 \tau + m_2)^r \, |m_1 \tau + m_2|^s},$$

wobei $\underline{M} = (m_1, m_2)$ und v das ϑ-Multiplikatorsystem. Für die Substitutionen S der Modulgruppe $\Gamma(1)$ gelten die folgenden Transformationsformeln:

$$(49) \qquad \begin{gathered} \frac{G_{-r}(S\tau, s; a_1, a_2, N)}{(c\tau + d)^r \, |c\tau + d|^s} = \frac{v(AS)}{\sigma(A, S)\, v(A)} G_{-r}(\tau, s; (a_1, a_2) S, N), \\ \underline{A} = (a_1, a_2), \qquad \underline{S} = (c, d). \end{gathered}$$

Die verallgemeinerte Lipschitzformel

$$(50) \qquad \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu \eta}}{(\nu + \omega)^r \, |\nu + \omega|^s} = \sum_{n = -\infty}^{\infty} A_{n+\eta}(s, \omega, r) \quad (\eta \text{ reell}, \Im \omega > 0),$$

wobei für reelles λ

$$A_\lambda(s, \omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \lambda x}\, dx}{(x + \omega)^r \, |x + \omega|^s},$$

vermittelt uns die Fourierentwicklung

$$(51) \qquad \begin{aligned} G_{-r}(\tau, s; a_1, a_2, N) &= \delta(A)\, e^{\pi i r \frac{\operatorname{sgn} \varepsilon_0 - 1}{2}} \\ &+ \frac{v(t, a_2)}{N^{r+s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{m_1' \equiv a_1' (N') \\ m_1' \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1'|^{r+s}} \sum_{\substack{j \bmod m_1' N \\ j \equiv a_2 (N)}} u(m_1', j)\, e^{2\pi i (n+\eta) \frac{j}{m_1' N}} \right\} \times \\ &\times A_{n+\eta}\left(s, \frac{\tau'}{N}, r\right). \end{aligned}$$

Dabei ist (vgl. E):

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } A \cdot \Gamma(N) \text{ eine affine Substitution enthält,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 = \pm 1,$$

$$\varepsilon_0 \begin{cases} \equiv a_2(N) & \text{für } \delta(A) = 1, \\ = 1 & \text{für } \delta(A) = 0, \end{cases}$$

$$(m_1, N) = (a_1, N) = t > 0, \quad m_1 = t m_1', \quad a_1 = t a_1', \quad N = t N',$$
$$\tau' = t\tau, \quad v(m_1, m_2) = v(t, a_2) \cdot u(m_1', m_2),$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a_1 \equiv 1\,(2), \\ 0, & \text{wenn } a_1 \equiv 0\,(2), \quad N \equiv 0\,(8) \text{ oder } t \equiv 0\,(4), \\ \dfrac{1}{2}, & \text{wenn } a_1 \equiv 0\,(2), \quad N \not\equiv 0\,(8) \text{ und } t \not\equiv 0\,(4), \end{cases}$$

$$\sigma_{m_1} = e^{\pi i \frac{1-\operatorname{sgn} m_1}{2} r}.$$

Die Diskussion der Dirichletreihen

$$(52) \quad D(r+s; n; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{m_1' \equiv a_1'(N') \\ m_1' \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1'}}{|m_1'|^{r+s}} W(m_1', n; a_1, a_2, N),$$

wobei

$$W(m_1', n; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{j \bmod m_1' N \\ j \equiv a_2(N)}} u(m_1', j)\, e^{2\pi i (n+\eta) \frac{j}{m_1' N}},$$

ist in E vollständig durchgeführt; es empfiehlt sich jetzt nur nicht, die genannten Reihen nach $\operatorname{sgn} m_1'$ aufzuspalten. Bezeichnen wir im Falle $a_1 \equiv 1\,(2)$ die endliche Summe $W(m_1', n; a_1, a_2, N)$ mit $W_1(m_1', n; a_2, N)$, so liefert diese Untersuchung das folgende Resultat:

