Math. Annalen, Bd. 124, 1—122 (1951).

Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen.

Von
Hans Maass in Heidelberg.

Die systematische Erforschung der multiplikativen Beziehungen zwischen den Fourier-Koeffizienten der elliptischen Modulformen ist zweifellos eine der fruchtbarsten Leistungen Heckes[1]). Die Zahlentheorie der quadratischen Formen wurde von dieser Seite um neuartige Erkenntnisse bereichert[2]), deren arithmetische Begründung erst sehr viel später angebahnt wurde[3]). Es handelt sich bei diesen Anwendungen der Heckeschen Theorie vornehmlich um die Darstellungsanzahlen von Zahlen durch quadratische Formen. Interessiert man sich allgemeiner für die Darstellungsanzahlen von Formen durch Formen, so wird man auf die Siegelschen Modulfunktionen geführt und vor die Frage gestellt, ob die von Hecke begründete Theorie auf diesen Funktionentypus verallgemeinert werden kann. Daß dies in gewissem Umfang möglich ist, konnte auf Grund der Untersuchungen von M. Sugawara[4]) als wahrscheinlich angesehen werden. Gelang ihm doch die Verallgemeinerung der von Hecke eingeführten Operatoren $T(m)$ und der Nachweis, daß die Eisenstein-Reihen n-ten Grades Eigenfunktionen der verallgemeinerten Operatoren sind. Diese Tatsache gewinnt an Bedeutung, wenn man sich vor Augen hält, daß die Entwicklungskoeffizienten der Eisenstein-Reihen n-ten Grades nach Siegel[5]) ein multiplikatives Bildungsgesetz haben.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß es unter den Eigenfunktionen der verallgemeinerten Operatoren außer den Eisenstein-Reihen noch andere Modulformen n-ten Grades mit multiplikativ gebildeten Entwicklungskoeffizienten gibt. Der Rahmen, in welchem dieses Ergebnis erscheint, ist eine Theorie, die sich zum Ziel setzt, den Heckeschen Operatorenkalkül in einen allgemeineren Zusammenhang einzuordnen. Als Hilfsmittel stehen hierbei die verallgemeinerten Operatoren, die wir mit $\tau(m)$ bezeichnen wollen, und ein von Siegel eingeführter Funktionaloperator Φ zur Verfügung. Φ bildet die Modulformen n-ten Grades auf solche $(n-1)$-ten Grades ab. Ein nennenswerter Fortschritt konnte natürlich erst dann erzielt werden, nachdem die Frage geklärt war, welche Wirkung Φ auf die lineare Schar der Modulformen n-ten

[1]) Hecke, E.: Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. **13**, 10 (1935); Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktenentwicklung I und II, Math. Ann. **114**, 1—28 (1937); **114**, 316—351 (1937).

[2]) Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. **17**, 12 (1940).

[3]) Eichler, M.: Grundzüge einer Zahlentheorie der quadratischen Formen im rationalen Zahlkörper I und II. Comment. math. helvet. **20**, 9—60 (1947); **21**, 1—28 (1948).

[4]) Sugawara, M.: On the transformation theory of Siegels modular group of the n-th. degree, Proc. imp. Acad. Japan **13**, 335—338 (1937); An invariant property of Siegels modular function, Proc. imp. Acad. Japan **14**, 1—3 (1938).

[5]) Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939).

Grades von der Dimension $-k$ hat. Bezeichnen wir diese Schar mit $\mathfrak{M}_k^{(n)}$, so gilt, wie kürzlich mit Hilfe von POINCARÉschen Reihen gezeigt werden konnte[6]),

(1) $$\mathfrak{M}_k^{(n)} \mid \Phi = \mathfrak{M}_k^{(n-1)} \quad \text{für} \quad k > 2n+1,\ k \equiv 0\,(2).$$

Ich verwende hier und im folgenden die Operatorenschreibweise, wie sie sich in der HECKEschen Theorie eingebürgert hat. Die Voraussetzung $k > 2n+1$ kann leider noch nicht entbehrt werden. Sie gewährleistet die absolute Konvergenz der POINCARÉschen Reihen, die den einfachsten und zur Zeit auch einzigen Zugang zur Theorie vermitteln. Im Mittelpunkt der Untersuchung steht eine Regel, die angibt, wie $\tau(m)$ mit Φ vertauscht werden kann. Im allgemeinsten Fall läßt sich nur vermuten, daß

(2) $$\tau(m)\,\Phi = \sum_{d^2/m,\, d>0} \chi(d, m, n, k)\,\Phi\,\tau(m d^{-2})$$

mit gewissen Zahlkoeffizienten $\chi(d, m, n, k)$ gilt. Beweisbar ist diese Regel im Fall $m = p$ (= Primzahl) für $k > 2n+1$ mit

(3) $$\chi(1, p, n, k) = 1$$

und im Falle $n = 2$ mit

(4) $$\chi(d, m, 2, k) = \varphi(d^{2k-3})\,\frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)},$$

wobei $\varphi(m)$ die EULERsche Funktion bezeichnet und allgemein

(5) $$\sigma_r(m) = \sum_{d/m,\, d>0} d^r$$

gesetzt ist. Im Primzahlfall ($m = p$), über den hier noch kurz berichtet werden soll, gilt also

(6) $$\tau(p)\,\Phi = \Phi\,\tau(p) \qquad \text{für} \quad k > 2n+1.$$

Auf Grund der in (1) ausgesprochenen Eigenschaft von Φ läßt sich die lineare Schar $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ in eine direkte Summe von Teilscharen so zerlegen:

(7) $$\mathfrak{M}_k^{(n)} = \mathfrak{S}_{k\,0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k\,1}^{(n)} + \cdots + \mathfrak{S}_{k\,n}^{(n)},$$

daß für $0 \leq j \leq n$ und $k > 2n+1$, $k \equiv 0\,(2)$

$$\mathfrak{S}_{k\,0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k\,1}^{(n)} + \cdots + \mathfrak{S}_{k\,j}^{(n)} \quad \text{durch} \quad \Phi^{n-j} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{M}_k^{(j)}$$

umkehrbar eindeutig abgebildet wird. Unter $\mathfrak{M}_k^{(0)}$ ist hier die Menge der Konstanten zu verstehen. Die angegebene Zerlegung von $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ ist zugleich eine solche in invariante Teilscharen bezüglich der Operatoren $\tau(p)$. D. h. es gilt

(8) $$\mathfrak{S}_{k\,\nu}^{(n)} \mid \tau(p) \subset \mathfrak{S}_{k\,\nu}^{(n)}.$$

Bekanntlich[7]) gibt es in $\mathfrak{M}_k^{(1)}$ eine Basis $f_1, f_2, \ldots, f_{\varrho_1}$, die aus Eigenfunktionen der Operatoren $\tau(m)$ besteht:

(9) $$f_\nu \mid \tau(m) = a_\nu(m)\, f_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho_1).$$

Bei geeigneter Normierung stimmt $a_\nu(m)$ mit dem m-ten FOURIER-Koeffi-

---

[6]) MAASS, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch POINCARÉsche Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1951).

