Math. Annalen, Bd. 125 235–263 (1953).

Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*).

Von

HANS MAASS in Heidelberg.

Einleitung.

Die Beziehungen der indefiniten quadratischen Formen zu den automorphen Funktionen sind durch die eindrucksvollen Arbeiten[1][2] SIEGELs weitgehend geklärt worden. Spezielle arithmetische Eigenschaften, die die indefiniten quadratischen Formen vor den definiten auszeichnen, fanden ihren Ausdruck in dem funktionentheoretischen Verhalten der von SIEGEL eingeführten automorphen Formen. Es handelt sich hierbei um gewisse nichtanalytische Funktionen einer komplexen Variablen $z = x + iy$ vom Typus der EISENSTEIN-Reihe

$$E(z, w; \alpha, \beta) = \sum_{c,d}' \gamma(c, d)(cz + d)^{-\alpha}(cw + d)^{-\beta}, \tag{1}$$

wobei $w = x - iy$ zu setzen ist. Die Exponenten α, β hängen nur von der Signatur der zugeordneten indefiniten quadratischen Formen ab. Man hat

$$\alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = \frac{m-n}{2} \tag{2}$$

zu wählen, wenn die reelle Normalform

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \cdots - y_m^2$$

zugrunde gelegt wird. Es ergeben sich im folgenden gewisse formale Vereinfachungen, wenn wir z und w als unabhängige komplexe Variable beibehalten. Das eigentliche Operationsgebiet bleibt jedoch die reelle (x, y)-Halbebene $w = \bar{z}$, $\Im z > 0$. Punkte, die nur durch eine komplexe Variable ζ gekennzeichnet werden, sollen dem Bereich $w = \bar{z}$ angehören; d. h. es ist $z = \zeta$, $w = \bar{\zeta}$ zu setzen. Der Fall $\zeta = \infty$ ist hier mit einzuschließen.

Multipliziert man die Reihe (1) mit y^β, so ergibt sich mit $k = \alpha - \beta$ der Formentypus

$$E_k(z, \beta) = y^\beta E(z, \bar{z}; \alpha, \beta) = \sum_{c,d}' \gamma(c, d) \frac{y^\beta}{(cz + d)^k |cz + d|^{2\beta}}. \tag{3}$$

Automorphe Formen dieser Art habe ich gelegentlich „Wellenformen der Dimension $-k$ zur Wellenzahl β" genannt. Einen Zusammenhang zwischen den Wellenformen und den indefiniten quadratischen Formen konnte ich bereits vor einigen Jahren über die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen

*) HANS PETERSSON zum 50. Geburtstage am 24. 9. 52 gewidmet.

[1]) SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen. Studies Essays, pres. to COURANT, New York 1948, p. 395–406.

[2]) SIEGEL, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I. Math. Ann. 124, 17–54 (1951).

zu den indefiniten quadratischen Formen ermitteln[3]). In den Fällen $0 < n < m$, $n \equiv 1\ (2)$, $m \equiv 0\ (2)$ wurde hier im Gegensatz zu (2) die Zuordnung

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{m}{4}, \qquad \beta = \frac{m}{4} &&\text{für } m \equiv 2\ (4), \\ &\alpha = \frac{m}{4} + \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{m}{4} - \frac{1}{2} &&\text{für } m \equiv 0\ (4) \end{aligned} \tag{4}$$

vorgenommen. Die Betrachtungen konnten also auf Wellenformen der Dimension 0 und -1 beschränkt werden. Allgemein genügen Wellenformen der Dimension $-k$, wenn k eine nicht-negative ganz rationale Zahl ist, einem System von $k+1$ partiellen Differentialgleichungen der Ordnung $2k+2$. Diese Differentialgleichungssysteme sind zwar von einfacher Bauart, lassen sich aber nur in den Fällen $k = 0$ und 1 befriedigend behandeln, so daß auch nur für $k = 0$ und 1 eine Beziehung zwischen Wellenformen und DIRICHLET-Reihen mit Hilfe der MELLIN-Transformation hergestellt und nach HECKEschem Vorbild untersucht werden konnte.

Für die indefiniten quadratischen Formen, die durch $m \equiv n\ (2)$ gekennzeichnet sind, gibt es neben (2) noch die Zuordnung

$$\alpha = \frac{m}{2}, \quad \beta = 0. \tag{5}$$

Gemäß (1) handelt es sich bei diesem Formentypus um gewöhnliche Modulformen der Dimension $-m/2$. Dieser Tatbestand ist leicht einzusehen, wenn man die Struktur der Funktionalgleichungen der entsprechenden Zetafunktionen beachtet. Eine erste Klärung dieser etwas merkwürdigen Verhältnisse erfolgte durch SIEGEL[1]); mit Hilfe gewisser Differentialoperatoren konnte er im Falle $m \equiv n\ (2)$ den Formentypus (2) unmittelbar in den Typus (5) überführen. Damit war der Weg angezeigt, auf dem ich schließlich zu einer systematischen und durchsichtigen Differentialgleichungstheorie gekommen bin. Hierüber soll im folgenden berichtet werden. In der neuen Theorie tritt der Formentypus (1) mit gleichberechtigten Exponenten α und β, die beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein dürfen, in den Vordergrund; die Auszeichnung der Wellenformen ganzzahliger Dimension erwies sich nicht als zweckmäßig.

Die ersten Bemühungen waren darauf zu richten für die EISENSTEIN-Reihen (1) partielle Differentialgleichungen zu bestimmen. Zugleich mußte eine funktionale Beziehung zwischen den Formentypen (1) zu verschiedenen Exponentensystemen α, β hergestellt werden. Diese Probleme werden mit Hilfe der Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_\alpha &= (z-w)^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(z-w)^\alpha = \alpha + (z-w)\frac{\partial}{\partial z}, \\ \Lambda_\beta &= (z-w)^{1-\beta}\frac{\partial}{\partial w}(z-w)^\beta = -\beta + (z-w)\frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} \tag{6}$$

höchst einfach gelöst. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_\alpha E(z, w; \alpha, \beta) &= \alpha E(z, w; \alpha+1, \beta-1), \\ \Lambda_\beta E(z, w; \alpha, \beta) &= -\beta E(z, w; \alpha-1, \beta+1) \end{aligned} \tag{7}$$

und demzufolge

$$(\Lambda_{\beta-1}\mathsf{K}_\alpha + \alpha(\beta-1))\, E(z, w; \alpha, \beta) = (\mathsf{K}_{\alpha-1}\Lambda_\beta + \beta(\alpha-1))\, E(z, w; \alpha, \beta) = 0. \tag{8}$$

[3]) MAASS, H.: Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen. Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss. **1949**, Math.-naturwiss. Kl., 1. Abh., 42 S.

Eine einfache Umrechnung ergibt

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\mathsf{\Lambda}_{\beta-1}\,\mathsf{K}_\alpha + \alpha(\beta-1) = \mathsf{K}_{\alpha-1}\,\mathsf{\Lambda}_\beta + \beta(\alpha-1) \\ &= -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + (\alpha-\beta)\,i\,y\,\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha+\beta)\,y\,\frac{\partial}{\partial y}\,. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (8) sind also identisch. Der Fortschritt gegenüber den früheren Entwicklungen[3]) ist bemerkenswert: Wir können uns auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränken.

Es bezeichne $\{\alpha, \beta\}$ die lineare Schar der analytischen Funktionen $f(z, w)$, die in der Halbebene $w = \bar{z}$ $\mathfrak{Im}\, z > 0$ regulär sind und die von dem Differentialoperator (9) annulliert werden. Zur Abkürzung werde

$$(10)\qquad f(z,w)\,|\,S = f(Sz, Sw)\,(cz+d)^{-\alpha}\,(cw+d)^{-\beta} \quad \text{für } f(z,w) \subset \{\alpha, \beta\}$$

und reelle Substitutionen S mit der zweiten Zeile c, d und positiver Determinante gesetzt. Mit

$$(cz+d)^{-\alpha} = e^{-\alpha \log(cz+d)}, \quad (cw+d)^{-\beta} = e^{-\beta\log(cw+d)}$$

werden hier diejenigen in der Halbebene $\mathfrak{Im}\, z > 0$ bzw. $\mathfrak{Im}\, w < 0$ regulär-analytischen Funktionen bezeichnet, die man erhält, wenn man für $\log(cz+d)$ bzw. $\log(cw+d)$ die durch

$$-\pi < \arg(cz+d) \leqq \pi \quad \text{bzw.} \quad -\pi \leqq \arg(cw+d) < \pi$$

gekennzeichneten Hauptwerte nimmt.

Es sei G eine Gruppe von reellen Substitutionen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Determinante 1. Unter einer automorphen Form vom Typus $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ soll nun eine Funktion $f(z, w)$ mit folgenden Eigenschaften verstanden werden:

1. $f(z, w)$ liegt in der linearen Schar $\{\alpha, \beta\}$.
2. Für alle $S \subset \mathsf{G}$ gilt

$$f(z,w)\,|\,S = v(S)\,f(z,w), \quad |v(S)| = 1\,,$$

wobei v ein Multiplikatorsystem zur Gruppe G bezeichnet. Es gehört zur Dimension $\beta - \alpha$ im Sinne der Peterssonschen Terminologie[4]).

3. Ist $A^{-1}\infty$ Fixpunkt einer beliebigen parabolischen Substitution aus G, so gilt in der oberen Halbebene (x reell, $y > 0$)

$$f(z,w)\,|\,A^{-1} = O(y^K) \quad \text{für } y \to \infty$$

gleichmäßig in x mit einer gewissen Konstanten K.

Eine Rechtfertigung dieses Formenbegriffs liegt in der Transformationsinvarianz: Für beliebige reelle Substitutionen L mit der Determinante 1 ist

$$(11)\qquad \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}\,|\,L = \{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\},$$

wenn $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ zugleich die lineare Schar der Formen des angegebenen Typus und v^L das mit L transformierte Multiplikatorsystem bezeichnet. Außerdem gilt, wie nicht anders zu erwarten war,

$$(12)\qquad \begin{aligned} \mathsf{K}_\alpha\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} &\subset \{\mathsf{G}; \alpha+1, \beta-1, v\}, \\ \mathsf{\Lambda}_\beta\,\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} &\subset \{\mathsf{G}; \alpha-1, \beta+1, v\}. \end{aligned}$$

Ist $\alpha(\beta-1) \neq 0$ bzw. $\beta(\alpha-1) \neq 0$, so wird $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ durch K_α bzw. $\mathsf{\Lambda}_\beta$ sogar umkehrbar eindeutig auf $\{\mathsf{G}; \alpha+1, \beta-1, v\}$ bzw. $\{\mathsf{G}; \alpha-1, \beta+1, v\}$

[4]) Petersson, H.: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Ann. **115**, 23—67 (1937).

abgebildet. Invariant gegenüber K_α und Λ_β sind nicht die „Einzelgewichte" α und β, wohl aber die „Gewichtssumme" $\alpha+\beta$ und die Restklassen von α und β mod 1. Im Rahmen dieser Transformationstheorie können die verschiedenartigen Beziehungen zwischen indefiniten quadratischen Formen und automorphen Formen gut verstanden werden.

Das Interesse des Arithmetikers ist vor allem auf die FOURIER-Entwicklungen der automorphen Formen in den parabolischen Fixpunkten gewisser Substitutionsgruppen G gerichtet. Ist

$$\begin{pmatrix}1 & Q\\ 0 & 1\end{pmatrix} \subset \mathsf{G},\ v\begin{pmatrix}1 & Q\\ 0 & 1\end{pmatrix} = e^{2\pi i \varkappa}, \quad 0 \leqq \varkappa < 1,$$

so gestatten die Formen $f(z, w) \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ Entwicklungen der Art

$$f(z, w) = a_0\, u(y, \alpha+\beta) + b_0 + \sum_{n+\varkappa \neq 0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi\,|n+\varkappa|}{Q}\, y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\varkappa)\right) e^{\frac{2\pi i (n+\varkappa)}{Q} x}, \tag{13}$$

wobei über alle ganz rationalen $n \neq -\varkappa$ summiert wird. Hierin ist

$$\begin{aligned} u(y, \gamma) &= \frac{y^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log y)^n}{n!}(1-\gamma)^{n-1}, \\ W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) &= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\, W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \qquad (\varepsilon = \pm 1). \end{aligned} \tag{14}$$

Mit $W_{l,m}(y)$ wird wie üblich die von WHITTAKER eingeführte Lösung der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung in reduzierter Form bezeichnet [s. Fußnote [5]]. Die Entwicklungskoeffizienten a_0 und b_0 verschwinden im Falle $\varkappa > 0$.