1. $a_1 \equiv 1\,(2)$,

$$D(r+s; n; a_1, a_2, N) = \sum_{m_1' \equiv a_1'(N')} \frac{\sigma_{m_1'} W_1(m_1', n; a_2, N)}{|m_1'|^{r+s}},$$

2. $a_1 \equiv 0\,(2), \qquad N \not\equiv 0 \quad (8), \qquad t \not\equiv 0 \quad (4)$

$$D(r+s; n; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{b \bmod 4N' \\ b \equiv a_1'(N')}} e^{2\pi i \frac{a_2 \bar{b} \bar{N}_0 (2n+1)}{8}} \left(\frac{2(-1)^{\frac{a_2-1}{2}}}{b}\right)_*$$
$$\times \sum_{m_0 \equiv b(4N')} \frac{\sigma_{m_0} W_1(m_0, 2n+1; a_2 \bar{8}, N_0)}{|m_0|^{r+s}},$$

dabei ist

$$N = 4N_0, \qquad b\bar{b} \equiv N_0 \bar{N}_0 \equiv 1\,(8), \qquad 8\bar{8} \equiv 1\,(N_0).$$

3. $a_1 \equiv 0\,(2), \qquad N \equiv 0\,(8)$ oder $t \equiv 0\,(4)$

$$D(r+s;\,n;\,a_1,\,a_2,\,N) = \sum_{\alpha_1}{}' \frac{\left(\frac{2}{a_2}\right)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1(r-1+s)}} \sum_{\substack{b \bmod 2^{\alpha_0-\alpha'+1}N' \\ b\equiv \bar{2}^{\alpha_1} a_1(N'),\, b\equiv 1(2)}} e^{2\pi i \frac{a_2 b N_0}{2^{\alpha_0+1}} \frac{n}{2^{\alpha_1-1}}}$$

$$\times \left(\frac{2^{\alpha_0+\alpha_1}(-1)^{\frac{a_2-1}{2}}}{b}\right)_* \cdot \sum_{m_0\equiv b\,(2^{\alpha_0-\alpha'+1}N')} \frac{\sigma_{m_0} W_1(m_0,\,n;\,a_2\,\bar{2}^{\alpha_0+\alpha_1},\,N_0)}{|\,m_0\,|^{r+s}},$$

dabei ist

$$N = 2^{\alpha_0} N_0, \quad N_0 \equiv 1\,(2), \quad N' \equiv 0\,(2^{\alpha'}), \quad N' \not\equiv 0\,(2^{\alpha'+1}), \quad 2\bar{2} \equiv 1\,(N_0),$$
$$b\bar{b} \equiv N_0\bar{N}_0 \equiv 1\,(2^{\alpha_0+1}),$$

und es wird über diejenigen ganzen $\alpha_1 \geqq 0$ summiert, für welche

$$\begin{cases} 2^{\alpha_1}/n, & \text{falls } \alpha_0 \geqq 3, \\ 2^{\alpha_1-1}/n, \quad 2^{1-\alpha_1} n \equiv \alpha_1\,(2), & \text{falls } \alpha_0 = 2. \end{cases}$$

In jedem Fall läßt sich also $D(r+s;\,n;\,a_1,\,a_2,\,N)$ aus Reihen vom Typus

$$D_1(r+s;\,n;\,b,\,a,\,N) = \sum_{m_1'\equiv b\,(N_2)} \frac{\sigma_{m_1'} W(m_1',\,n;\,a,\,N_1)}{|\,m_1'\,|^{r+s}}$$

linear zusammensetzen. Dabei genügen die positiven Zahlen N_1, N_2 den Relationen

$$N = 2^\lambda N_1, \qquad \lambda \text{ ganz rational} \geqq 0, \qquad 2/N_2/2N,\ (b,\,N_2) = 1.$$