[7]) PETERSSON, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer RIEMANNschen Funktionalgleichung durch DIRICHLET-Reihen mit EULERscher Produktentwicklung I. Math. Ann. **116**, 401—412 (1939).

zienten von f_ν überein. Die durch

$$g_\nu \mid \Phi^{n-1} = f_\nu, \quad g_\nu \subset \mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho_1) \tag{10}$$

erklärten Modulformen g_ν bilden eine Basis von $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$. Wendet man auf die definierende Gleichung (10) den Operator $\tau(p)$ an und berücksichtigt (6) und (9), so ergibt sich

$$g_\nu \mid \tau(p)\, \Phi^{n-1} = a_\nu(p)\, f_\nu = a_\nu(p)\, g_\nu \mid \Phi^{n-1},$$

woraus

$$g_\nu \mid \tau(p) = a_\nu(p)\, g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho_1) \tag{11}$$

erhellt, da die Differenz der beiden Seiten in $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ liegt und durch Φ^{n-1} in 0 übergeführt wird. Die FOURIER-Entwicklung von $g_\nu \mid \tau(p)$ kann explizit bestimmt werden, wenn man zur Bildung von $\tau(p)$ ein geeignetes spezielles Repräsentantensystem der Substitutionen p-ter Ordnung verwendet, wie es bereits von SUGAWARA angegeben wurde. Beachtet man, daß die Koeffizienten $a_\nu(m)$ auch FOURIER-Koeffizienten von g_ν sind, so erhält man durch Vergleich der FOURIER-Koeffizienten von $g_\nu \mid \tau(p)$ und $a_\nu(p)\, g_\nu$ eine Multiplikationsformel für die Entwicklungskoeffizienten $a_\nu(T)$ von g_ν der folgenden Art:

$$a_\nu(p)\, a_\nu(T) = \sum_{T^*} \psi_p(T^*)\, a_\nu(T^*)\,. \tag{12}$$

Dabei wird über endlich viele Exponentenmatrizen T^*, die aus T umständlich aber elementar zu berechnen sind, summiert. Die Zahlkoeffizienten $\psi_p(T^*)$ sind von g_ν unabhängig. Wählt man für T speziell eine Exponentenmatrix vom Rang 1, so läßt sich (12) als Folgerelation der von HECKE angegebenen Multiplikationsregel

$$a_\nu(m_1)\, a_\nu(m_2) = \sum_{d/m_1, m_2} a_\nu\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) d^{k-1} \tag{13}$$

darstellen.

Da unter den f_ν sicher die EISENSTEIN-Reihe ersten Grades vorkommt und $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)}$ von der EISENSTEIN-Reihe n-ten Grades erzeugt wird, so tritt diese auch unter den g_ν auf.

Man kann das System der Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_{\varrho_1}$ leicht zu einer Basis von $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ ergänzen: $g_1, g_2, \ldots, g_{\varrho_n}$, so daß alle Funktionen Eigenfunktionen der Operatoren $\tau(p)$ sind:

$$g_\nu \mid \tau(p) = a_\nu(p)\, g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varrho_n)\,. \tag{14}$$

Jedoch kann die zahlentheoretische Natur der Eigenwerte $a_\nu(p)$ für $\nu > \varrho_1$ mit den vorliegenden Methoden nicht mehr ergründet werden.

Eine befriedigende Darstellung der Theorie der Operatoren $\tau(m)$ für beliebiges m kann einstweilen nur für die Modulformen zweiten Grades gegeben werden. Abweichungen gegenüber dem Primzahlfall zeigen sich nur dann, wenn m nicht quadratfrei ist. Weitere Hervorhebungen erübrigen sich hier, da sich im Falle $n = 2$ nichts grundsätzlich Neues mehr ergibt.

Hinsichtlich der Bezeichnung sei noch folgendes bemerkt: Große lateinische Buchstaben stellen n-reihige quadratische Matrizen dar. Treten andere Zeilen- und Spaltenzahlen auf, so wird dies besonders vermerkt. Die oberen Indices in $Q^{(r,s)}$ sollen anzeigen, daß die Matrix Q aus r Zeilen und s Spalten besteht. Insbesondere sei $Q^{(r)} = Q^{(r,r)}$. Für einspaltige Matrizen reservieren wir uns kleine deutsche Buchstaben. Gelegentlich werden Matrizen, deren genaue Kenntnis nicht erforderlich ist, durch einen Stern ersetzt. Eine Matrix U heißt ganz, wenn die Elemente von U ganz rational sind. Wir nennen U unimodular, wenn U eine ganze quadratische Matrix ist, U^{-1} existiert und ebenfalls ganz ist. Die zu Q transponierte Matrix bezeichnen wir mit Q'. E wird als Einheitsmatrix und O als Nullmatrix verwendet. Schließlich wird $Q[U] = U' Q U$ für beliebige Matrizen $Q = Q^{(r)}$, $U = U^{(r,s)}$ gesetzt.

§ 1. Die Operatoren $\tau(m)$.