Die HECKEschen Untersuchungen über Modulformen und DIRICHLET-Reihen[6]) lassen sich auf den hier diskutierten Formentypus verallgemeinern. Im einfachsten Fall ergibt sich folgender Sachverhalt: Vorgegeben seien α, β beliebig reell oder komplex und $\gamma = \pm 1$. Ist $\gamma = 1$, so soll nicht zugleich $\alpha = \beta = 0$ oder 1 sein. Mit Hilfe der MELLIN-Transformation wird dann eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Formen $f(z, w)$, die durch die Bedingungen

1. $f(z, w) \subset \{\alpha, \beta\}$,
2. $f(z, w) = O(y^{\varkappa_1})$ für $y \to \infty$, $f(z, w) = O(y^{-\varkappa_2})$ für $y \to 0$ mit geeigneten Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2$ gleichmäßig in x,
3. $f(z+1, w+1) = f(z, w)$,
4. $f\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{w}\right) = \gamma\,(-iz)^\alpha (iw)^\beta f(z, w)$

gekennzeichnet sind, und den Paaren analytischer Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(s)$ hergestellt, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ sind meromorphe Funktionen, die in gewissen Halbebenen durch DIRICHLET-Reihen dargestellt werden:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n^s}.$$

---

[5]) MAGNUS, O., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, speziell Kap. 6. Springer-Verlag 1948.

[6]) HECKE, E.: Über die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. 112, 664—699 (1936).

2. Wird

$$\Gamma(s;\alpha,\beta)=\int_0^\infty W(y;\alpha,\beta,1)\,y^{s-1}\,dy. \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\xi(s)&=(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s;\alpha,\beta)\,\varphi(s)+(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s;\beta,\alpha)\,\psi(s),\\ \eta(s)&=(2\pi)^{-s-1}\Big(\Gamma(s+1;\alpha,\beta)-\frac{\alpha-\beta}{2}\,\Gamma(s;\alpha,\beta)\Big)\,\varphi(s)\\ &\quad-(2\pi)^{-s-1}\Big(\Gamma(s+1;\beta,\alpha)-\frac{\beta-\alpha}{2}\,\Gamma(s;\beta,\alpha)\Big)\,\psi(s)\end{aligned} \tag{16}$$

gesetzt, so sind

$$\xi(s)-a_0\left(\frac{1}{s(s+1-\alpha-\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta-s)(1-s)}\right)+b_0\left(\frac{1}{s}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-s}\right) \tag{17}$$

und

$$\eta(s)+a_0\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\left(\frac{1}{s(s+1-\alpha-\beta)}-\frac{\gamma}{(\alpha+\beta-s)(1-s)}\right)-b_0\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\left(\frac{1}{s}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta-s}\right) \tag{18}$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten a_0 und b_0 ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.

3. $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ genügen den Funktionalgleichungen

$$\xi(\alpha+\beta-s)=\gamma\,\xi(s),\qquad \eta(\alpha+\beta-s)=-\gamma\,\eta(s). \tag{19}$$

Die durch $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten a_n und b_0 sind die Entwicklungskoeffizienten von $f(z,w)$:

$$f(z,w)=a_0\,u(y,\alpha+\beta)+b_0+\sum_{n\neq 0}a_n\,W(2\pi\,|n|\,y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}n)\,e^{2\pi i n x}. \tag{20}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß

$$\Gamma(s;\alpha,\beta)=2^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)}\,F\Big(\beta,1-\alpha;s+1-\alpha;\frac{1}{2}\Big)$$

ist, wobei $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ die hypergeometrische Funktion bezeichnet.

Die entsprechende Behandlung von Funktionalgleichungssystemen führt zu einem allgemeinen Ergebnis, aus welchem durch Spezialisierung bekannte Sätze über DIRICHLET-Reihen mit Funktionalgleichungen im Zusammenhang mitModulformen[6]), Wellenfunktionen[7]) und Wellenformen der Dimension -1[3]) gewonnen werden können. Zu den Funktionalgleichungssystemen für die Teilreihen, die aus den Zetafunktionen der indefiniten quadratischen Formen[8]) durch Einführung von Kongruenzbedingungen entstehen, erhält man nun einen einfachen Zugang, wenn man die von SIEGEL[2]) angegebenen Transformationsformeln für die zugehörigen automorphen Formen verwendet. Zu einfachen Formeln gelangt man, wenn man zunächst die durch die Signatur n, $m-n$ der indefiniten quadratischen Form bestimmten Gewichte

$$\alpha=\frac{n}{2},\quad \beta=\frac{m-n}{2}$$

in zulässiger Weise geeignet reduziert. Entweder läßt sich eine der Zahlen α, β mod 1 in 0 oder $k=\alpha-\beta$ mod 2 in 0 oder 1 überführen. Der allgemeine

---

[7]) MAASS, H.: Über eine neue Art von nicht-analytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **121**, 141—183 (1949).

[8]) SIEGEL, C. L.: Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen I und II. Math. Z. **43**, 682—708 (1938); **44**, 398—426 (1939).

Formelapparat wird so weit entwickelt, daß die Durchführung dieses Verfahrens keine Mühe mehr bereitet. Doch soll die explizite Aufstellung der Funktionalgleichungen hier unterbleiben, da sich das Interesse nach der von SIEGEL eingeleiteten Entwicklung von den Zetafunktionen auf die Modulfunktionen als das kräftigere analytische Hilfsmittel in der Theorie der indefiniten quadratischen Formen verlagert hat.

Es bezeichne $\mathsf{M}(Q)$ die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe zur Stufe Q und v ein im parabolischen Fixpunkt ∞ unverzweigtes Multiplikatorsystem zur Gruppe $\mathsf{M}(Q)$ und zur Dimension $-k = \beta - \alpha$. Mit $\varkappa = 0$ gilt dann für $f(z, w) \subset \{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, v\}$ eine Entwicklung der Art (13). Jeder solchen Form kann also ein Paar von DIRICHLET-Reihen

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{a_n}{n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{a_{-n}}{n^s} \tag{22}$$

zugeordnet werden. Ist k ganz rational und $v = 1$, so läßt sich das Problem der EULERschen Produktentwicklung mit den von HECKE[9]) und PETERSSON[10]) entwickelten Methoden auch jetzt befriedigend behandeln, wenn man die lineare Schar $\{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\}$ in Teilscharen geeignet aufspaltet. Hier ist zu beachten, daß $\{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\}$ endlichen Rang hat, was man mit einer SIEGELschen Schlußweise ähnlich wie für Wellenfunktionen[7]) beweist. Zunächst hat man nach dem klassischen Vorbild[9]) eine Zerlegung der vollen Schar in die „Teilscharen zum Teiler t und Charakter χ“, die mit $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ bezeichnet werden sollen, vorzunehmen. Die weitere Zerfällung wird durch einen neuen Operator Θ bestimmt, der die Beziehungen zwischen Formen und DIRICHLET-Reihen vereinfacht. Der durch

$$\mathsf{X} f(z, w) = f(-w, -z) \tag{23}$$

definierte Operator X bildet $\{\alpha, \beta\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{\beta, \alpha\}$ und allgemein $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ umkehrbar eindeutig auf $\{\mathsf{G}^*; \beta, \alpha, v^*\}$ ab, wobei

$$\mathsf{G}^* = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} \mathsf{G} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^*\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = v\begin{pmatrix}a & -b\\ -c & d\end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Insbesondere gilt also

$$\mathsf{X}\{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\} = \{\mathsf{M}(Q); \beta, \alpha, 1\}. \tag{24}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf also $k = \alpha - \beta \geqq 0$ angenommen werden. Die Operatoren K und Λ mögen auf $\{\alpha, \beta\}$ dieselbe Wirkung haben wie K_α, Λ_β. Da die Scharen $\{\alpha, \beta\}$ nicht elementfremd sind, sind $\mathsf{K} f(z, w)$ und $\Lambda f(z, w)$ erst dann eindeutig erklärt, wenn genau feststeht, aus welcher Schar $\{\alpha, \beta\}$ die Funktion $f(z, w)$ ausgewählt ist. Wir setzen nun

$$\Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \mathsf{X} \Lambda^k, \tag{25}$$

wobei $\Gamma(\beta)$ endlich, also $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ sein muß. Mit Hilfe der Relation $\mathsf{K}\mathsf{X} = -\mathsf{X}\Lambda$ ergibt sich leicht $\Theta^2 = 1$. Θ bildet die Teilscharen $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ auf sich ab. Wir können also eine Zerlegung

$$\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta) = \mathfrak{F}^+(t, \chi, Q, \alpha, \beta) + \mathfrak{F}^-(t, \chi, Q, \alpha, \beta) \tag{26}$$

[9]) HECKE, E.: Über Modulfunktionen und die DIRICHLETschen Reihen mit EULERscher Produktentwicklung I und II. Math. Ann. **114**, 1—28, 316—351 (1937).

[10]) PETERSSON, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer RIEMANNschen Funktionalgleichung durch DIRICHLET-Reihen mit EULERscher Produktentwicklung I, II, III. Math. Ann. **116**, 401—412 (1939); **117**, 39—64, 277—300 (1940/41).

vornehmen, so daß $\mathfrak{F}^+$ und $\mathfrak{F}^-$ aus Eigenfunktionen des Operators Θ zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 bestehen. Die DIRICHLET-Reihen (22) unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor, wenn die zugehörige Form $f(z, w)$ in $\mathfrak{F}^+$ oder $\mathfrak{F}^-$ liegt. Darin liegt die Bedeutung des Operators Θ. Auf die Scharen $\mathfrak{F}^+$ und $\mathfrak{F}^-$ läßt sich die HECKEsche Theorie der T_n-Operatoren ohne besondere Modifikationen übertragen. Bezüglich der EULER-Produkte sind dieselben Resultate zu erzielen wie im klassischen Fall[9]) [10]). Dieser Hinweis mag hier genügen.

Die vorliegende Differentialgleichungstheorie kann in beschränktem Umfang auf die SIEGELschen Modulfunktionen verallgemeinert werden. Darüber soll später berichtet werden.

§ 1. Differentialoperatoren.

Wir untersuchen hier die formalen Grundregeln für das Rechnen mit den eingeführten Differentialoperatoren. Die Wirkung der Operatoren K_α, Λ_β auf die EISENSTEIN-Reihen $E(z, w; \alpha, \beta)$ ist leicht festzustellen, da die Ableitungen nach z und w im Bereich der absoluten Konvergenz gliedweise gebildet werden können. So ergeben sich ohne weiteres die Relationen (7) und (8). Bei der Umrechnung der Operatoren auf die Variablen

$$x = \frac{1}{2}(z + w), \quad y = \frac{1}{2i}(z - w) \tag{27}$$

sind die Formeln

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{28}$$

zu verwenden. Es gilt also

$$(z - w)^2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial w} = -\,y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_\alpha &= \alpha + (z - w)\,\frac{\partial}{\partial z} = \alpha + y\left(i\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \Lambda_\beta &= -\beta + (z - w)\,\frac{\partial}{\partial w} = -\beta + y\left(i\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{30}$$

folglich

$$\begin{aligned} \Lambda_{\beta-1}\,\mathsf{K}_\alpha &= (z - w)^2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial w} - \beta\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial w} + \alpha\,(1 - \beta), \\ \mathsf{K}_{\alpha-1}\,\Lambda_\beta &= (z - w)^2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial w} - \beta\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial w} + \beta\,(1 - \alpha), \end{aligned} \tag{31}$$

woraus

$$\begin{aligned} &\Lambda_{\beta-1}\,\mathsf{K}_\alpha + \alpha\,(\beta - 1) = \mathsf{K}_{\alpha-1}\,\Lambda_\beta + \beta\,(\alpha - 1) \\ &= (z - w)^2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial w} - \beta\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\,(z - w)\,\frac{\partial}{\partial w} \\ &= -\,y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + (\alpha - \beta)\,i\,y\,\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha + \beta)\,y\,\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{32}$$

erhellt. In der komplexen Mannigfaltigkeit der Punkte (z, w) bezeichne $\mathfrak{H}$ die „obere Halbebene" $w = \bar{z}$, $\mathfrak{Im}\, z > 0$. $\{\alpha, \beta\}$ besteht also aus den Funktionen $f(z, w)$, die in $\mathfrak{H}$ regulär sind und von dem Operator (32) annulliert werden. Da es sich hier um eine elliptische Differentialgleichung spezieller Art handelt, so ist die Analytizität von $f(z, w)$ in $\mathfrak{H}$ sicher dann gewährleistet, wenn die Funktion nach den Variablen x, y im Reellen zweimal stetig differenzierbar ist.

Hilfssatz 1: *1. Es ist stets*

(33) $$\mathsf{K}_\alpha\{\alpha,\beta\}\subset\{\alpha+1,\beta-1\},\ \Lambda_\beta\{\alpha,\beta\}\subset\{\alpha-1,\beta+1\}.$$

2. Ist $\alpha(\beta-1)\neq 0$ *bzw.* $\beta(\alpha-1)\neq 0$, *so wird* $\{\alpha,\beta\}$ *durch* K_α *bzw.* Λ_β *umkehrbar eindeutig auf* $\{\alpha+1,\beta-1\}$ *bzw.* $\{\alpha-1,\beta+1\}$ *abgebildet.*

Beweis: Für $f\subset\{\alpha,\beta\}$ ist

$$(\Lambda_{\beta-1}\mathsf{K}_\alpha+\alpha(\beta-1))f=(\mathsf{K}_{\alpha-1}\Lambda_\beta+\beta(\alpha-1))f=0.$$

Wendet man hierauf K_α bzw. Λ_β an, so ergibt sich

$$(\mathsf{K}_\alpha\Lambda_{\beta-1}+\alpha(\beta-1))(\mathsf{K}_\alpha f)=(\Lambda_\beta\mathsf{K}_{\alpha-1}+\beta(\alpha-1))(\Lambda_\beta f)=0,$$

also

$$\mathsf{K}_\alpha f\subset\{\alpha+1,\beta-1\},\quad \Lambda_\beta f\subset\{\alpha-1,\beta+1\};$$

denn $\mathsf{K}_\alpha f$ und $\Lambda_\beta f$ sind sicher in $\mathfrak{H}$ regulär.