Trägt man für $W(m_1',\,n;\,a,\,N_1)$ den in E berechneten Wert ein, so erhält man

$$D_1(r+s;\,n;\,b,\,a,\,N) = \sum_{\substack{t_1/n \\ t_1>0}}{}' \frac{\left(\frac{a}{t_1}\right)}{t_1^{r+s-1}} \sum_{\substack{\nu \bmod 2N \\ t_1\nu\equiv b\,(N_2) \\ (\nu,\,N)=1}} \left(\frac{N_1 t_1}{\nu}\right)_* e^{2\pi i \frac{a\bar{\nu}}{N_1}\cdot\frac{n}{t_1}}$$
$$\times \sum_{m\equiv\nu\,(2N)} \frac{\sigma_m C(m,\,n)}{|\,m\,|^{r+s}},$$

wobei $\nu\cdot\bar{\nu} \equiv 1\,(N_1)$ und

$$C(m,\,n) = \sum_{j \bmod m} \left(\frac{j}{m}\right) e^{2\pi i \frac{jn}{m}}.$$

Die Summe $\sum\limits_{\substack{t_1/n \\ t_1>0}}{}'$ ist über solche positiven Teiler t_1 von n zu erstrecken, die nur durch Primteiler von N teilbar sind. Wir brauchen also nur noch die Reihen

$$\sum_{m\equiv\nu\,(2N)} \frac{\sigma_m C(m,\,n)}{|\,m\,|^{r+s}} \qquad \text{für } (\nu,\,2N) = 1$$

zu untersuchen. Bezeichnen wir mit $C\left(\frac{m}{n}\right)$, $(m, n) = 1$, die Gaußsche Summe

$$C\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{j \bmod n} e^{2\pi i \frac{m}{n} j^2},$$

so folgt auf Grund des Reziprozitätsgesetzes für Gaußsche Summen, daß

$$\sigma_m = e^{\frac{\pi i k}{4}} C^k\left(\frac{-m}{4}\right) 8^{-\frac{k}{2}} \left(\frac{-1}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} C^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) |m|^{\frac{1}{2}}.$$

Es ergibt sich demnach

$$\sum_{m \equiv \nu (2N)} \frac{\sigma_m C(m, n)}{|m|^{r+s}} = e^{\frac{\pi i k}{4}} C^k\left(\frac{-\nu}{4}\right) 8^{-\frac{k}{2}} \sum_{m \equiv \nu (2N)} \frac{\left(\frac{-1}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(m, n)}{|m|^{r+s}};$$

dabei ist

$$K(m, n) = C^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) |m|^{\frac{1}{2}} C(m, n)$$

im ersten Argument multiplikativ und hängt nur von dem von m erzeugten Ideal (m) ab. Ist daher χ ein beliebiger Idealcharakter $\bmod 2N$ und

$$Q(r+s; \chi, n) = \sum_{(m) \subset (1)} \frac{\chi(m) \left(\frac{-1}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(m, n)}{|m|^{r+s}},$$

so gilt

$$\sum_{m \equiv \nu (2N)} \frac{\left(\frac{-1}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(m, n)}{|m|^{r+s}} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(\nu)\, Q(r+s, \chi, n).$$

Wenn $d = d\left((-1)^{\frac{k-1}{2}} n\right)$ die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $R\left(\sqrt{(-1)^{\frac{k-1}{2}} n}\right)$, so zeigen ähnliche Überlegungen wie in § 2, daß

$$Q(r+s, \chi, 0) = \frac{L(k-2+2s, \chi^2(x))}{L(k-1+2s, \chi^2(x))},$$

(53)

$$Q(r+s, \chi, n) = \frac{L\left(\frac{k-1}{2} + s, \chi(x)\left(\frac{d}{x}\right)\right)}{L(k-1+2s, \chi^2(x))}\, U(r+s, \chi, n) \text{ für } n \neq 0,$$

wobei

(54) $$U(r+s, \chi, n) = \prod_{p/n} U_p(r+s, \chi, n)$$

und, falls p^h/n, $p^{h+1} \nmid n$,

$$(55)\quad U_p(r+s,\chi,n) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{\frac{h-1}{2}} \chi(p^{2\nu})\, p^{-\nu(k-2+2s)} & \text{für } h \equiv 1\,(2), \\ \left(1-\chi(p)\left(\frac{d}{p}\right) p^{-\frac{k-1}{2}-s}\right) \sum\limits_{\nu=0}^{\frac{h}{2}-1} \chi(p^{2\nu})\, p^{-\nu(k-2+2s)} & \\ \quad + \chi(p^h)\, p^{-\frac{h}{2}(k-2+2s)} & \text{für } h \equiv 0\,(2). \end{cases}$$