Es sei $\mathfrak{H}_n$ der Bereich der symmetrischen komplexen Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Imaginärteil: $Y > 0$. Wir setzen

$$\iota = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \tag{15}$$

und betrachten die reellen Matrizen

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma' \iota \sigma = m \iota, \tag{16}$$

wobei m eine beliebige positive Zahl bezeichnet. Sie definieren eine multiplikative Gruppe, die durch die Zuordnung $\sigma \to m$ auf die multiplikative Gruppe der positiven Zahlen homomorph abgebildet wird. Zu $m = 1$ gehören die symplektischen Matrizen. Da $\frac{1}{\sqrt{m}}\,\sigma$ stets symplektisch ist, wird $\mathfrak{H}_n$ durch die Substitution

$$\sigma(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

in sich übergeführt. Wir fassen σ als Operator der in $\mathfrak{H}_n$ erklärten Funktionen $f(Z)$ auf und setzen mit fest gewähltem $k \equiv 0\ (2)$, $k > 0$:

$$f(Z) \mid \sigma = f(\sigma(Z)) \, |CZ + D|^{-k}. \tag{17}$$

Man bestätigt sofort die Regel

$$f(Z) \mid (\sigma\tau) = (f(Z) \mid \sigma) \mid \tau. \tag{18}$$

Ist die Matrix (16) ganz, so wollen wir sie eine Substitution m-ter Ordnung nennen. $\mathsf{O}_n^{(m)}$ bezeichne die Menge der Substitutionen m-ter Ordnung. Es genügt hier, m ganz rational anzunehmen, da sonst $\mathsf{O}_n^{(m)}$ leer ist. $\mathsf{O}_n^{(1)}$ ist mit der Modulgruppe n-ten Grades M_n identisch. Bekanntlich[4]) zerfällt $\mathsf{O}_n^{(m)}$ in endlich viele Linksrestklassen nach M_n; d. h. es ist

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m} \mathsf{M}_n \sigma \tag{19}$$

für ein gewisses endliches Repräsentantensystem V_m der Linksrestklassen.

Eine Modulform n-ten Grades von der Dimension $-k$ genügt der Transformationsformel

$$f(Z) \mid \varrho = f(Z) \qquad \text{für} \quad \varrho \subset \mathsf{M}_n, \tag{20}$$

woraus erhellt, daß die Funktionen $f(Z) \mid \sigma$ $(\sigma \subset \mathsf{V}_m)$ von der Auswahl des Repräsentantensystems V_m nicht abhängen. Da $\sigma\varrho$ ein mit V_m gleichwertiges System durchläuft, wenn σ in V_m variiert und ϱ in M_n fest gewählt wird, so stimmen die Funktionen $f(Z) \mid \sigma\varrho$, von der Reihenfolge abgesehen, mit den

Funktionen $f(Z) \mid \sigma$ überein. D. h. der durch

$$f(Z) \mid \tau(m) = c_{nk}(m) \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m} f(Z) \mid \sigma \tag{21}$$

erklärte Operator $\tau(m)$ führt die lineare Schar der Modulformen n-ten Grades von der Dimension $-k$ in sich über und ist von der Auswahl des Vertretersystems V_m unabhängig. Es genügt vorerst, zu verlangen, daß der Normierungsfaktor $c_{nk}(m)$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$c_{nk}(m_1 m_2) = c_{nk}(m_1)\, c_{nk}(m_2) \quad \text{für} \quad (m_1, m_2) = 1, \tag{22}$$

$$c_{nk}(p) = \frac{c_{n-1\,k}(p)}{1 + p^{n-k}} \qquad \text{für} \quad n > 1,\ p = \text{Primzahl}, \tag{23}$$

$$c_{1k}(m) = m^{k-1},\ \ c_{2k}(m) = m^{k-1}\Bigl(\sum_{d/m} d^{2-k}\Bigr)^{-1}. \tag{24}$$

Insbesondere ist damit erreicht, daß $\tau(m)$ auf die Modulformen ersten Grades dieselbe Wirkung hat wie der HECKEsche Operator $T(m)$.

Im folgenden benötigen wir spezielle Repräsentantensysteme V_m, wie sie schon von SUGAWARA[4]) angegeben worden sind. Ist $D^* = U\,D$ mit unimodularem U, so sollen D und D^* links assoziiert genannt werden.

Satz 1: *Es gibt ein Vertretersystem V_m für die Linksrestklassen der Substitutionen m-ter Ordnung nach M_n der folgenden Art:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Dabei durchläuft

1. *D ein volles System links nicht assoziierter ganzer Matrizen, so daß $A\,D' = m\,E$ mit einer ganzen Matrix A gilt.*
2. *$S = B\,D^{-1}$ bei festem D ein volles System symmetrischer, modulo 1 nicht kongruenter Matrizen, so daß $B = S\,D$ ganz wird.*

Beweis: 1. Es ist zu zeigen, daß in jeder Linksrestklasse ein Repräsentant der angegebenen Art liegt. Eine vorgegebene Substitution

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{O}_n^{(m)}$$

multiplizieren wir von links mit

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n.$$

Dabei geht C in $C_1 A + D_1 C$ über. Durch geeignete Wahl des symmetrischen und teilerfremden Paares C_1, D_1 erreicht man $C_1 A + D_1 C = O$. Wir dürfen also von vornherein $C = O$ annehmen. Sodann multiplizieren wir σ von links mit

$$\begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n.$$

Nun geht D in $U^{-1} D$ über. Bei geeigneter Wahl der unimodularen Matrix U stellt $U^{-1} D$ den ausgezeichneten Repräsentanten in der Schar der mit D links assoziierten Matrizen dar. Es darf vorausgesetzt werden, daß D selber dieser Repräsentant ist. Schließlich wird σ von links mit

$$\begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n$$

multipliziert. Jetzt bleibt D fest und B geht in $B + V\,D$ über. V stellt eine beliebige ganze symmetrische Matrix dar. Bei geeigneter Wahl von V ist also $(B + V D) D^{-1} = B D^{-1} + V$ mit dem ausgezeichneten Vertreter der Restklasse $B D^{-1}$ modulo 1 identisch.

2. Es ist zu beweisen, daß zwei verschiedene der in Satz 1 genannten Repräsentanten σ und σ^* in verschiedenen Linksrestklassen nach M_n liegen. Wäre

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \sigma \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n,$$

so könnte der Reihe nach sofort $C_1 = O$, $D_1 = E$, $B_1 = O$, also $\sigma^* = \sigma$ geschlossen werden.

Satz 2: *Für teilerfremde* m_1, m_2 *ist* $\tau(m_1, m_2) = \tau(m_1)\, \tau(m_2)$.