Die durch K_α bzw. Λ_β vermittelte Abbildung von $\{\alpha,\beta\}$ ist im Falle $\alpha(\beta-1)\neq 0$ bzw. $\beta(\alpha-1)\neq 0$ umkehrbar eindeutig, da es eine inverse Abbildung gibt, nämlich $\frac{1}{\alpha(1-\beta)}\Lambda_{\beta-1}$ bzw. $\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\mathsf{K}_{\alpha-1}$. Daraus ergibt sich schließlich auch, daß jede Funktion aus $\{\alpha+1,\beta-1\}$ bzw. $\{\alpha-1,\beta+1\}$ als Bild einer Funktion aus $\{\alpha,\beta\}$ vorkommt.

Hilfssatz 2: *Für reelle Substitutionen* $S=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *mit der Determinante* 1 *ist*

(34) $$\{\alpha,\beta\}\,|\,S=\{\alpha,\beta\}.$$

Beweis: Es sei $\hat z=Sz$, $\hat w=Sw$. Die Operatoren $\hat{\mathsf{K}}_\alpha$, $\hat\Lambda_{\beta-1}$ mögen aus K_α, $\Lambda_{\beta-1}$ entstehen, wenn man hierin z,w durch $\hat z,\hat w$ ersetzt. Mit Hilfe von

$$\hat z-\hat w=\frac{z-w}{(cz+d)(cw+d)},\quad \frac{\partial}{\partial\hat z}=(cz+d)^2\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial\hat w}=(cw+d)^2\frac{\partial}{\partial w}$$

ergibt sich dann die Operatorenidentität

(35) $$\hat\Lambda_{\beta-1}\hat{\mathsf{K}}_\alpha(cz+d)^\alpha(cw+d)^\beta=(cz+d)^\alpha(cw+d)^\beta\Lambda_{\beta-1}\mathsf{K}_\alpha.$$

Zum Beweis führen wir die linke Seite von (35) über in

$$\left(1-\beta+(\hat z-\hat w)\frac{\partial}{\partial\hat w}\right)\left(\alpha+(\hat z-\hat w)\frac{\partial}{\partial\hat z}\right)(cz+d)^\alpha(cw+d)^\beta$$
$$=\left(1-\beta+(z-w)\frac{cw+d}{cz+d}\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\alpha+(z-w)\frac{cz+d}{cw+d}\frac{\partial}{\partial z}\right)(cz+d)^\alpha(cw+d)^\beta.$$

Die Identität mit der rechten Seite von (35) ist nun leicht zu bestätigen. Sei $f(\hat z,\hat w)\subset\{\alpha,\beta\}$, also

$$(\hat\Lambda_{\beta-1}\hat{\mathsf{K}}_\alpha+\alpha(\beta-1))f(\hat z,\hat w)=0.$$

Hieraus folgt

$$(cz+d)^\alpha(cw+d)^\beta(\Lambda_{\beta-1}\mathsf{K}_\alpha+\alpha(\beta-1))\ (cz+d)^{-\alpha}(cw+d)^{-\beta}f(\hat z,\hat w)=0$$

oder

$$(\Lambda_{\beta-1}\mathsf{K}_\alpha+\alpha(\beta-1))(f(z,w)\,|\,S)=0,$$

mithin $f(z,w)\,|\,S\subset\{\alpha,\beta\}$; denn $f(z,w)\,|\,S$ ist in $\mathfrak{H}$ sicher regulär. Da es zu der Operation $f(z,w)\to f(z,w)\,|\,S$ eine inverse gibt, ist $\{\alpha,\beta\}\,|\,S$ mit $\{\alpha,\beta\}$ identisch, q. e. d.

Hilfssatz 3: *Sei* $f(z, w) \subset \{\alpha, \beta\}$ *und* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *eine reelle Substitution mit der Determinante* 1. *Dann ist*

$$(36) \qquad (\mathsf{K}_\alpha f(z, w)) \,|\, S = \mathsf{K}_\alpha (f(z, w) \,|\, S), \quad (\Lambda_\beta f(z, w)) \,|\, S = \Lambda_\beta (f(z, w) \,|\, S).$$

Beweis: Wir setzen wieder $\hat{z} = S z$, $\hat{w} = S w$ und finden

$$\begin{aligned}(\mathsf{K}_\alpha f(z, w)) \,|\, S &= (cz + d)^{-\alpha - 1} (cw + d)^{-\beta + 1} \left(\alpha + (\hat{z} - \hat{w}) \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\right) f(\hat{z}, \hat{w}) \\ &= (cz + d)^{-\alpha - 1} (cw + d)^{-\beta + 1} \left(\alpha + (z - w) \frac{cz + d}{cw + d} \frac{\partial}{\partial z}\right) f(\hat{z}, \hat{w}) \\ &= \left(\alpha + (z - w) \frac{\partial}{\partial z}\right) (cz + d)^{-\alpha} (cw + d)^{-\beta} f(\hat{z}, \hat{w}) = \mathsf{K}_\alpha (f(z, w) \,|\, S).\end{aligned}$$

Analog erschließt man die zweite Relation.

Hilfssatz 4: *Sei* $f(z, w) \subset \{\alpha, \beta\}$ *und* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *eine reelle Substitution mit der Determinante* 1. *Dann ist*

$$(37) \qquad (\mathsf{X} f(z, w)) \,|\, S = \mathsf{X} (f(z, w) \,|\, S^*) \qquad \textit{mit } S^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Beweis: Da die Differentialgleichung

$$(\Lambda_{\beta - 1} \mathsf{K}_\alpha + \alpha (\beta - 1)) f(z, w) = 0$$

in sich übergeht, wenn man gleichzeitig α, β durch β, α und x durch $-x$ ersetzt, so gilt offenbar

$$(38) \qquad \mathsf{X} \{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}(\mathsf{X} f(z, w)) \,|\, S &= f(-w, -z) \,|\, S \\ &= f\left(\frac{a(-w) - b}{-c(-w) + d}, \frac{a(-z) - b}{-c(-z) + d}\right) (-c(-z) + d)^{-\beta} (-c(-w) + d)^{-\alpha} \\ &= \mathsf{X} (f(z, w) \,|\, S^*).\end{aligned}$$

Hilfssatz 5: *Es sei* $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ *und* $k = \alpha - \beta$ *ganz rational* $\geqq 0$. *Mit* $\Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \mathsf{X} \Lambda^k$ *ist dann* $\Theta \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$ *und* $\Theta^2 = 1$.

Beweis: Nach (38) und Hilfssatz 1 ist

$$\Theta \{\alpha, \beta\} = \mathsf{X} \Lambda^k \{\alpha, \beta\} \subset \mathsf{X} \{\alpha - k, \beta + k\} = \{\beta + k, \alpha - k\} = \{\alpha, \beta\}.$$

Zum Beweis der Relation $\Theta^2 = 1$ benötigen wir die Vertauschungsregel

$$(39) \qquad \mathsf{K} \mathsf{X} = - \mathsf{X} \Lambda.$$

Wegen $\mathsf{X}^2 = 1$ ist sie gleichwertig mit $\mathsf{X} \mathsf{K} \mathsf{X} = - \Lambda$. Für $g(x, y) \subset \{\alpha, \beta\}$ gilt nun in der Tat

$$\begin{aligned}\mathsf{X} \mathsf{K}_\beta \mathsf{X} g(x, y) &= \mathsf{X} \left(\beta + y \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) g(-x, y) \\ &= -\left(-\beta + y \left(i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) g(x, y) = - \Lambda_\beta g(x, y).\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\Theta^2 &= \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 (\mathsf{X}\,\Lambda^k)^2 = (-1)^k \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \mathsf{K}^k \Lambda^k \\ &= (-1)^k \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \mathsf{K}_{\alpha-1}\,\mathsf{K}_{\alpha-2}\ldots\mathsf{K}_\beta\,\Lambda_{\alpha-1}\,\Lambda_{\alpha-2}\ldots\Lambda_\beta \\ &= (\alpha-1)^2(\alpha-2)^2\ldots\beta^2\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 = 1,\end{aligned}$$

wobei berücksichtigt wurde, daß $\mathsf{K}_{\beta+\nu}\,\Lambda_{\alpha-1-\nu}$ auf die Schar $\{\beta+\nu+1, \alpha-1-\nu\}$ dieselbe Wirkung hat wie der Operator $-(\beta+\nu)(\alpha-1-\nu)$. Wegen $\Theta^2 = 1$ wird $\{\alpha, \beta\}$ durch Θ auf sich abgebildet.

§ 2. Automorphe Formen.

Für $\Im z > 0$, $\Im w < 0$ und reelle $c, d \neq 0, 0$ ist

$$(c\,z+d)^\alpha = e^{\alpha \log(cz+d)}, \quad (c\,w+d)^\beta = e^{\beta\log(cw+d)}$$

und

$$\begin{aligned}\log(c\,z+d) &= \log|c\,z+d| + i\arg(c\,z+d), \; -\pi < \arg(c\,z+d) \leqq \pi \\ \log(c\,w+d) &= \log|c\,w+d| + i\arg(c\,w+d), \; -\pi \leqq \arg(c\,w+d) < \pi\end{aligned}$$

mit reellen $\log|cz+d|$, $\log|cw+d|$ gesetzt worden. Offenbar ist

$$\log(cz+d) + \log(cw+d) \text{ reell für } w = \bar{z}.$$

Folglich treten in den Transformationsformeln, die das Verhalten der Funktionen

$$(cz+d)^\alpha (cw+d)^\beta = (cz+d)^{\alpha-\beta}\cdot(cz+d)^\beta (cw+d)^\beta$$

und $(cz+d)^{\alpha-\beta}$ gegenüber reellen Substitutionen $z \to Sz$, $w \to Sw$ beschreiben, dieselben Faktorsysteme $\sigma^{(\alpha-\beta)}(M, S)$ (in der PETERSSONschen Bezeichnung[4])) auf. Sind $S_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu\end{pmatrix}$ reelle Substitutionen mit der Determinante 1 und ist $S_3 = S_1 S_2$, so gilt also

$$\begin{aligned}&(c_1 S_2 z + d_1)^\alpha (c_1 S_2 w + d_1)^\beta (c_2 z + d_2)^\alpha (c_2 w + d_2)^\beta \\ &\quad = \sigma(S_1, S_2)(c_3 z + d_3)^\alpha (c_3 w + d_3)^\beta \qquad \text{mit } \sigma = \sigma^{(\alpha-\beta)}.\end{aligned} \tag{40}$$

Allgemein kann nun

$$f\,|\,(S_1 S_2) = \sigma(S_1, S_2)(f\,|\,S_1)\,|\,S_2 \qquad \text{für } f \subset \{\alpha, \beta\} \tag{41}$$

bewiesen werden.

Es sei G eine Gruppe reeller Substitutionen und f eine nicht identisch verschwindende Funktion aus $\{\alpha, \beta\}$. Mit gewissen Zahlkoeffizienten $v(S)$ vom Betrag 1 sei

$$f\,|\,S = v(S)\,f \qquad \text{für } S \subset \mathsf{G}. \tag{42}$$

Die Formel (41) ergibt dann

$$v(S_1 S_2) = \sigma(S_1, S_2)\,v(S_1)\,v(S_2) \qquad \text{für } S_1, S_2 \subset \mathsf{G}.$$

Die Zahlwerte $v(S)$ bilden also ein Multiplikatorsystem zur Gruppe G und zur Dimension $\beta - \alpha$. In der üblichen Weise bestätigt man, daß sich die transformierte Funktion $f\,|\,A^{-1}$ nach der Regel

$$(f\,|\,A^{-1})\,|\,S = v^{A^{-1}}(S)\,f\,|\,A^{-1} \qquad \text{für } S \subset A\,\mathsf{G}\,A^{-1} \tag{43}$$

umsetzt. Dabei ist A eine beliebige reelle Substitution mit der Determinante 1 und

$$v^{A^{-1}}(S) = v(A^{-1} S A)\,\frac{\sigma(A^{-1} S A, A^{-1})}{\sigma(A^{-1}, S)}. \tag{44}$$

Nach Hilfssatz 3 und 4 ist außerdem

$$(\mathsf{K}_\alpha f) \mid S = v(S)\,\mathsf{K}_\alpha f, \quad (\Lambda_\beta f) \mid S = v(S)\,\Lambda_\beta f \text{ für } S \subset \mathsf{G} \tag{45}$$

und

$$(\mathsf{X} f) \mid S = v^*(S)\,\mathsf{X} f \quad \text{ für } S \subset \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \mathsf{G} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

mit

$$v^*\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Wir bestimmen nun die FOURIER-Entwicklungen der in $\{\alpha, \beta\}$ gelegenen periodischen Funktionen.