Um nun für $r = \frac{3}{2}$ die analytische Fortsetzung von $G_{-\frac{3}{2}}(\tau, s; a_1, a_2, N)$ in eine volle Umgebung von $s = 0$ leisten zu können, brauchen wir nur zu wissen, daß die Dirichletreihe $D(r+s; n; a_1, a_2, N)$ höchstens dann bei $s = 0$ singulär wird und dann einen Pol erster Ordnung hat, wenn $n+\eta \leqq 0$ ist. Man schließt gegebenenfalls wie in § 2, indem man zeigt, daß gleichmäßig für alle s des Bereichs

$$-\frac{1}{4} \leqq \Re s \leqq 1$$
$$-1 \leqq \Im s \leqq 1$$

die Abschätzung

$$(56)\quad D\left(\frac{3}{2}+s; n; a_1, a_2, N\right) A_{n+\eta}\left(s, \frac{\tau'}{N}, \frac{3}{2}\right) = O\left(|n+\eta|^{\varkappa} e^{-\delta|n+\eta|}\right) \quad (|n| \to \infty)$$

für geeignete positive Konstanten $\varkappa$, δ gilt. Da nun $Q\left(\frac{3}{2}+s, \chi, n\right)$ für $n > 0$ bei $s = 0$ regulär ist, für $n \leqq 0$ bei $s = 0$ höchstens einen Pol erster Ordnung hat, so folgt in der Tat, wenn man die ganzen Entwicklungen zurückverfolgt, daß den Reihen $D\left(\frac{3}{2}+s; n; a_1, a_2, N\right)$ die genannte Eigenschaft zukommt, aus der die Existenz von

$$G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N) = G_{-\frac{3}{2}}(\tau, 0; a_1, a_2, N)$$

erschlossen werden kann. Die Eisensteinreihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ sind entweder alle regulär-analytisch in τ, oder aber alle nicht-analytisch, da je zwei von ihnen durch Transformation auseinander hervorgehen. Wir zeigen, daß letzteres zutrifft.

Setzen wir jetzt

$$(a_1, N) = 1$$

voraus, so erhalten wir die einfache Darstellung

$$(57)\quad D(r+s; n; a_1, a_2, N) = e^{\frac{\pi i k}{4}} C^k \left(\frac{-a_1}{4}\right) 8^{-\frac{k}{2}} \left(\frac{N}{a_1}\right) e^{2\pi i \frac{a_2 \bar{a}_1 n}{N}} \times$$
$$\times \sum_{m_1 \equiv a_1 (N)} \frac{\left(\frac{-1}{m_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(m_1, n)}{|m_1|^{r+s}},$$

mithin

$$(58)\quad G_{-r}(\tau, s; a_1, a_2, N) = g(s, r, a_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\sum_{\chi} \bar{\chi}(a_1)\, Q(r+s, \chi, n)\right\} \times$$
$$\times e^{2\pi i \frac{a_2 \bar{a}_1 n}{N}} A_n\left(s, \frac{\tau}{N}, r\right),$$

wobei

$$(59)\quad g(s, r, a) = N^{-(r+s)} e^{\frac{\pi i k}{4}} C^k \left(\frac{-a}{4}\right) 8^{-\frac{k}{2}} \left(\frac{N}{a}\right) \cdot \frac{2}{\varphi(N)};$$