Beweis: Die Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ O & D_1 \end{pmatrix}$$

möge ein Vertretersystem der Substitutionen m_1-ter Ordnung von der in Satz 1 genannten Art durchlaufen, ebenso

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ O & D_2 \end{pmatrix}$$

ein Vertretersystem der Substitutionen m_2-ter Ordnung. Für eine Modulform n-ten Grades von der Dimension $-k$ ist dann

$$\begin{aligned} f(Z) \mid \tau(m_1)\, \tau(m_2) &= (f(Z) \mid \tau(m_1)) \mid \tau(m_2) \\ &= c_{nk}(m_1)\, c_{nk}(m_2) \sum_{\sigma_2} \Big(\sum_{\sigma_1} f(Z) \mid \sigma_1 \Big) \Big| \sigma_2 \\ &= c_{nk}(m_1 m_2) \sum_{\sigma_1, \sigma_2} f(Z) \mid \sigma_1 \sigma_2, \end{aligned}$$

wenn $(m_1, m_2) = 1$ und (22) berücksichtigt wird. Es braucht also nur gezeigt zu werden, daß die Produkte

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ O & D_1 D_2 \end{pmatrix}$$

ein Repräsentantensystem der Substitutionen $m_1 m_2$-ter Ordnung darstellen.

1. Es sei

$$\widetilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 & \widetilde{B}_1 \\ O & \widetilde{D}_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_2 & \widetilde{B}_2 \\ O & \widetilde{D}_2 \end{pmatrix}$$

ein weiteres Paar von Vertretern der Substitutionen m_1-ter bzw. m_2-ter Ordnung und es sei

$$\widetilde{\sigma}_1 \widetilde{\sigma}_2 = \varrho\, \sigma_1 \sigma_2, \quad \varrho \subset \mathsf{M}_n.$$

Dann ist $\widetilde{\sigma}_1 = \widetilde{\sigma}_1$ und $\sigma_2 = \sigma_2$ zu beweisen. Zunächst folgt, daß ϱ die Gestalt

$$\varrho = \begin{pmatrix} U' & S U^{-1} \\ O & U^{-1} \end{pmatrix}$$

hat. Damit ergibt sich $\widetilde{D}_1 \widetilde{D}_2 = U^{-1} D_1 D_2$ oder $D_1^{-1} U \widetilde{D}_1 = D_2 \widetilde{D}_2^{-1}$. Wegen $A_1 D_1' = m_1 E$, $\widetilde{A}_2 \widetilde{D}_2' = m_2 E$, $(m_1, m_2) = 1$ ist $(|D_1|, |\widetilde{D}_2|) = 1$. D. h. die Matrizen $D_1^{-1} U \widetilde{D}_1$ und $D_2 \widetilde{D}_2^{-1}$ haben teilerfremde Nenner. Da sie übereinstimmen, ist $D_2 \widetilde{D}_2^{-1}$ und aus Symmetriegründen auch $\widetilde{D}_2 D_2^{-1}$ ganz. D_2 und $\widetilde{D}_2$ sind also links assoziiert; folglich ist $D_2 = \widetilde{D}_2$, $A_2 = \widetilde{A}_2$ und $\widetilde{D}_1 = U^{-1} D_1$, woraus wieder $D_1 = \widetilde{D}_1$, $A_1 = \widetilde{A}_1$ und $U = E$ zu schließen ist.

Nun bleibt noch

$$A_1\,\widetilde{B}_2 + \widetilde{B}_1\,D_2 = A_1\,B_2 + B_1\,D_2 + S\,D_1\,D_2$$

zu diskutieren. Hiernach ist

$$A_1\,(\widetilde{B}_2 - B_2)\,D_2^{-1} = S\,D_1 + B_1 - \widetilde{B}_1,$$

also ganz. Multiplizieren wir von links mit D_1', so erhalten wir $m_1\,(\widetilde{B}_2 - B_2)\,D_2^{-1}$, eine Matrix, die gleichfalls ganz ist. Mithin ist auch $(\widetilde{B}_2 - B_2)\,D_2^{-1}$ ganz; denn m_1 und $|D_2|$ sind teilerfremd. Aus $\widetilde{B}_2\,D_2^{-1} \equiv B_2\,D_2^{-1}\,(1)$ folgt aber $\widetilde{B}_2 = B_2$. Zugleich ergibt sich $(B_1 - \widetilde{B}_1)\,D_1^{-1} = S \equiv O\,(1)$, also $\widetilde{B}_1 = B_1$. Damit ist $\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_1$ und $\widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2$ bewiesen.

2. Wir zeigen, daß in jeder Restklasse von Substitutionen $m_1\,m_2$-ter Ordnung ein Matrizenprodukt $\sigma_1\,\sigma_2$ liegt. Wie bekannt, gibt es in einer vorgegebenen Restklasse jedenfalls einen Repräsentanten

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A\,D' = m_1\,m_2\,E\,.$$

Es sei F die Diagonalmatrix, die aus den Elementarteilern von D gebildet wird. Wegen $|D| = (m_1\,m_2)^n$ läßt sich F als Produkt von zwei Diagonalmatrizen schreiben: $F = F_1\,F_2$, so daß sich die Elemente von F_1 aus Primteilern von m_1 und die Elemente von F_2 aus Primteilern von m_2 zusammensetzen. Mit gewissen unimodularen Matrizen U, V ist dann $D = U\,F_1\,F_2\,V$, folglich $A\,V'\,F_2\,F_1\,U' = m_1\,m_2\,E$ oder $U'\,A\,V' = (m_1\,F_1^{-1})\,(m_2\,F_2^{-1})$. Das Produkt der Matrizen $m_1\,F_1^{-1}$, $m_2\,F_2^{-1}$ ist ganz, ihre Nenner sind teilerfremd, mithin sind $m_1 F_1^{-1}$ und $m_2 F_2^{-1}$ selber ganz. Schließlich ist auch noch $m_2\,(F_2\,V)^{-1}$ ganz. Es gibt also einen Repräsentanten D_2 in unserem ausgezeichneten System, so daß $F_2\,V = U_2\,D_2$ mit einer unimodularen Matrix U_2 gilt. Da auch $m_1\,(F_1\,U_2)^{-1}$ ganz ist, so folgt analog $F_1\,U_2 = U_1\,D_1$ mit unimodularem U_1. Damit ergibt sich $D = U\,F_1\,U_2\,D_2 = U\,U_1\,D_1\,D_2$; d. h. D und $D_1\,D_2$ sind links assoziiert. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf nunmehr $D = D_1\,D_2$ und $A = A_1\,A_2$ angenommen werden. Da die Determinanten $|A_1|$ und $|D_2|$ teilerfremd sind, können die Kongruenzen