Hilfssatz 6: *Es sei $g_\varepsilon(y)\, e^{i\varepsilon x} \subset \{\alpha, \beta\}$ und $g_\varepsilon(y) = O(y^K)$ für reelles $y \to \infty$ mit einer gewissen Konstanten K im Falle $\varepsilon \neq 0$. Dann ist*

$$g_0(y) = a\,u(y, \alpha + \beta) + b, \quad g_\varepsilon(y) = a\,W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) \text{ für } \varepsilon = \pm 1$$

mit den durch (14) *erklärten Funktionen. a und b bezeichnen beliebige Konstanten.*

Beweis: Im Falle $\varepsilon = 0$ wird behauptet, daß 1 und $u(y, \alpha + \beta)$ ein Hauptsystem der Differentialgleichung

$$y\,g_0''(y) + (\alpha + \beta)\,g_0'(y) = 0 \tag{48}$$

bilden. Das ist leicht zu bestätigen. Sei nun $\varepsilon = \pm 1$. Für $g_\varepsilon(y)$ ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$y\,g_\varepsilon''(y) + (\alpha + \beta)\,g_\varepsilon'(y) + ((\alpha - \beta)\,\varepsilon - y)\,g_\varepsilon(y) = 0, \tag{49}$$

die sich in einfacher Weise auf die WHITTAKERsche Differentialgleichung — eine spezielle reduzierte Form der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung — zurückführen läßt [s. KAMKE[11]), 2 · 273 (9)]. Es gilt nämlich

$$g_\varepsilon(y) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\, W\left(\frac{(\alpha - \beta)\,\varepsilon}{2}, \frac{\alpha + \beta - 1}{2}, 2\,y\right),$$

wobei $W(l, m, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$4\,y^2\,W'' = (y^2 - 4\,l\,y + 4\,m^2 - 1)\,W \tag{50}$$

bezeichnet. Diese besitzt das Hauptsystem $W_{l,m}(y)$, $W_{-l,m}(-y)$ [s.[5]), S. 116]. Für $y \to \infty$ geht die erste Funktion exponentiell gegen 0 und die zweite exponentiell gegen ∞. Mithin ist

$$g_\varepsilon(y) = a\,y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\, W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2\,y). \tag{51}$$

Zur Abkürzung ist hierfür

$$g_\varepsilon(y) = a\,W(y; \alpha, \beta, \varepsilon) \tag{52}$$

geschrieben worden.

[11]) KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungen und Lösungsmethoden I. Leipzig 1942.

Wir bestimmen die Wirkungen der Operatoren K_α, Λ_β, X auf die in Hilfssatz 6 genannten Funktionen:

Hilfssatz 7: *1.* $\mathsf{X}\,1 = 1$. $\mathsf{X}\,u\,(y, \alpha+\beta) = u\,(y, \alpha+\beta)$,

$$\mathsf{X}\,W\,(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} = W(y;\beta,\alpha,-\varepsilon)\,e^{-i\varepsilon x} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

2. $\mathsf{K}_\alpha\,1 = \alpha$, $\mathsf{K}_\alpha\,u\,(y, \alpha+\beta) = (1-\beta)\,u\,(y,\alpha+\beta) + 1$,

$$\mathsf{K}_\alpha\,W\,(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} = \begin{cases} -\,W\,(y;\alpha+1,\ \beta-1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \textit{für } \varepsilon = 1,\\ -\,\alpha\,(\beta-1)\,W\,(y;\alpha+1,\ \beta-1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \textit{für } \varepsilon = -1.\end{cases}$$

3. $\Lambda_\beta\,1 = -\beta$, $\Lambda_\beta\,u\,(y,\alpha+\beta) = (\alpha-1)\,u\,(y,\alpha+\beta) - 1$,

$$\Lambda_\beta\,W\,(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} = \begin{cases} (\alpha-1)\,\beta\,W\,(y;\alpha-1,\ \beta+1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \textit{für } \varepsilon = 1,\\ W\,(y;\alpha-1,\ \beta+1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \textit{für } \varepsilon = -1.\end{cases}$$

Beweis: Die behauptete Wirkung von X ist elementar zu prüfen, ebenso die von K_α und Λ_β auf die Funktionen 1, $u\,(y,\alpha+\beta)$. Darauf braucht nicht mehr eingegangen zu werden. Für die restlichen Transformationsformeln benötigen wir einige Identitäten, die zwischen den Lösungen $W\,(l,m,y)$ der WHITTAKERschen Differentialgleichung (50) zu verschiedenen Parameterwerten l, m bestehen. Zunächst bestätigt man leicht, daß

$$y\,W'\,(l,m,y) \pm (l - \tfrac{1}{2}\,y)\,W\,(l,m,y)$$

eine Lösung vom Typus $W\,(l\pm 1, m, y)$ ist. Wählt man speziell $W\,(l,m,y) = W_{l,m}\,(y)$ so zeigt das asymptotische Verhalten dieser Funktion, daß $W\,(l\pm 1, m, y)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $W_{l\pm 1,m}\,(y)$ identisch ist. Dieser Faktor kann mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung

$$W_{l,m}\,(y) \approx e^{-\frac{y}{2}}\,y^l\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,y^n}\prod_{\nu=1}^{n}\left[m^2 - (l + \tfrac{1}{2} - \nu)^2\right]\right)$$

[s.[5]), S. 116] ermittelt werden, wenn man hierin hinreichend viele Glieder berücksichtigt. So ergibt sich

$$y\,W'_{l,m}\,(y) - (l - \tfrac{1}{2}\,y)\,W_{l,m}\,(y) = -\,(m^2 - (l-\tfrac{1}{2})^2)\,W_{l-1,m}\,(y), \tag{53}$$

$$y\,W'_{l,m}\,(y) + (l - \tfrac{1}{2}\,y)\,W_{l,m}\,(y) = -\,W_{l+1,m}\,(y). \tag{54}$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_\alpha\,W\,(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x}
&= \left(\alpha + y\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2},\ \frac{\alpha+\beta-1}{2}}\,(2\,y)\,e^{i\varepsilon x}\\
&= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{2\,y\,W'_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2},\ \frac{\alpha+\beta-1}{2}}\,(2\,y) + \right.\\
&\qquad\left. + \,\varepsilon\left(\frac{(\alpha-\beta)\,\varepsilon}{2} - y\right) W_{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2},\ \frac{\alpha+\beta-1}{2}}\,(2\,y)\right\} e^{i\varepsilon x}\\
&= \begin{cases} -\,y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,W_{\frac{\alpha-\beta+2}{2},\ \frac{\alpha+\beta-1}{2}}\,(2\,y)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1,\\ -\,\alpha\,(\beta-1)\,W_{\frac{\beta-\alpha-2}{2},\ \frac{\alpha+\beta-1}{2}}\,(2\,y)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1,\end{cases}\\
&= \begin{cases} -\,W\,(y;\alpha+1,\ \beta-1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = 1,\\ -\,\alpha\,(\beta-1)\,W\,(y;\alpha+1,\ \beta-1,\ \varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon = -1,\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_\beta W(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} &= -\mathsf{X}\,\mathsf{K}_\beta\,\mathsf{X}\,W(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x}\\ &= -\mathsf{X}\,\mathsf{K}_\beta\,W(y;\beta,\alpha,-\varepsilon)\,e^{-i\varepsilon x}\\ &= \begin{cases}\mathsf{X}\,W(y;\beta+1,\alpha-1,-\varepsilon)\,e^{-i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon=-1,\\ \beta(\alpha-1)\,\mathsf{X}\,W(y;\beta+1,\alpha-1,-\varepsilon)\,e^{-i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon=1,\end{cases}\\ &= \begin{cases}W(y;\alpha-1,\beta+1,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon=-1,\\ \beta(\alpha-1)\,W(y;\alpha-1,\beta+1,\varepsilon)\,e^{i\varepsilon x} & \text{für } \varepsilon=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Hilfssatz 8: *Es sei* $g(x,y)\subset\{\alpha,\beta\}$, $g(x+Q,y)=e^{2\pi i\varkappa}g(x,y)$ $(Q>0,\ 0\leqq\varkappa<1)$ *und* $g(x,y)=O(y^K)$ *für reelles* $y\to\infty$ *gleichmäßig in* $0\leqq x\leqq Q$ *mit einer gewissen Konstanten* K. *Dann läßt sich* $g(x,y)$ *in eine* FOURIER-*Reihe*
$$g(x,y)=a_0\,u(y,\alpha+\beta)+b_0+$$
$$+\sum_{n+\varkappa\neq 0}{}' a_{n+\varkappa}\,W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\,y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}(n+\varkappa)\right)e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}x}$$
entwickeln, die für reelle x *und* $y>0$ *absolut konvergiert. Die Koeffizienten* a_0 *und* b_0 *verschwinden im Falle* $\varkappa>0$. *Umgekehrt stellt jede solche* FOURIER*reihe eine Funktion mit den genannten Eigenschaften dar.*

Beweis: Es sei $g(x,y)\subset\{\alpha,\beta\}$ und $g(x+Q,y)=e^{2\pi i\varkappa}g(x,y)$. Dann gibt es eine FOURIER-Entwicklung
$$g(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' A_{n+\varkappa}(y)\,e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}x},$$
die sicher absolut konvergiert, da $g(x,y)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Offenbar ist
$$A_{n+\varkappa}(y)\,e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}x}\subset\{\alpha,\beta\}\qquad\text{für alle } n,$$
also auch
$$A_{n+\varkappa}\left(\frac{Q\,y}{2\pi|n+\varkappa|}\right)e^{i\varepsilon x}\subset\{\alpha,\beta\}\qquad\text{für } n+\varkappa\neq 0$$
mit $\varepsilon=\operatorname{sgn}(n+\varkappa)$ und
$$A_{n+\varkappa}(y)\subset\{\alpha,\beta\}\qquad\text{für } n+\varkappa=0,$$
was nur im Falle $\varkappa=0$ möglich ist. Wächst $g(x,y)$ gleichmäßig in x für $y\to\infty$ höchstens wie eine Potenz von y, so gilt dies auch für die FOURIER-Koeffizienten
$$A_{n+\varkappa}(y)=\frac{1}{Q}\int_0^Q g(x,y)\,e^{-\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}x}\,dx.$$
Hilfssatz 6 liefert nun
$$A_0(y)=a_0\,u(y,\alpha+\beta)+b_0\qquad\text{(im Falle } \varkappa=0)$$
$$A_{n+\varkappa}(y)=a_{n+\varkappa}\,W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\,y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}(n+\varkappa)\right)\qquad\text{für } n+\varkappa\neq 0.$$
Die Betrachtung ist leicht umzukehren, wenn man die asymptotische Entwicklung
$$W(y;\alpha,\beta,\varepsilon)\sim 2^{\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{2}}\,y^{-\frac{\alpha+\beta+(\beta-\alpha)\varepsilon}{2}}\,e^{-y}\qquad\text{für } y\to\infty \tag{55}$$
beachtet.

Wir wenden uns nun den Formenscharen $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ zu, wobei $|v| = 1$ sei. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann auch $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \subset \mathsf{G}$ vorausgesetzt werden, wenn dies aus beweistechnischen Gründen bequem ist. Die Formen $f(z, w) \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ sind durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:

1. $f(z, w) \subset \{\alpha, \beta\}$,

2. $f(z, w) \mid S = v(S) f(z, w)$ für $S \subset \mathsf{G}$,

3. Ist ∞ parabolischer Fixpunkt von $A\,\mathsf{G}\,A^{-1}$ und erzeugt $\begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mit $Q > 0$) die Gruppe der parabolischen Substitutionen $\subset A\,\mathsf{G}\,A^{-1}$ mit dem Fixpunkt ∞, so gibt es eine Entwicklung

$$f(z, w) \mid A^{-1} = a_0\, u(y, \alpha + \beta) + b_0 + \sum_{n+\varkappa \neq 0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi |n + \varkappa|}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n + \varkappa)\right) e^{\frac{2\pi i (n+\varkappa)}{Q} x}, \tag{56}$$

wobei

$$v^{A^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2\pi i \varkappa}, \quad 0 \leqq \varkappa < 1$$

gesetzt ist.

Die Gleichwertigkeit dieser Bedingungen mit den in der Einleitung formulierten ist mit Hilfe von (43), Hilfssatz 2 und 8 ohne weiteres festzustellen.