$\sum\limits_{\chi}$ wird jetzt über alle Idealcharaktere mod N erstreckt. Aus den Reihen (58) kombinieren wir jetzt ganze Modulformen der Dimension $-\frac{3}{2}$ zur Stufe N. Sei ψ ein beliebiger Idealcharakter mod N, $z_1, z_2, \cdots, z_N$ ein beliebiges N-Tupel von komplexen Zahlen und

$$z_\nu = z_\mu \quad \text{für } \nu \equiv \mu\,(N),$$

dann bilden wir die Linearkombination

$$(60)\quad \sum_{\substack{(a),\, b \bmod N \\ (a, N)=1}} \frac{2 z_b\, \psi(a)}{\varphi(N)\, g\left(s, \frac{3}{2}, a\right)}\, G_{-\frac{3}{2}}(\tau, s; a, ab, N)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{b \bmod N} z_b\, e^{2\pi i \frac{bn}{N}}\right) Q\left(\frac{3}{2}+s, \psi, n\right) A_n\left(s, \frac{\tau}{N}, \frac{3}{2}\right).$$

Wählen wir für ψ die Identität und

$$z_b = \begin{cases} 1 & \text{für } b \equiv 0\,(N), \\ 0 & \text{für } b \not\equiv 0\,(N), \end{cases}$$

so erhalten wir für $s = 0$ eine in τ nicht-analytische Form; daher sind also sämtliche Eisensteinreihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ in τ nicht-analytisch. Wenn dagegen ψ ein nicht-reeller Idealcharakter — einen solchen gibt es stets außer in den Fällen $N = 4, 8, 12, 24$ — so erhalten wir die in τ analytischen Formen

$$(61)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{b \bmod N} z_b\, e^{2\pi i \frac{bn}{N}}\right) Q\left(\frac{3}{2}, \psi, n\right) n^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \frac{\tau n}{N}}.$$

Da der n-te Koeffizient nur wie eine feste Potenz von n für $n \to \infty$ wächst, so folgt mit der Schlußweise des Paragraphen 1, daß es sich um ganze Formen zur Stufe N handelt. Aus den Darstellungen (53)—(55) geht hervor, daß

$$Q\left(\frac{3}{2}, \psi, n\right) \neq 0 \quad \text{für } n \geqq 1.$$

Unter den Formen (61) gibt es also N linear unabhängige; denn die Matrix

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{N} bn}\right) \qquad (b, n = 1, 2, \cdots, N)$$

hat den Rang N. Läßt sich eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau)$ der Dimension $-\frac{3}{2}$ durch die Reihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ linear darstellen:

$$\varphi(\tau) = \sum_{\substack{a_i \bmod N \\ (a_1, a_2) = 1}} x(a_1, a_2)\, G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N), \tag{62}$$

so folgt, daß $\varphi(\tau)$ identisch verschwindet. Trägt man nämlich für $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ die Fourierentwicklung (51) in (62) ein, so braucht man die Glieder mit einer Nummer $n + \eta \leqq 0$ gar nicht hinzuschreiben, da sie, wenn sie sich nicht wegheben würden, einen in τ nicht-analytischen Bestandteil ergeben würden. Man kann also formal so rechnen, als sei

$$\delta(A)\, e^{\frac{3\pi i}{2} \frac{\operatorname{sgn} \varepsilon_0 - 1}{2}}$$

das Residuum von $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ in der Spitze ∞. Mit dem für Dimensionen < -2 bekannten Schluß folgt dann das identische Verschwinden von $\varphi(\tau)$. Die Teilschar der ganzen Formen in der von den Reihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ erzeugten linearen Schar stellt offenbar für die Modulgruppe eine invariante Formenschar dar. Wir stellen damit zusammenfassend fest:

Satz 4: *Die Eisensteinreihen* $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ *sind in* τ *nicht-analytische Funktionen. Die Teilschar der ganzen Formen in der von den Reihen* $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; a_1, a_2, N)$ *erzeugten linearen Schar ist eine für die Modulgruppe invariante Formenschar, die keine nicht identisch verschwindende Spitzenform zur Stufe* N *enthält. Wenn* $N \neq 4, 8, 12, 24$, *so gibt es in der genannten Formenschar mindestens* N *linear unabhängige Formen.*

Hamburg, März 1937.