$$x \equiv 0\ (|A_1|), \quad x \equiv 1\ (|D_2|)$$

durch eine ganze Zahl x befriedigt werden. Die Matrix $x\,A_1^{-1}\,B$ ist demnach ganz. Beachten wir noch, daß

$$(x\,A_1^{-1}\,B)\,D_2^{-1} = x\,A_1^{-1}\,B\,D_2^{-1}\,D_1^{-1}\,D_1 = \frac{x}{m_1}\,D_1'\,(B\,D^{-1})\,D_1$$

symmetrisch ist, so folgt

$$x\,A_1^{-1}\,B = B_2 + S_2\,D_2\,,$$

wobei B_2 einen Repräsentanten aus dem fixierten Vertretersystem und S_2 eine ganze symmetrische Matrix darstellt. Ersichtlich ist

$$B^* = A_1\,S_2 - (x-1)\,B\,D_2^{-1}$$

ganz und

$$B^*\,D_1^{-1} = \frac{1}{m_1}\,A_1\,S_2\,A_1' - (x-1)\,B\,D^{-1}$$

symmetrisch. Es gibt also einen speziellen Vertreter B_1 und eine ganze sym-

metrische Matrix S_1, so daß
$$B^* = B_1 + S_1 D_1$$
wird. Nunmehr ergibt sich
$$\begin{aligned} B = x\,B - (x-1)\,B &= A_1\,(x\,A_1^{-1}\,B) - (x-1)\,B\,D_2^{-1}\,D_2 \\ &= A_1\,(B_2 + S_2\,D_2) + (B^* - A_1\,S_2)\,D_2 \\ &= A_1\,(B_2 + S_2\,D_2) + (B_1 + S_1\,D_1 - A_1\,S_2)\,D_2 \\ &= A_1\,B_2 + B_1\,D_2 + S_1\,D\,. \end{aligned}$$

Da $B\,D^{-1}$ um eine ganze symmetrische Matrix abgeändert werden darf, kann $B = A_1\,B_2 + B_1\,D_2$ angenommen werden. Das bedeutet aber $\sigma = \sigma_1\,\sigma_2$, wenn σ_1 und σ_2 die bisherige Bedeutung haben. Damit ist

$$f(Z)\,|\,\tau(m_1)\,\tau(m_2) = f(Z)\,|\,\tau(m_1\,m_2)\,, \tag{26}$$

also Satz 2 bewiesen.

Die Diskussion der Operatoren $\tau(m)$ ist nunmehr wie in der HECKEschen Theorie auf den Primzahlpotenzfall ($m = p^\nu$) zurückgeführt. Eine weitere Reduktion ist hier nicht möglich, da die $\tau(p^\nu)$ keiner Rekursionsformel genügen, derzufolge sie als Polynome von $\tau(p)$ dargestellt werden können, wie es für die HECKEschen Operatoren $T(p^\nu)$ zutrifft.

§ 2. Die metrische Grundformel der Operatorentheorie.

Es sei $f(Z)$ eine Modulform n-ten Grades. Wählen wir speziell

$$Z = \begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Z^* \subset \mathfrak{H}_{n-1},\ z \subset \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{n} = \text{Nullspalte}, \tag{27}$$

so stellt $f(Z)$ in Abhängigkeit von Z^* eine Modulform $(n-1)$-ten Grades und in Abhängigkeit von z eine solche ersten Grades dar[8]). Infolgedessen existiert eine FOURIER-Entwicklung

$$f(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(Z^*)\,e^{2\pi i \nu z} \tag{28}$$

mit Modulformen $(n-1)$-ten Grades als Koeffizienten. Aus der Reihe der Funktionaloperatoren

$$f(Z)\,|\,\Phi_\nu = f_\nu(Z^*) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{29}$$

deren Beziehungen zur Operatorentheorie noch untersucht werden müssen (dies nur als Programm!), greifen wir den ersten heraus. Wir verzichten hier auf den Index, setzen also $\Phi = \Phi_0$. Die Berechnung von $f(Z)\,|\,\Phi$ kann auf zwei Weisen vorgenommen werden[5]). Ist die FOURIER-Entwicklung von $f(Z)$ bekannt:

$$f(Z) = \sum_{T \geqq 0} a(T)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)}, \tag{30}$$

so folgt sofort

$$f(Z)\,|\,\Phi = \sum_{T^*} a(T^*)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(T^* Z^*)}, \tag{31}$$

---

[8]) WITT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 14, 323—337 (1941).

wenn

(32) $$a\begin{pmatrix} T^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & 0 \end{pmatrix} = a\,(T^*)$$

gesetzt wird. Ferner ist

(33) $$f\,(Z) \mid \Phi = \lim_{\lambda \to \infty} f\begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Wir nennen $f\,(Z)$ eine Spitzenform, wenn

(34) $$f\,(Z) \mid \Phi = 0$$

ist. Für Formen 0-ten Grades, d. h. für Konstanten soll diese Bedingung immer erfüllt sein.