Satz 1: *Für reelle Substitutionen L mit der Determinante 1 ist*

$$\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \mid L = \{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\}.$$

Beweis: Sei $f(z, w) \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$. Dann ist nach Hilfssatz 2 $f(z, w) \mid L \subset \{\alpha, \beta\}$ und nach (44) $(f(z, w) \mid L) \mid S = v^L(S) f(z, w) \mid L$ für $S \subset L^{-1}\,\mathsf{G}\,L$. Weiter sei ∞ parabolischer Fixpunkt von $B\,L^{-1}\,\mathsf{G}\,L\,B^{-1}$; $\begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeuge die Gruppe der parabolischen Substitutionen $\subset B\,L^{-1}\,\mathsf{G}\,L\,B^{-1}$ mit dem Fixpunkt ∞. Wird $A = B\,L^{-1}$ gesetzt, so gilt für $f(z, w) \mid A^{-1}$ und folglich auch für

$$(f(z, w) \mid L) \mid B^{-1} = \frac{1}{\sigma(L, B^{-1})} f(z, w) \mid A^{-1}$$

eine Entwicklung der Art (56). Damit ist

$$\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \mid L \subset \{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\}$$

bewiesen. Hierin ersetzt man L durch L^{-1}, sodann G, v durch $L^{-1}\,\mathsf{G}\,L$, v^L. Dies ergibt

$$\{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\} \mid L^{-1} \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$$

oder

$$\{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\} \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \mid L,$$

mithin

$$\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \mid L = \{L^{-1}\,\mathsf{G}\,L; \alpha, \beta, v^L\}.$$

Satz 2: *1. Es ist stets*

$$\mathsf{K}_\alpha \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \subset \{\mathsf{G}; \alpha + 1, \beta - 1, v\}, \quad \Lambda_\beta \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\} \subset \{\mathsf{G}; \alpha - 1, \beta + 1, v\}.$$

2. Ist $\alpha(\beta - 1) \neq 0$ bzw. $\beta(\alpha - 1) \neq 0$, so wird $\{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ durch K_α bzw. Λ_β umkehrbar eindeutig auf $\{\mathsf{G}; \alpha + 1, \beta - 1, v\}$ bzw. $\{\mathsf{G}; \alpha - 1, \beta + 1, v\}$ abgebildet.

Beweis: Sei $f(z, w) \subset \{\mathsf{G};\alpha, \beta, v\}$. Nach Hilfssatz 1 liegt dann $\mathsf{K}_\alpha f(z, w)$ in $\{\alpha + 1, \beta - 1\}$ und $\Lambda_\beta f(z, w)$ in $\{\alpha - 1, \beta + 1\}$. Auch gegenüber den Substitutionen aus G zeigen die Funktionen nach (45) das richtige Verhalten. Aus (56) folgt schließlich, wenn Hilfssatz 3 und 7 beachtet wird,

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{K}_\alpha f(z, w)) \mid A^{-1} &= (1-\beta)\, a_0\, u(y, \alpha+\beta) + a_0 + \alpha\, b_0 \\
&+ \sum_{n+\varkappa>0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha+1, \beta-1, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x} \\
&- \alpha(\beta-1) \sum_{n+\varkappa<0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha+1, \beta-1, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x},
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Lambda_\beta f(z, w)) \mid A^{-1} &= (\alpha-1)\, a_0\, u(y, \alpha+\beta) - a_0 - \beta\, b_0 \\
&+ \beta(\alpha-1) \sum_{n+\varkappa>0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha-1, \beta+1, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x} \\
&+ \sum_{n+\varkappa<0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha-1, \beta+1, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x}.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Damit ist Teil 1 von Satz 2 bewiesen. Nun ist wie beim Hilfssatz 1 weiter zu schließen.

Satz 3: *Es sei $k = \alpha - \beta$ ganz rational $\geqq 0$ und $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ Dann ist*

$$\Theta\{\mathsf{G};\alpha, \beta, v\} = \{\mathsf{G}^*;\alpha, \beta, v^*\}$$

mit $\mathsf{G}^* = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} \mathsf{G} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ *und* $v^*\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = v\begin{pmatrix}a & -b\\ -c & d\end{pmatrix}$.

Beweis: Wegen (46) und Hilfssatz 4 ist

$$\mathsf{X}\{\mathsf{G};\alpha, \beta, v\} = \{\mathsf{G}^*;\beta, \alpha, v^*\}. \tag{59}$$

Satz 2 ergibt also

$$\Theta\{\mathsf{G};\alpha, \beta, v\} = \mathsf{X}\Lambda^k\{\mathsf{G};\alpha, \beta, v\} = \mathsf{X}\{\mathsf{G};\beta, \alpha, v\} = \{\mathsf{G}^*;\alpha, \beta, v^*\}.$$

Wiederholte Anwendung der Formeln (57) und (58) für $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ergibt

Satz 4: *Die Funktion $f(z, w) \subset \{\alpha, \beta\}$ gestatte die* Fourier-*Entwicklung*

$$
\begin{aligned}
f(z, w) &= a_0\, u(y, \alpha+\beta) + b_0 + \\
&+ \sum_{n+\varkappa\neq 0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha, \beta, \operatorname{sgn}(n+\varkappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Dann ist für $h \geqq 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{K}^h f(z, w) &= (-1)^h \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-h)}\, a_0\, u(y, \alpha+\beta) + \\
&+ \left(\sum_{\nu=0}^{h-1}{}' (-1)^\nu \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\beta-\nu)\,\Gamma(\alpha+\nu+1)}\right) a_0 + \frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)}\, b_0 \\
&+ (-1)^h \sum_{n+\varkappa>0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha+h, \beta-h, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x} \\
&+ (-1)^h \frac{\Gamma(\alpha+h)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-h)} \sum_{n+\varkappa<0}{}' a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\alpha+h, \beta-h, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\Lambda^h f(z, w) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)}\, a_0\, u(y, \alpha+\beta) \\
&\quad + \left(\sum_{\nu=0}^{h-1} (-1)^{h-\nu} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha-\nu)\,\Gamma(\beta+\nu+1)}\right) a_0 + (-1)^h \frac{\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\beta)}\, b_0 \\
&\quad + \frac{\Gamma(\beta+h)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha-h)} \sum_{n+\varkappa>0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\, \alpha-h,\, \beta+h,\, 1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x} \\
&\quad + \sum_{n+\varkappa<0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}\, y;\, \alpha-h,\, \beta+h,\, -1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q} x}.
\end{aligned} \tag{62}
$$

Die Γ-Quotienten $\frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)}$, $\frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)}$ usw. stellen in diesen Formeln jeweils die Werte der analytischen Funktionen $\frac{\Gamma(z+h)}{\Gamma(z)}$, $\frac{\Gamma(z+h)}{\Gamma(z+\nu+1)}$ usw. an der Stelle $z=\alpha$ dar.

Mit Hilfe der zweiten Entwicklung in Satz 4 kann nun auch die Wirkung des Operators Θ auf die FOURIER-Reihen bestimmt werden. Man braucht nur auf $\Lambda^k f(z, w)$ mit $k=\alpha-\beta$ den Operator $\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,\mathrm{X}$ anzuwenden. Der Einfachheit halber setzen wir $\varkappa = 0$.

Satz 5: *Es sei* $k=\alpha-\beta$ *ganz rational* $\geqq 0$, $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ *und*

$$
\begin{aligned}
f(z, w) &= a_0\, u(y, \alpha+\beta) + b_0 + \\
&\quad + \sum_{n\neq 0} a_n\, W\left(\frac{2\pi|n|}{Q}\, y;\, \alpha,\, \beta,\, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x}
\end{aligned} \tag{63}
$$

die FOURIER-*Reihe einer periodischen Funktion aus* $\{\alpha, \beta\}$. *Dann ist*

$$
\begin{aligned}
&\Theta f(z, w) = \\
&a_0\, u(y, \alpha+\beta) + \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{(k-\nu)} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-\nu)\,\Gamma(\beta+\nu+1)}\right) a_0 + (-1)^k b_0 \\
&+ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, W\left(\frac{2\pi n}{Q}\, y;\, \alpha,\, \beta,\, 1\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} + \\
&+ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, W\left(\frac{2\pi n}{Q}\, y;\, \alpha,\, \beta,\, -1\right) e^{-\frac{2\pi i n}{Q} x}.
\end{aligned} \tag{64}
$$

Hierin ist insbesondere

$$
\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-\nu} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-\nu)\,\Gamma(\beta+\nu+1)} = 0 \qquad \text{für } k \equiv 0\,(2), \tag{65}
$$

was man direkt bestätigen oder auch aus $\Theta^2 = 1$ folgern kann.

§ 3. Spezielle Typen automorpher Formen.

Die Reduktionsformeln von Satz 4 sollen hier speziell auf solche Formenscharen $\{\mathsf{G};\, \alpha, \beta, v\}$ angewendet werden, die eine Beziehung zu den klassischen automorphen Formen oder den Wellenformen von der Dimension 0 oder -1 aufweisen. Es wird also vorausgesetzt, daß eine der Zahlen α, β, $\alpha-\beta$ ganz rational ist. In diesen Fällen lassen sich die WHITTAKERschen Funktionen auf

Besselsche Funktionen und Exponentialfunktionen zurückführen. Das soll zunächst gezeigt werden. Nach Fußnote [5]), S. 118 ist

$$W_{l,m}(y) = \frac{y^l e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}-l\right)} \int_0^\infty t^{m-l-\frac{1}{2}} e^{-t} \left(1+\frac{t}{y}\right)^{m+l-\frac{1}{2}} dt \tag{66}$$

für $y > 0$, $\Re e\,(m + 1/2 - l) > 0$. Mit $k = \alpha - \beta$ wird also

$$\begin{aligned} W(y;\alpha,\beta,\varepsilon) &= y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{k\varepsilon}{2},\,\frac{\alpha+\beta-1}{2}}(2y) \\ &= \frac{2^{\frac{k\varepsilon}{2}} y^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} e^{-y}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}-1} e^{-t}\left(1+\frac{t}{2y}\right)^{\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}-1} dt. \end{aligned} \tag{67}$$

Die Substitution $t = y\,(u-1)$ führt auf

$$\begin{aligned} W(y;\alpha,\beta,\varepsilon) &= \frac{2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_1^\infty (u-1)^{\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}-1} (u+1)^{\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}-1} e^{-yu}\, du \\ &= \frac{2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{\varepsilon y}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta-k\varepsilon}{2}\right)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} (u+\varepsilon)^k e^{-y(u+\varepsilon)}\, du. \end{aligned} \tag{68}$$

Ist k ganz rational $\geqq 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} W(y;\beta+k,\beta,\varepsilon) &= (-1)^k \frac{2^{1-\beta-\frac{k}{2}} e^{\varepsilon y}}{\Gamma\left(\beta+\frac{k(1-\varepsilon)}{2}\right)} \frac{d^k}{dy^k} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} e^{-y(u+\varepsilon)}\, du \\ &= (-1)^k\, 2^{\frac{1-k}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{k(1-\varepsilon)}{2}\right)} e^{\varepsilon y} \frac{d^k}{dy^k} e^{-\varepsilon y} y^{\frac{1}{2}-\beta} K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) \end{aligned} \tag{69}$$

mit

$$K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}y\right)^{\beta-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\beta-1} e^{-yu}\, du \;[\text{s.}^{12}),\ 6\cdot 3], \tag{70}$$

für $k = 0, 1$ also

$$W(y;\beta,\beta,\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, y^{\frac{1}{2}-\beta} K_{\beta-\frac{1}{2}}(y), \tag{71}$$

$$W(y;1+\beta,\beta,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-\beta}\left(K_{\beta+\frac{1}{2}}(y) + \varepsilon K_{\beta-\frac{1}{2}}(y)\right), \tag{72}$$

wobei

$$y K'_{\beta-\frac{1}{2}}(y) + \left(\frac{1}{2}-\beta\right) K_{\beta-\frac{1}{2}}(y) = -y K_{\beta+\frac{1}{2}}(y) \;[\text{s.}^{12}),\ 3\cdot 71]$$

[12]) Watson, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.

berücksichtigt wurde. Da stets

$$W_{l,m}(y) = W_{l,-m}(y)$$

ist, so gilt für $y > 0$, $\Re(\alpha + \beta + k\varepsilon) < 2$ auch

$$W(y;\alpha,\beta,\varepsilon) = y^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} W_{\frac{k\varepsilon}{2},\frac{1-\alpha-\beta}{2}}(2y)$$

(73)
$$= \frac{2^{\frac{k\varepsilon}{2}} y^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} e^{-y}}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}\right)} \int_0^\infty t^{-\frac{\alpha+\beta+k\varepsilon}{2}} e^{-t}\left(1+\frac{t}{2y}\right)^{\frac{k\varepsilon-\alpha-\beta}{2}} dt.$$

Das Integral hat für $\beta = 0$, $\varepsilon = 1$, $\Re\,\alpha < 1$ bekanntlich den Wert $\Gamma(1-\alpha)$. Allgemein ergibt sich damit

(74)
$$W(y;\alpha,0,1) = W(y;0,\alpha,-1) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{-y}.$$

Wir reduzieren nun die Formenscharen $\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$, für welche α oder β ganz rational ist. Da der Operator X die gegebene Schar nach (59) auf elementare Art umkehrbar eindeutig auf die Schar $\{\mathsf{G}^*;\beta,\alpha,v^*\}$ abbildet, brauchen wir nur den Fall ganz rationaler β darzustellen. Dabei berücksichtigen wir (74) und Satz 2 4.

Satz 6: *Es sei β reell, $h = |\beta|$ eine natürliche Zahl und $f(z,w)$ eine automorphe Form aus $\{\mathsf{G};\alpha,\beta,v\}$, die eine* FOURIER-*Entwicklung*

(75)
$$\begin{aligned} f(z,w) &= a_0\,u(y,\alpha+\beta) + b_0 + \\ &+ \sum_{n+\varkappa\neq 0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}(n+\varkappa)\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}x} \end{aligned}$$

gestatte.

1. Ist $\beta > 0$, so stellt

(76)
$$\begin{aligned} \mathsf{K}^h f(z,w) = \left(\sum_{\nu=0}^{h-1}(-1)^\nu \frac{\Gamma(h)\,\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(h-\nu)\,\Gamma(\alpha+\nu+1)}\right) a_0 + \frac{\Gamma(\alpha+h)}{\Gamma(\alpha)} b_0 + \\ + (-1)^h\, 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{n+\varkappa>0} a_{n+\varkappa}\, e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}z} \end{aligned}$$

eine automorphe Form der Dimension $-(\alpha+\beta)$ zur Gruppe G und zum Multiplikatorsystem v im klassischen Sinne dar.

2. Ist $\beta < 0$, so wird

(77)
$$\begin{aligned} \Lambda^h f(z,w) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)} a_0\,u(y,\alpha+\beta) \\ &- \left(\sum_{\nu=0}^{h-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(h-\nu)}{\Gamma(\alpha-\nu)}\right) a_0 + \Gamma(h+1)\,b_0 \\ &+ (-1)^h \frac{\Gamma(h+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-h)}\, 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{n+\varkappa>0} a_{n+\varkappa}\, e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}z} \\ &+ \sum_{n+\varkappa<0} a_{n+\varkappa}\, W\left(\frac{2\pi|n+\varkappa|}{Q}y;\alpha+\beta,0,-1\right) e^{\frac{2\pi i(n+\varkappa)}{Q}\bar{z}}. \end{aligned}$$

Die Funktion $W(y;\alpha,0,-1)$ hängt mit der „unvollständigen Gammafunktion“ [s.[5]), S. 125] zusammen, ist also keine elementare Transzendente.

Folglich wird die ausgeführte Reduktion im allgemeinen keine gewöhnliche automorphe Form ergeben, falls $\beta < 0$ ist.

Die Behandlung der Fälle $\alpha - \beta \equiv 0\,(1)$ erfolgt mit Hilfe der Sätze 2, 4 und der Formeln (71), (72). Wegen der Gleichwertigkeit von α und β darf $\alpha - \beta \geqq 0$ angenommen werden.

Satz 7: *Es sei $\alpha - \beta$ ganz rational $\geqq 0$. Die automorphe Form $f(z, w) \subset \{\mathsf{G}; \alpha, \beta, v\}$ gestatte eine* FOURIER-*Entwicklung von der in Satz 6 angegebenen Art. Wird $h = \left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$ gesetzt, so stellt*

$$y^{\beta + h} \Lambda^h f(z, w)$$

eine automorphe Wellenform zur Gruppe G, *Dimension* $2h + \beta - d$, *Wellenzahl* $\beta + h$ *und zum Multiplikatorsystem* v *dar. Es gilt*

$$y^{\beta + h} \Lambda^h f(z, w) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - h)}\, a_0\, u(y, \alpha + \beta)\, y^{\beta + h} + \tag{78}$$

$$+ \left\{ \left(\sum_{\nu = 0}^{h-1} (-1)^{h - \nu} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta + h)}{\Gamma(\alpha - \nu)\,\Gamma(\beta + \nu + 1)} \right) a_0 + (-1)^h \frac{\Gamma(\beta + h)}{\Gamma(\beta)}\, b_0 \right\} y^{\beta + h} + g(z, w),$$

wobei

1. für $\alpha - \beta \equiv 0\,(2)$: $g(z, w) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^{\beta + h - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta + 2h)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n + \varkappa > 0}{}' |n + \varkappa|^{\frac{1}{2} - \beta - h} a_{n + \varkappa} \times$$

$$\times\, y^{\frac{1}{2}} K_{\beta + h - \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) e^{\frac{2\pi i (n + \varkappa)}{Q} x}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^{\beta + h - \frac{1}{2}} \sum_{n + \varkappa < 0}{}' |n + \varkappa|^{\frac{1}{2} - \beta - h} a_{n + \varkappa} \times$$

$$\times\, y^{\frac{1}{2}} K_{\beta + h - \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) e^{\frac{2\pi i (n + \varkappa)}{Q} x},$$

2. für $\alpha - \beta \equiv 1\,(2)$: $g(z, w) =$

$$= \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^{\beta + h - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta + h)\,\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha - h)} \sum_{n + \varkappa > 0}{}' |n + \varkappa|^{\frac{1}{2} - \beta - h} a_{n + \varkappa} \times$$

$$\times\, y^{\frac{1}{2}} \left(K_{\beta + h + \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) + K_{\beta + h - \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) \right) e^{\frac{2\pi i (n + \varkappa)}{Q} x}$$

$$+ \left(\frac{Q}{2\pi}\right)^{\beta + h - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\beta + h)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha - h)} \sum_{n + \varkappa < 0}{}' |n + \varkappa|^{\frac{1}{2} - \beta - h} a_{n + \varkappa} \times$$

$$\times\, y^{\frac{1}{2}} \left(K_{\beta + h + \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) - K_{\beta + h - \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi\,|n + \varkappa|}{Q}\, y \right) \right) e^{\frac{2\pi i (n + \varkappa)}{Q} x}.$$

§ 4. Automorphe Formen und DIRICHLET-Reihen.

Auf Grund der bekannten Potenzreihenentwicklungen der WHITTAKERschen Funktion [s.[5]), S. 116] ist leicht festzustellen, daß

$$W(y; \alpha, \beta, 1) = O(y^{-K}) \qquad \text{für reelles } y \to 0 \tag{79}$$

und gewisse Konstanten K gilt. Es reicht z. B., $K > \Re\,\frac{\alpha + \beta}{2} + \left|\Re\,\frac{\alpha + \beta}{2}\right| - 1$ zu wählen. Nach (55) ist außerdem

$$W(y; \alpha, \beta, 1) = O(y^{-\beta} e^{-y}) \qquad \text{für reelles } y \to \infty. \tag{80}$$

Die MELLIN-Transformierte von $W(y;\alpha,\beta,1)$:

(81) $$\Gamma(s;\alpha,\beta)=\int_0^\infty W(y;\alpha,\beta,1)\,y^{s-1}\,dy$$

ist also in der Halbebene $\Re s>K$ regulär. Mit Hilfe der Darstellung (68) ergibt sich

$$\Gamma(s;\alpha,\beta)=2^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta)}\int_1^\infty (u-1)^{\beta-1}(u+1)^{\alpha-1}u^{-s}\,du\,.$$

Die Substitution $u=(1+v)(1-v)^{-1}$ führt auf

$$\Gamma(s;\alpha,\beta)=2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{s-\alpha-\beta}(1+v)^{-s}\,dv\,.$$

Damit ist ein Zusammenhang mit der hypergeometrischen Funktion

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{c-b-1}(1-vz)^{-a}\,dv$$

hergestellt. Es folgt nun

$$\Gamma(s;\alpha,\beta)=2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)}\,F(s,\beta;s+1-\alpha;-1).$$

Beachten wir noch

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-b}\,F\left(b,c-a;c;\frac{z}{z-1}\right),$$

so ergibt sich schließlich

(82) $$\Gamma(s;a,\beta)=2^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+1-\alpha)}\,F\left(\beta,1-\alpha;s+1-\alpha;\frac{1}{2}\right),$$

woraus erhellt, daß $\Gamma(s;\alpha,\beta)$ eine meromorphe Funktion von s ist, die nur in den Stellen $\alpha+\beta-n$ und $1-n$ ($n=$ natürliche Zahl) Pole haben kann.

Wir betrachten die Sonderfälle, die den speziellen Formenscharen in § 3 entsprechen. Aus (82) folgt unmittelbar

(83) $$\Gamma(s;\alpha,0)=2^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(s)\,.$$

Im Falle $\beta=\alpha$ liefert (82) mit

$$F\left(a,1-a;c;\frac{1}{2}\right)=\frac{2^{1-c}\sqrt{\pi}\,\Gamma(c)}{\Gamma\left(\frac{c+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{c+1-a}{2}\right)}$$

zunächst

$$\Gamma(s;\alpha,\alpha)=2^{\alpha-s}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1-2\alpha)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1-\alpha\right)}\,.$$

Die LEGENDREsche Relation

$$\Gamma(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,2^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ergibt dann

$$\Gamma(s;\,\alpha,\,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{s-\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \alpha\right). \tag{84}$$

Eliminiert man aus (72) mit Hilfe von (71) die Bessel-Funktionen, so erhält man die Relation

$$W(y;\,1+\beta,\,\beta,\,\varepsilon) = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\beta + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)} \left(y\, W(y;\,\beta+1,\,\beta+1,\,1) + \varepsilon\, W(y;\,\beta,\,\beta,\,1)\right)$$

und damit

$$\int_0^\infty W(y;\,1+\beta,\,\beta,\,\varepsilon)\, y^{s-1}\, dy$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\beta + \frac{1-\varepsilon}{2}\right)} \left(\Gamma(s+1;\,\beta+1,\,\beta+1) + \varepsilon\, \Gamma(s;\,\beta,\,\beta)\right).$$

Für die Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung sind die Darstellungen (84) einzutragen. Entsprechend den Werten $\varepsilon = \pm 1$ resultiert

$$\begin{aligned} &\Gamma(s;\,\beta+1,\,\beta) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 2^{s-\beta-1} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \beta\right) + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \beta\right)\right), \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma(s;\,\beta,\,\beta+1) = \\ &\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\, 2^{s-\beta-1} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \beta\right) - \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \beta\right)\right). \end{aligned} \tag{86}$$

Im folgenden benötigen wir ein einfaches Prinzip, um die Identität zweier Funktionen aus $\{\alpha,\,\beta\}$ festzustellen. Diesem Zweck dient

Hilfssatz 9: *Eine Funktion $g(x,\,y) \subset \{\alpha,\,\beta\}$ verschwindet genau dann identisch, wenn*

$$g(0,\,y) = \left(\frac{\partial g(x,\,y)}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

ist.

Beweis: Wir gehen mit dem Potenzreihenansatz

$$g(x,\,y) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' g_n(y)\, x^n$$

in die Differentialgleichung, der $g(x,\,y)$ genügt, und erhalten für die Funktionen $g_n(y)$ die Rekursionsformel

$$(n+2)(n+1)\, y\, g_{n+2} + (\beta - \alpha)\, i\, (n+1)\, g_{n+1} + y\, g_n'' + (\alpha + \beta)\, g_n' = 0,$$

aus der die Behauptung folgt.

Wir wenden uns nun dem Hauptproblem zu.

Satz 8: *Es seien fest gegeben: zwei reelle oder komplexe Zahlen α, β, eine reelle Zahl $\lambda > 0$, eine natürliche Zahl q, eine N-reihige quadratische Matrix $(c_{\mu\nu})$, deren Quadrat gleich der Einheitsmatrix ist, und ganz rationale Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$. Die Anordnung sei so gewählt, daß $b_\mu \equiv 0\ (q)$ für $\mu \leqq t$ und $b_\mu \not\equiv 0\ (q)$ für $\mu > t$ gilt. Schließlich werde vorausgesetzt, daß das lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu}\, b_0^{(\nu)} = b_0^{(\mu)},\ b_0^{(\iota)} = 0 \quad (1 \leqq \mu \leqq N,\ t < \iota \leqq N)$$

nur trivial lösbar ist, falls $\alpha = \beta = 0$ oder 1 und $t > 0$ ist.

Wir betrachten nun Funktionensysteme

I $$f_1(z,w),\ f_2(z,w),\ \ldots,\ f_N(z,w),$$

die folgenden Bedingungen genügen:

1. $$f_\nu(z,w) \subset \{\alpha, \beta\} \qquad (1 \leqq \nu \leqq N).$$

2. Gleichmäßig in x ist

$$f_\nu(z,w) = O(y^{\varkappa_1}) \text{ für } y \to \infty,\ f_\nu(z,w) = O(y^{-\varkappa_2}) \text{ für } y \to 0\ (1 \leqq \nu \leqq N),$$

wobei $\varkappa_1, \varkappa_2$ *positive Konstanten bezeichnen.* x, y *sind hier reell anzunehmen, außerdem* $y > 0$.

3. $$f_\nu\left(z + \frac{\lambda}{q}, w + \frac{\lambda}{q}\right) = e^{\frac{2\pi i b_\nu}{q}} f_\nu(z,w) \qquad (1 \leqq \nu \leqq N).$$

4. $$f_\mu\left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{w}\right) = (-iz)^\alpha (iw)^\beta \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} f_\nu(z,w) \qquad (1 \leqq \mu \leqq N).$$

Jedem Funktionensystem dieser Art läßt sich mit Hilfe der MELLIN-*Transformation ein Funktionensystem*

II $$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_N(s);\ \psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots,\ \psi_N(s)$$

mit folgenden Eigenschaften umkehrbar eindeutig zuordnen:

1. Die Funktionen $\varphi_\nu(s)$, $\psi_\nu(s)$ *sind meromorph und lassen sich in gewissen Halbebenen in* DIRICHLET-*Reihen der Art*

$$\varphi_\nu(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_\nu(q) \\ n > 0}} \frac{a_n^{(\nu)}}{n^s},\quad \psi_\nu(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_\nu(q) \\ n < 0}} \frac{a_n^{(\nu)}}{|n|^s} \qquad (1 \leqq \nu \leqq N) \tag{87}$$

entwickeln.