Es seien $f\,(Z)$ und $g\,(Z)$ Modulformen n-ten Grades von der Dimension $-k$. $\mathfrak{F}_n$ bezeichne den von SIEGEL[5]) angegebenen Fundamentalbereich der Modulgruppe M_n. Unter dem Skalarprodukt von f, g verstehen wir den Integralwert

(35) $$(f, g) = \int_{\mathfrak{F}_n} \cdots \int f\,(Z)\,\overline{g\,(Z)}\,|\,Y\,|^{k-n-1}\,d\,(X)\,d\,(Y) \qquad \text{für} \quad n > 0$$

und

(36) $$(f, g) = f\,\overline{g} \qquad\qquad \text{für} \quad n = 0\,.$$

Dabei ist $Z = X + i\,Y$, $X = (x_{\mu\nu})$, $Y = (y_{\mu\nu})$, $d\,(X) = \prod\limits_{\mu \leqq \nu} d\,x_{\mu\nu}$, $d\,(Y) = \prod\limits_{\mu \leqq \nu} d\,y_{\mu\nu}$. Bei der Bildung von (f, g) muß zunächst vorausgesetzt werden[6]), daß entweder f oder g eine Spitzenform ist. Offenbar wird durch (f, g) im Bereich der Modulformen eine definite HERMITEsche Metrik erklärt. Wir können uns also der Begriffsbildungen in metrischen linearen Räumen bedienen, wobei nur zu beachten ist, daß das Skalarprodukt noch nicht uneingeschränkt definiert ist. In der linearen Schar $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ aller Modulformen n-ten Grades von der Dimension $-k$ bezeichne $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ die Schar der Spitzenformen. $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ sei die Normalschar in $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ bezüglich $\mathfrak{S}_k^{(n)}$. Mit dem üblichen Orthogonalisierungsverfahren beweist man, daß eine Basis von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ durch Hinzunahme weiterer Formen, die auf $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ senkrecht stehen, zu einer Basis von $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ ergänzt werden kann. Mithin ist

$$\mathfrak{M}_k^{(n)} = \mathfrak{N}_k^{(n)} + \mathfrak{S}_k^{(n)}.$$

Eine weitere Zerlegung von $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ kann in folgender Weise vorgenommen werden:

Satz 3: *Die lineare Schar $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise als direkte Summe*

(37) $$\mathfrak{M}_k^{(n)} = \mathfrak{S}_{k\,0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k\,1}^{(n)} + \cdots + \mathfrak{S}_{k\,n}^{(n)}$$

darstellen, so daß

1. $\mathfrak{S}_{k\,n}^{(n)} = \mathfrak{S}_k^{(n)}$,
2. $\mathfrak{S}_{k\,\nu}^{(n)} \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$ für $\nu < n$,
3. $\mathfrak{S}_{k\,\nu}^{(n)} \mid \Phi \subset \mathfrak{S}_{k\,\nu}^{(n-1)}$ für $\nu < n$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ durch Φ umkehrbar eindeutig abgebildet wird. Aus

$$f\,(Z) \mid \Phi = 0\,, \quad f\,(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$$

folgt nämlich, daß $f\,(Z)$ in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ liegt und daher auf sich selber senkrecht steht, was $f\,(Z) = 0$ zur Folge hat.

Für $n = 0$ ist Satz 3 richtig. Sei $n > 0$ und bereits bewiesen, daß $\mathfrak{M}_k^{(\nu)}$ für $\nu < n$ auf genau eine Art in der angegebenen Weise zerlegt werden kann. Wir zeigen, daß dann auch $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ eine Zerlegung der gewünschten Art besitzt. Es sei $\overline{\mathfrak{S}}_{k\nu}^{(n)}$ $(\nu < n)$ die lineare Schar aller $f(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$, die durch Φ in $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)}$ abgebildet werden; sie ist durch

$$\overline{\mathfrak{S}}_{k\nu}^{(n)} \mid \Phi = \mathfrak{N}_k^{(n)} \mid \Phi \cap \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)}, \quad \overline{\mathfrak{S}}_{k\nu}^{(n)} \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$$

gekennzeichnet. Beachtet man, daß

$$\mathfrak{N}_k^{(n)} \mid \Phi = \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' \mathfrak{N}_k^{(n)} \mid \Phi \cap \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)}$$

und daher auch

$$\mathfrak{N}_k^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$$

eine direkte Summe ist, so erhält man in

$$\mathfrak{M}_k^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' \overline{\mathfrak{S}}_{k\nu}^{(n)} + \mathfrak{S}_k^{(n)}$$

eine Zerlegung, die den Forderungen von Satz 3 genügt. Die Eindeutigkeit der Zerlegung ergibt sich aus einer Rangbetrachtung; denn es ist notwendig

$$\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \subset \overline{\mathfrak{S}}_{k\nu}^{(n)} \,(\nu < n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_{kn}^{(n)} = \mathfrak{S}_k^{(n)}.$$

Durch vollständige Induktion nach n zeigt man ohne Mühe, daß die Teilschar $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)} + \cdots + \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ durch $\Phi^{n-\nu}$ $(0 \leq \nu < n)$ umkehrbar eindeutig abgebildet wird. Insbesondere folgt aus

$$f(Z) \mid \Phi^{n-\nu} = 0, \; f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \quad \text{sofort} \quad f(Z) = 0.$$

Ferner ist $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \mid \Phi^{n-\nu+1} = 0$. Der Beweis ist wieder mit vollständiger Induktion nach n zu führen. Für $\nu = n$ ist die Behauptung klar; im Falle $\nu < n$ ist $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \mid \Phi^{n-\nu+1} \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)} \mid \Phi^{(n-1)-\nu+1}$ zu beachten. Die lineare Schar $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \mid \Phi^{n-\nu}$ besteht also aus Spitzenformen ν-ten Grades.

Wir können nun ein Skalarprodukt (f, g) für zwei beliebige Modulformen n-ten Grades von der Dimension $-k$ in sinnvoller Weise erklären. Zu dem Zweck zerlegen wir f, g:

$$f = \sum_{\nu=0}^{n}{}' f_\nu, \quad g = \sum_{\nu=0}^{n}{}' g_\nu, \quad f_\nu, g_\nu \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}, \tag{38}$$

was eindeutig möglich ist, und setzen

$$(f, g) = \sum_{\nu=0}^{n} (f_\nu \mid \Phi^{n-\nu}, g_\nu \mid \Phi^{n-\nu}). \tag{39}$$

Die rechts stehenden Skalarprodukte sind in der vereinbarten Weise zu berechnen. Ist eine der Formen f, g eine Spitzenform, so ergibt sich wegen $f_\nu, g_\nu \supset \mathfrak{N}_k^{(n)}$ $(\nu < n)$ für (f, g) der ursprünglich angesetzte Ausdruck (35) bzw. (36). Die durch (39) erklärte Metrik ist definit. Aus $(f, f) = 0$ folgt nämlich $(f_\nu \mid \Phi^{n-\nu}, f_\nu \mid \Phi^{n-\nu}) = 0$, also $f_\nu \mid \Phi^{n-\nu} = 0$, mithin $f_\nu = 0$ für alle ν.