2. Wird

$$\xi_\nu(s) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \alpha, \beta)\, \varphi_\nu(s) + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \beta, \alpha)\, \psi_\nu(s),$$

$$\begin{aligned}\eta_\nu(s) = {} & \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left(\Gamma(s+1; \alpha, \beta) - \frac{\alpha-\beta}{2} \Gamma(s; \alpha, \beta)\right) \varphi_\nu(s) \\ & - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \left(\Gamma(s+1; \beta, \alpha) - \frac{\beta-\alpha}{2} \Gamma(s; \beta, \alpha)\right) \psi_\nu(s)\end{aligned}$$

gesetzt, so sind

$$\xi_\mu(s) - \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} - \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} + \frac{b_0^{(\mu)}}{s} + \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)}$$

und

$$\begin{aligned}\eta_\mu(s) + \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi} \Bigg\{ & \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} - \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} - \frac{b_0^{(\mu)}}{s} + \\ & + \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)} \Bigg\}\end{aligned}$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten $a_0^{(\mu)}$ *und* $b_0^{(\mu)}$ *ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht* $(1 \leqq \mu \leqq N)$.

3. Die Konstanten $a_0^{(\mu)}$, $b_0^{(\mu)}$ *genügen den Bedingungen*

$$a_0^{(\mu)} = b_0^{(\mu)} = 0 \qquad (t < \mu \leqq N).$$

Γ

4. Die Funktionen $\varphi_\mu(s)$, $\psi_\mu(s)$ genügen den Funktionalgleichungen

$$\xi_\mu(\alpha+\beta-s)=\sum_{\nu=1}^{N}c_{\mu\nu}\,\xi_\nu(s),\quad \eta_\mu(\alpha+\beta-s)=-\sum_{\nu=1}^{N}c_{\mu\nu}\,\eta_\nu(s)\quad (1\leq\mu\leq N).$$

Beweis: Eine etwas längere aber elementare Rechnung zeigt, daß durch die Einschränkungen, die im Falle $\alpha=\beta=0$ oder 1 gemacht worden sind, gerade diejenigen Fälle ausgeschieden worden sind, in welchen die Konstanten $a_0^{(\mu)}$, $b_0^{(\mu)}$ durch die Forderungen II, 2. und 3. nicht mehr eindeutig bestimmt sind.

Wir gehen von einem Funktionensystem I aus. Den Bedingungen I., 2. und 3. zufolge gibt es FOURIER-Entwicklungen der Art

$$f_\nu(z,w)=a_0^{(\nu)}\,u(y,\alpha+\beta)+b_0^{(\nu)}+\sum_{\substack{n\equiv b_\nu(q)\\ n\neq 0}}a_n^{(\nu)}\,W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}n\right)e^{\frac{2\pi i n}{\lambda}x}.$$

Da der Multiplikator von $f_\nu(z,w)$ $(\nu>t)$ bezüglich der Translation $x\to x+\frac{\lambda}{q}$ von 1 verschieden ist, so genügen die Koeffizienten $a_0^{(\mu)}$, $b_0^{(\mu)}$ jedenfalls den Bedingungen II, 3. Setzt man in der Koeffizientenformel

$$a_n^{(\nu)}\,W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}n\right)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f_\nu(z,w)\,e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda}x}\,dx$$

speziell $y=\frac{c}{|n|}$ (c geeignete positive Konstante), so erhält man wegen I, 2.:

$$a_n^{(\nu)}=O\left(|n|^{\varkappa_2}\right)\qquad\text{für } |n|\to\infty.$$

Die mit den Koeffizienten $a_n^{(\nu)}$ gebildeten DIRICHLET-Reihen (87) konvergieren also in gewissen Halbebenen und stellen dort analytische Funktionen dar.

Zur Abkürzung werde nun

$$F_\nu(y)=\sum_{\substack{n\equiv b_\nu(q)\\ n\neq 0}}a_n^{(\nu)}W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}n\right),\tag{88}$$

$$G_\nu(y)=\sum_{\substack{n\equiv b_\nu(q)\\ n\neq 0}}n\,a_n^{(\nu)}y\,W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn}n\right),\tag{89}$$

$$H_\nu(y)=G_\nu(y)-\lambda\frac{\alpha-\beta}{4\pi}F_\nu(y),\tag{90}$$

$$F_\nu^*(y)=a_0^{(\nu)}\,u(y,\alpha+\beta)+b_0^{(\nu)}+F_\nu(y),\tag{91}$$

$$H_\nu^*(y)=G_\nu(y)-\lambda\frac{\alpha-\beta}{4\pi}F_\nu^*(y)\tag{92}$$

gesetzt. Nach Hilfssatz 9 ist das System der Transformationsformeln I, 4. gleichwertig mit den Gleichungen

$$f_\mu\left(\frac{i}{y},-\frac{i}{y}\right)=y^{\alpha+\beta}\sum_{\nu=1}^{N}c_{\mu\nu}\,f_\nu(iy,-iy),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}f_\mu\left(-\frac{1}{z},-\frac{1}{w}\right)(-iz)^{-\alpha}(iw)^{-\beta}\right)_{x=0}=\sum_{\nu=1}^{N}c_{\mu\nu}\left(\frac{\partial f_\nu(z,w)}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, kann hierfür

$$(93)\qquad \begin{aligned} F_\mu^*\left(\frac{1}{y}\right) &= \quad y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} F_\nu^*(y), \\ H_\mu^*\left(\frac{1}{y}\right) &= -y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} H_\nu^*(y) \end{aligned}$$

geschrieben werden oder, wenn man auf die ungesternten Funktionen zurückgeht,

$$\begin{aligned} F_\mu\left(\frac{1}{y}\right) &= \quad y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} F_\nu(y) + \\ &\quad + y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu}\left(a_0^{(\nu)} u(y, \alpha+\beta) + b_0^{(\nu)}\right) - a_0^{(\mu)} u\left(\frac{1}{y}, \alpha+\beta\right) - b_0^{(\mu)}, \\ (94)\quad H_\mu\left(\frac{1}{y}\right) &= -y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} H_\nu(y) + \\ &\quad + \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi}\left\{y^{\alpha+\beta} \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu}\left(a_0^{(\nu)} u(y, \alpha+\beta) + b_0^{(\nu)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + a_0^{(\mu)} u\left(\frac{1}{y}, \alpha+\beta\right) + b_0^{(\mu)}\right\}. \end{aligned}$$

In bekannter Weise ist nun

$$(95)\qquad \xi_\mu(s) = \int_0^\infty F_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy = \int_1^\infty F_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy + \int_1^\infty F_\mu\left(\frac{1}{y}\right) y^{-s-1}\, dy,$$

$$(96)\qquad \eta_\mu(s) = \int_0^\infty H_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy = \int_1^\infty H_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy + \int_1^\infty H_\mu\left(\frac{1}{y}\right) y^{-s-1}\, dy$$

zu bilden. Berücksichtigt man hier die Transformationsformeln (94), so ergibt sich nach einigen elementaren Integrationen

$$(97)\qquad \begin{aligned} \xi_\mu(s) &= \int_1^\infty F_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy + \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \int_1^\infty F_\nu(y)\, y^{\alpha+\beta-s-1}\, dy + \\ &\quad + \frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} + \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} - \frac{b_0^{(\mu)}}{s} - \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)}, \end{aligned}$$

$$(98)\qquad \begin{aligned} \eta_\mu(s) &= \int_1^\infty H_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy - \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \int_1^\infty H_\nu(y)\, y^{\alpha+\beta-s-1}\, dy + \\ &\quad + \lambda \frac{\alpha-\beta}{4\pi}\left\{\frac{a_0^{(\mu)}}{s(s+1-\alpha-\beta)} + \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \frac{a_0^{(\nu)}}{(1-s)(\alpha+\beta-s)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_0^{(\mu)}}{s} - \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu} \frac{b_0^{(\nu)}}{(\alpha+\beta-s)}\right\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (88), (89) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \xi_\mu(s) &= \sum_{\substack{n \equiv b_\mu(q) \\ n \neq 0}} a_n^{(\mu)} \int_0^\infty W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) y^{s-1}\, dy \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \sum_{\substack{n \equiv b_\mu(q) \\ n \neq 0}} \frac{a_n^{(\mu)}}{|n|^s} \int_0^\infty W(y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n)\, y^{s-1}\, dy \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \alpha, \beta)\, \varphi_\mu(s) + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^s \Gamma(s; \beta, \alpha)\, \psi_\mu(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\eta_\mu(s) &= \int_0^\infty G_\mu(y)\, y^{s-1}\, dy - \lambda\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\,\xi_\mu(s)\\
&= \sum_{\substack{n\equiv b_\mu(q)\\ n\neq 0}}{}' n\, a_n \int_0^\infty y\, W\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\, y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn} n\right) y^{s-1}\, dy - \lambda\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\,\xi_\mu(s)\\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \sum_{\substack{n\equiv b_\mu(q)\\ n\neq 0}}{}' \frac{n\, a_n}{|n|^{s+1}} \int_0^\infty y\, W(y;\alpha,\beta,\operatorname{sgn} n)\, y^{s-1}\, dy - \lambda\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\,\xi_\mu(s)\\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1;\alpha,\beta)\,\varphi_\mu(s) + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1;\beta,\alpha)\,\psi_\mu(s) - \lambda\,\frac{\alpha-\beta}{4\pi}\,\xi_\mu(s)\\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1}\left(\Gamma(s+1;\alpha,\beta) - \frac{\alpha-\beta}{2}\,\Gamma(s;\alpha,\beta)\right)\varphi_\mu(s)\\
&\quad + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1}\left(\Gamma(s+1;\beta,\alpha) - \frac{\beta-\alpha}{2}\,\Gamma(s;\beta,\alpha)\right)\psi_\mu(s).
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\xi_\mu(s)$, $\eta_\mu(s)$ haben also die in II, 2. angegebene Bedeutung. Die Bedingungen II, 2. und 4. können nun auf Grund der Darstellungen (97), (98) unmittelbar geprüft werden. Satz 8 ist damit in einer Richtung bewiesen. Die Umkehrung ergibt sich in der üblichen Weise, wenn man von der zu (81) inversen Transformationsformel

$$W(y;\alpha,\beta,1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} y^{-s}\,\Gamma(s;\alpha,\beta)\, ds \tag{99}$$

gehörigen Gebrauch macht.

Hinsichtlich der speziellen in § 3 behandelten Formentypen sei noch folgendes bemerkt:

1. Es mögen gewöhnliche automorphe Formen zugrunde liegen. In diesem von Hecke[6]) diskutierten Fall ist also $\beta = 0$ und $\psi_\nu(s) = 0$ für alle ν. Folglich wird

$$\begin{aligned}
\xi_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s} \Gamma(s;\alpha,0)\,\varphi_\nu(s) = 2^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s}\Gamma(s)\,\varphi_\nu(s),\\
\eta_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1}\left(\Gamma(s+1;\alpha,0) - \frac{\alpha}{2}\,\Gamma(s;\alpha,0)\right)\varphi_\nu(s)\\
&= 2^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1}\left(s-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(s)\,\varphi_\nu(s).
\end{aligned}\tag{100}$$

Die Funktionalgleichungssysteme II, 4. besagen also dasselbe.

2. Die Formen seien vom Typus der automorphen Wellenfunktionen. Dann ist $\alpha = \beta$, mithin

$$\begin{aligned}
\xi_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s} \Gamma(s;\alpha,\alpha)\,(\varphi_\nu(s) + \psi_\nu(s))\\
&= \frac{2^{-\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\alpha\right)(\varphi_\nu(s) + \psi_\nu(s)),\\
\eta_\nu(s) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s+1} \Gamma(s+1;\alpha,\alpha)\,(\varphi_\nu(s) - \psi_\nu(s))\\
&= \frac{2^{-\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1-\alpha\right)(\varphi_\nu(s) - \psi_\nu(s)).
\end{aligned}\tag{101}$$

Der Funktionalgleichungstypus ist also mit dem in [7]) angegebenen vergleichbar.

3. Sind die Formen vom Typus der automorphen Wellenformen zur Dimension -1, ist also $\alpha = \beta + 1$ und $\beta \neq 0$, so ist eine etwas längere Umrechnung erforderlich, um zu einem Funktionalgleichungstypus zu gelangen, der mit dem in [3]) diskutierten vergleichbar ist. Wird

$$(102)\qquad \begin{aligned} \xi_\nu^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\beta\right)(\beta\,\varphi_\nu(s)+\psi_\nu(s)),\\ \eta_\nu^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\beta\right)(\beta\,\varphi_\nu(s)-\psi_\nu(s)) \end{aligned}$$

gesetzt, so lassen sich mit Hilfe von (85) und (86) die Beziehungen

$$(103)\qquad \begin{aligned} \eta_\nu(s) - \frac{\lambda}{2\pi}\left(s-\beta-\frac{1}{2}\right)\xi_\nu(s) &= \frac{2^{-\beta-2}}{\sqrt{2\pi}}(\eta_\nu^*(s)-\xi_\nu^*(s)),\\ \beta\frac{\lambda}{2\pi}\xi_\nu(s) &= \frac{2^{-\beta-2}}{\sqrt{2\pi}}(\eta_\nu^*(s)+\xi_\nu^*(s)) \end{aligned}$$

ableiten. Man erkennt nun ohne weiteres, daß die Funktionalgleichungen II, 4. mit dem System

$$(104)\qquad \eta_\mu^*(2\beta+1-s) = \sum_{\nu=1}^{N}{}' c_{\mu\nu}\,\xi_\nu^*(s) \qquad (1 \leqq \nu \leqq N)$$

äquivalent sind.