Wir wollen nun den Beweis der metrischen Grundformel durch einen Hilfssatz vorbereiten (vgl. hierzu[7]).

Hilfssatz 1: *Es gibt gemeinsame Vertretersysteme* V_m *für die Links- und Rechtsrestklassen von* M_n *in* $\mathsf{O}_n^{(m)}$:

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_n}' \mathsf{M}_n \sigma = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_n}' \sigma \mathsf{M}_n . \tag{40}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß ein beliebiger Komplex $\mathsf{M}_n \varrho \mathsf{M}_n \subset \mathsf{O}_n^{(m)}$ in ebenso viele Linksrestklassen wie Rechtsrestklassen nach M_n zerfällt. Sei

$$\mathsf{M}_n \varrho \mathsf{M}_n = \sum_{i=1}^{r}' \mathsf{M}_n \varrho \xi_i = \sum_{i=1}^{s}' \eta_i \varrho \mathsf{M}_n$$

mit gewissen $\xi_i, \eta_i \subset \mathsf{M}_n$. Die Summanden jeder Zerlegung sollen elementfremd sein; das wird auch im folgenden stets verlangt. Da $\mathsf{M}_n \varrho \xi = \mathsf{M}_n \varrho \xi^*$ $(\xi, \xi^* \subset \mathsf{M}_n)$ mit $\xi^* \xi^{-1} \subset \mathsf{M}_n \cap \varrho^{-1} \mathsf{M}_n \varrho$ gleichwertig ist, folgt

$$r = (\mathsf{M}_n : \mathsf{M}_n \cap \varrho^{-1} \mathsf{M}_n \varrho) .$$

Analog beweist man, daß s mit dem Index von $\mathsf{M}_n \cap \varrho \mathsf{M}_n \varrho^{-1}$ in M_n identisch ist:

$$s = (\mathsf{M}_n : \mathsf{M}_n \cap \varrho \mathsf{M}_n \varrho^{-1}) .$$

Bezeichnet G eine beliebige Untergruppe von M_n, die mit η auch stets $-\eta$ enthält, so ist der Index $(\mathsf{M}_n : \mathsf{G})$ gleich dem Quotienten aus den symplektischen Inhalten der Fundamentalbereiche von G und M_n. Daraus folgt nun $r = s$; denn $\mathsf{M}_n \cap \varrho^{-1} \mathsf{M}_n \varrho$ wird durch Transformation mit ϱ in $\mathsf{M}_n \cap \varrho \mathsf{M}_n \varrho^{-1}$ übergeführt, so daß beide Gruppen Fundamentalbereiche mit gleichem symplektischen Inhalt haben.

Im folgenden ist zu beachten, daß $\mathsf{O}_n^{(m)}$ mit ϱ auch die transponierte Substitution ϱ' enthält. D. h. Transposition führt $\mathsf{O}_n^{(m)}$ in sich über: $\mathsf{O}_n^{(m)'} = \mathsf{O}_n^{(m)}$. Insbesondere gilt auch $\mathsf{M}_n' = \mathsf{M}_n$. Wir zerlegen $\mathsf{O}_n^{(m)}$ in verschiedene Komplexe $\mathsf{M}_n \varrho \mathsf{M}_n$. Da jeder mögliche Komplex in einer solchen Zerlegung wirklich vorkommt, kann

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_i' (\mathsf{M}_n \varrho_i \mathsf{M}_n + \mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n) + \sum_i' \mathsf{M}_n \sigma_i \mathsf{M}_n$$

angesetzt werden, wobei

$$\mathsf{M}_n \varrho_i \mathsf{M}_n \neq \mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n \quad \text{und} \quad \mathsf{M}_n \sigma_i \mathsf{M}_n = \mathsf{M}_n \sigma_i' \mathsf{M}_n$$

angenommen ist. Mit gewissen $\xi_{ij} \subset \mathsf{M}_n$ ist

$$\mathsf{M}_n \varrho_i \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{r}' \mathsf{M}_n \varrho_i \xi_{ij} \qquad (r = r(i)).$$

Transposition ergibt

$$\mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{r}' \xi_{ij}' \varrho_i' \mathsf{M}_n .$$

Es ist also auch

$$\mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{r}' \mathsf{M}_n \varrho_i' \eta_{ij}$$

mit gewissen $\eta_{ij} \subset \mathsf{M}_n$. Alsdann wird

$$\mathsf{M}_n \varrho_i \mathsf{M}_n + \mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{r}' \mathsf{M}_n \eta_{ij}' \varrho_i \xi_{ij} + \sum_{j=1}^{r}' \mathsf{M}_n \xi_{ij}' \varrho_i' \eta_{ij},$$

woraus durch Transposition

$$\mathsf{M}_n \varrho_i' \mathsf{M}_n + \mathsf{M}_n \varrho_i \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{r}{}' \xi_{ij}' \varrho_i' \eta_{ij} \mathsf{M}_n + \sum_{j=1}^{r}{}' \eta_{ij}' \varrho_i \xi_{ij} \mathsf{M}_n$$

hervorgeht. Analog ist mit gewissen $\mu_{ij}, \nu_{ij} \subset \mathsf{M}_n$

$$\mathsf{M}_n \sigma_i \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{s}{}' \mathsf{M}_n \sigma_i \mu_{ij} = \sum_{j=1}^{s}{}' \mu_{ij}' \sigma_i' \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{s}{}' \mathsf{M}_n \sigma_i' \nu_{ij},$$

also

$$\mathsf{M}_n \sigma_i \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{s}{}' \mathsf{M}_n \nu_{ij}' \sigma_i \mu_{ij} = \sum_{j=1}^{s}{}' \mathsf{M}_n \mu_{ij}' \sigma_i' \nu_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{s}{}' \mu_{ij}' \sigma_i' \nu_{ij} \mathsf{M}_n = \sum_{j=1}^{s}{}' \nu_{ij}' \sigma_i \mu_{ij} \mathsf{M}_n$$

zu schließen. Die Produkte

$$\eta_{ij}' \varrho_i \xi_{ij}, \quad \xi_{ij}' \varrho_i' \eta_{ij}, \quad \nu_{ij}' \sigma_i \mu_{ij}$$

bilden daher ein Links- und Rechtsrepräsentantensystem der gewünschten Art.