§ 5. Die Theorie der T_n-Operatoren.

Die Verallgemeinerung der HECKEschen Operatorentheorie auf die Formenscharen

$$\mathfrak{F}(Q,\alpha,\beta) = \{\mathsf{M}(Q);\,\alpha,\beta,1\}$$

bietet keine besonderen Schwierigkeiten, so daß wir uns auf einige grundsätzliche Bemerkungen und eine kurze Skizzierung der wesentlichen Gedanken beschränken können. Das Interesse ist hier auf diejenigen Formenscharen $\mathfrak{F}(Q,\alpha,\beta)$ gerichtet, die außer EISENSTEIN-Reihen noch sog. Spitzenformen enthalten. Das sind solche Formen, die in den parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereichs zur Gruppe $\mathsf{M}(Q)$ verschwinden. Besteht nämlich $\mathfrak{F}(Q,\alpha,\beta)$ nur aus EISENSTEIN-Reihen, so sind die den Formen entsprechenden DIRICHLET-Reihen mit L-Reihenprodukten der Art $(t_1 t_2)^{-1} L(s,\chi_1)\,L(s-\alpha-\beta+1,\chi_2)$ linear äquivalent. Die Frage nach den EULER-Produkten ist damit bereits beantwortet. Hinsichtlich der Existenz von Spitzenformen hat man nur lückenhafte Kenntnisse. Man weiß nur, daß die „analytischen Formenscharen" [in $\mathfrak{F}(Q,\alpha,0)$ gelegen] im allgemeinen Spitzenformen enthalten und daß gewisse andere Scharen, auf die man von seiten der indefiniten quadratischen Formen geführt wird [2]), sicher keine enthalten.

Damit Operatoren sinnvoll definiert werden können, muß $k=\alpha-\beta$ ganz rational vorausgesetzt werden; es sei außerdem $k \geqq 0$ und $\alpha+\beta>2$. Dann sind die EISENSTEIN-Reihen

$$(105)\qquad E_k(z,w;\beta,(a_1,a_2),Q) = \sum_{\substack{m_\nu \equiv a_\nu(Q)\\ (m_1,m_2)\neq(0,0)}}{}' (m_1 z+m_2)^{-\alpha}(m_1 w+m_2)^{-\beta}$$

absolut konvergent und $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$ läßt sich in die von den EISENSTEIN-Reihen und den Spitzenformen erzeugten Teilscharen $\mathfrak{E}(Q, \alpha, \beta)$ bzw. $\mathfrak{S}(Q, \alpha, \beta)$ zerlegen:

(106) $$\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta) = \mathfrak{E}(Q, \alpha, \beta) + \mathfrak{S}(Q, \alpha, \beta).$$

Wir setzen $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, wobei n eine zu Q teilerfremde natürliche Zahl sei, und bezeichnen mit V_n ein volles System von Substitutionen n-ter Ordnung $S \equiv S_n \pmod{Q}$, die sich nicht um einen linken Faktor aus $\mathsf{M} = \mathsf{M}(1)$ unterscheiden. Sodann wird $T(n) = T_n$ durch

(107) $$f \mid T_n = n^{\alpha+\beta-1} \sum_{S \subset \mathsf{V}_n} f \mid S \qquad \text{für } f \subset \mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$$

erklärt. f heißt eine Form zum Teiler t, wenn in der FOURIER-Entwicklung von f nur solche Exponenten vorkommen, die mit Q den größten gemeinsamen Teiler t haben:

(108) $$f(z, w) = \\ = a'(0)\, y^{1-\alpha-\beta} + a''(0) + \sum_{\left(n, \frac{Q}{t}\right)=1} a(n)\, W\left(\frac{2\pi |n| t}{Q}\, y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x}.$$

Für die lineare Schar dieser Formen wird ein Operator T_q^t, wobei sich q aus Primteilern von Q zusammensetzt, durch

(109) $$f \mid T_q^t = q^{\alpha+\beta-1} \sum_{l \bmod Q} f \left| \begin{pmatrix} 1 & l\,t_1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right. \qquad (Q = t\, t_1)$$

erklärt. Es genügt $(q, t_1) = 1$ anzunehmen, da T_q^t im Falle $(q, t_1) > 1$ jede Form zum Teiler t in 0 überführt. Eine beliebige natürliche Zahl m kann eindeutig in $m = n\, q$ zerlegt werden, wenn n den größten zu Q teilerfremden Faktor bezeichnet. Wir setzen dann

(110) $$T_m^t = T_n\, T_q^t.$$

Die Substitutionen

(111) $$R_a \subset \mathsf{M} \quad \text{mit } R_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{Q}, \qquad (a, Q) = 1$$

definieren eine endliche Gruppe von Operatoren für die Schar $\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta)$. Ist

(112) $$f \mid R_a = \chi(a)\, f \qquad \text{für } (a, Q) = 1,$$

so heißt f eine Form zum Charakter χ. $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ bestehe aus den Formen zum Teiler t und Charakter χ. Wegen

(113) $$\mathfrak{F}(Q, \alpha, \beta) = \sum_{t, \chi} \mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$$

genügt es, die Teilscharen zum Teiler t und Charakter χ zu betrachten; sie sind gegenüber den Operatoren $T_m^t = T^t(m)$ invariant. Bezüglich $\mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ ist

(114) $$T^t(m_1)\, T^t(m_2) = \sum_{\substack{d \mid m_1, m_2 \\ d > 0}} T^t\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \chi(d)\, d^{\alpha+\beta-1}.$$

Nun ist der Operator

(115) $$\Theta = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\, \mathsf{X}\, \Lambda^k$$

heranzuziehen, insbesondere also $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ vorauszusetzen. Nach Satz 5 führt Θ die Formenschar zum Teiler t in sich über. Auf Grund von Hilfssatz 3 und 4 ergibt sich leicht die Vertauschbarkeit von Θ mit R_a und T_m^t. Θ führt also auch die Formenschar zum Charakter χ in sich über. Außerdem sind die Teilscharen $\mathfrak{F}^+(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ und $\mathfrak{F}^-(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$, die sich aus den Eigenfunktionen $\subset \mathfrak{F}(t, \chi, Q, \alpha, \beta)$ bezüglich Θ zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 zusammensetzen, invariant gegenüber den Operatoren T_m^t. Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{F}$ eine beliebige gegenüber den Operatoren T_m^t invariante Teilschar aus einer der Formenscharen

$$\mathfrak{F}^\pm = \mathfrak{F}^\pm(t, \chi, Q, \alpha, \beta). \tag{116}$$

Wir betrachten eine Form $f \subset \mathfrak{F}$ mit der FOURIER-Entwicklung (108). Kennzeichnend für $\Theta f = \pm f$ sind nach Satz 5 die Beziehungen

$$\begin{gathered} a(-n) = \pm \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} a(n) \quad \text{für } n > 0, \\ a'(0) = \pm a'(0), \; a''(0) = \pm (-1)^k a''(0). \end{gathered} \tag{117}$$

Die der Form f zugeordneten DIRICHLET-Reihen (22) unterscheiden sich also wirklich nur um einen konstanten Faktor, so daß eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$f(z, w) \rightleftarrows \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(n t)^s} \qquad \text{für } f \subset \mathfrak{F} \tag{118}$$

besteht. Das Produkt $n\,t$ an Stelle von n entspricht der modifizierten Bezeichnung in (108). Die Summationsbeschränkung $\left(n, \frac{Q}{t}\right) = 1$ können wir fallen lassen, wenn wir $a(n) = 0$ für $\left(n, \frac{Q}{t}\right) > 1$ setzen; das soll fortan geschehen.

Bezeichnen $b'(0)$, $b''(0)$, $b(n)$ die Entwicklungskoeffizienten der Form $f \mid T_m^t$, so läßt sich mit Hilfe eines speziellen Repräsentantensystems V_n

$$b(N) = \sum_{\substack{d \mid m, N \\ d > 0}} a\left(\frac{m N}{d^2}\right) \chi(d)\, d^{\alpha+\beta-1} \qquad \text{für } m \geqq 1, N \neq 0, \tag{119}$$

$$\begin{aligned} b'(0) &= a'(0)\, \chi(m) \sum_{\substack{d \mid m \\ d > 0}} \overline{\chi}(d)\, d^{\alpha+\beta-1}, \\ b''(0) &= a''(0) \sum_{\substack{d \mid m \\ d > 0}} \chi(d)\, d^{\alpha+\beta-1} \end{aligned} \tag{120}$$

beweisen. Die Formen f^ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ mit den Entwicklungen

$$f^\varrho = a_1^\varrho(0)\, y^{1-\alpha-\beta} + a_2^\varrho(0) + \sum_{n \neq 0} a^\varrho(n)\, W\left(\frac{2\pi |n| t}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x} \tag{121}$$

mögen eine Basis von $\mathfrak{F}$ bilden. Da $\mathfrak{F}$ bezüglich T_m^t invariant ist, bestehen Gleichungen

$$f^\varrho \mid T_m^t = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, f^\sigma \qquad (1 \leqq \varrho \leqq \varkappa) \tag{122}$$

mit gewissen Zahlkoeffizienten $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$. Berechnen wir beiderseits die Entwicklungskoeffizienten, so ergeben sich die sog. Grundgleichungen

$$\sum_{\substack{d \mid m, N \\ d > 0}}' a^{\varrho}\left(\frac{m N}{d^2}\right) \chi(d)\, d^{\alpha+\beta-1} = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(N) \tag{123}$$

für $N \neq 0$, $m > 0$, $\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa$. Die Gleichungen gelten auch noch für $m < 0$, wenn wir

$$\lambda_{\varrho\sigma}(-m) = \pm \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \lambda_{\varrho\sigma}(m) \qquad \text{für } m > 0 \tag{124}$$

setzen, wobei das obere oder untere Zeichen gelten soll, je nachdem $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}^+$ oder $\mathfrak{F}^-$ liegt. Das System (123) gestattet eine Auflösung nach den $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$; man erhält

$$\Lambda(m) = (\lambda_{\varrho\sigma}(m)) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa}{}' a^{\nu}(m)\, B^{\nu} \qquad \text{für } m \neq 0 \tag{125}$$

mit gewissen konstanten Matrizen B^{ν}. Bei geeigneter Definition von $\lambda'_{\varrho\sigma}(0)$ und $\lambda''_{\varrho\sigma}(0)$ stellen

$$f_{\varrho\sigma} = \lambda'_{\varrho\sigma}(0)\, y^{1-\alpha-\beta} + \lambda''_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{n \neq 0}{}' \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, W\left(\frac{2\pi |n| t}{Q} y; \alpha, \beta, \operatorname{sgn} n\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x} \tag{126}$$

für $1 \leqq \varrho, \sigma \leqq \varkappa$ Formen dar, die mit den f^{ϱ} linear äquivalent sind. Für die Matrizen $\Lambda(m)$ gilt eine zu (114) analoge Multiplikationsregel. Man benutzt sie, um für die Funktionenmatrix

$$\Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m)\,(m\,t)^{-s} \tag{127}$$

die Eulersche Produktentwicklung

$$\Phi(s) = t^{-s} \prod_p \left(\Lambda(1) - \Lambda(p)\, p^{-s} + \chi(p)\, p^{\alpha+\beta-1-2s}\, \Lambda(1)\right)^{-1} \tag{128}$$

abzuleiten.

Es bleibt noch das „Hauptachsentheorem", die Frage nach der simultanen Transformation der $\Lambda(n)$ auf Diagonalgestalt zu behandeln. Nach einer zu Beginn des Paragraphen gemachten Bemerkung kann man sich dabei auf die Schar der in $\mathfrak{F}$ gelegenen Spitzenformen beschränken. Das entscheidende Hilfsmittel ist wieder das Peterssonsche Metrisierungsprinzip. Wir erklären ein Skalarprodukt für zwei Spitzenformen $f, g \subset \{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, v\}$ durch

$$(f, g) = \iint_{\mathfrak{B}} f \bar{g}\, y^{\alpha+\beta-2}\, dx\, dy, \tag{129}$$

wobei $\mathfrak{B}$ einen Fundamentalbereich zur Gruppe $\mathsf{M}(Q)$ bezeichnet. Wieder gilt

$$(f \mid T_n, g) = \chi(n)\,(f, g \mid T_n), \tag{130}$$

wenn f und g Spitzenformen $\subset \{\mathsf{M}(Q); \alpha, \beta, 1\}$ zum Charakter χ bezeichnen und $(n, Q) = 1$ ist. Die weiteren Untersuchungen verlaufen nun völlig in den vorgezeichneten Bahnen.

(Eingegangen am 1. April 1952).