Liegt $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ in $\mathsf{O}_n^{(m)}$, so ist $\sigma^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{pmatrix}$. D. h. $\sigma_1 = m\,\sigma^{-1}$ ist ganz und es gilt auch $\sigma_1' \iota \sigma_1 = m \iota$. Mit σ durchläuft also $m\,\sigma^{-1}$ alle Substitutionen in $\mathsf{O}_n^{(m)}$. Setzen wir allgemein $\sigma = \sqrt{m}\,\sigma^*$ mit $\sqrt{m} > 0$, so ergibt Hilfssatz 1

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m}{}' \mathsf{M}_n \sigma = \sum_{\sigma^* \subset \mathsf{V}_m^*}{}' \mathsf{M}_n \left(\sqrt{m}\,\sigma^*\right)$$

und, wenn man auf

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m} \sigma\, \mathsf{M}_n$$

die Abbildung $\sigma \to m\,\sigma^{-1}$ anwendet,

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m} \mathsf{M}_n (m\,\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma^* \subset \mathsf{V}_m^*}{}' \mathsf{M}_n \left(\sqrt{m}\,\sigma^{*-1}\right).$$

Hier bezeichnet V_m^* die Menge der Substitutionen σ^*, die man erhält, wenn σ in V_m variiert. Wegen

$$f(Z) \mid \sigma = m^{-\frac{nk}{2}} f(Z) \mid \sigma^*$$

ist also

$$f(Z) \mid \tau(m) = c_{nk}(m)\, m^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\sigma^* \subset \mathsf{V}_m^*}{}' f(Z) \mid \sigma^*$$

(41)

$$= c_{nk}(m)\, m^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\sigma^* \subset \mathsf{V}_m^*} f(Z) \mid \sigma^{*-1}.$$

Wir behalten das auf Hilfssatz 1 zurückgehende Vertretersystem V_m^* im folgenden bei und wenden uns nun der metrischen Grundformel zu.

Satz 4: *Ist eine der Modulformen $f(Z), g(Z) \subset \mathfrak{M}_k^{(n)}$ eine Spitzenform, so gilt*

(42) $$(f(Z) \mid \tau(m), g(Z)) = (f(Z), g(Z) \mid \tau(m)).$$

Beweis: Es sei $\mathsf{M}_n(m)$ die Hauptkongruenzuntergruppe n-ten Grades zur Stufe m. Sie besteht aus den Modulsubstitutionen σ, die der Kongruenz

(43) $$\sigma \equiv \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} (m)$$

genügen. $\mathfrak{F}_n^{(m)}$ bezeichne einen Fundamentalbereich von $M_n(m)$ und $q(m)$ den Quotienten aus den symplektischen Inhalten von $\mathfrak{F}_n^{(m)}$ und $\mathfrak{F}_n$. $q(m)$ ist gleich dem einfachen oder doppelten Index von $M_n(m)$ in M_n je nachdem $m \leq 2$ oder $m > 2$ ist.

Es darf angenommen werden, daß $g(Z)$ eine Spitzenform ist. Man erhält dann, wenn man die Invarianzeigenschaften der auftretenden Integranden beachtet und (41) berücksichtigt,

$$(f(Z)\,|\,\tau(m),\, g(Z)) = \int_{\mathfrak{F}_n}\cdots\int f(Z)\,|\,\tau(m)\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

$$(44)\qquad = \frac{1}{q(m)}\int_{\mathfrak{F}_n^{(m)}}\cdots\int f(Z)\,|\,\tau(m)\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

$$= \frac{c_{nk}(m)}{q(m)}\, m^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\sigma^* \in V_m^*}{}' \int_{\mathfrak{F}_n^{(m)}}\cdots\int f(Z)\,|\,\sigma^*\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y).$$

Nun können $f(Z)\,|\,\sigma^*$ und $g(Z)$ als Modulformen zur Gruppe $M_n(m)$ und auch zur Gruppe $\sigma^{-1} M_n(m)\,\sigma$ angesehen werden. Die Fundamentalbereiche beider Gruppen haben denselben symplektischen Inhalt und beide Gruppen enthalten die Kongruenzgruppe $M_n(m^2)$, die in M_n endlichen Index hat. Da $\sigma^{-1}(\mathfrak{F}_n^{(m)})$ ein Fundamentalbereich von $\sigma^{-1} M_n(m)\,\sigma$ ist, so liefert eine im Falle $n = 1$ angewendete Schlußweise (siehe [7]):

$$(f(Z)\,|\,\tau(m),\, g(Z))$$

$$(45)\qquad = \frac{c_{nk}(m)}{q(m)}\, m^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\sigma^* \in V_m^*}{}' \int_{\sigma^{-1}\left(\mathfrak{F}_n^{(m)}\right)}\cdots\int f(Z)\,|\,\sigma^*\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y).$$

Ersetzen wir Z durch $\sigma^{-1}(Z)$, so geht der Integrand in

$$f(Z)\,\overline{g(Z)\,|\,\sigma^{*-1}}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

über, woraus

$$(f(Z)\,|\,\tau(m),\, g(Z))$$

$$= \frac{c_{nk}(m)}{q(m)}\, m^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\sigma^* \in V_m^*}{}' \int_{\mathfrak{F}_n^{(m)}}\cdots\int f(Z)\,\overline{g(Z)\,|\,\sigma^{*-1}}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

$$(46)\qquad = \frac{1}{q(m)}\int_{\mathfrak{F}_n^{(m)}}\cdots\int f(Z)\,\overline{g(Z)\,|\,\tau(m)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

$$= \int_{\mathfrak{F}_n}\cdots\int f(Z)\,\overline{g(Z)\,|\,\tau(m)}\,|Y|^{k-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

erhellt. Die Existenz dieses Integrals ist gesichert, da alle Integralumformungen gerechtfertigt werden können. Sie beruht auf der Tatsache, daß $g(Z)\,|\,\tau(m)$ eine Spitzenform darstellt, wovon wir uns noch unabhängig von den bisherigen Entwicklungen überzeugen wollen. Erst dann kann behauptet werden, daß das Integral mit $(f(Z),\, g(Z)\,|\,\tau(m))$ identisch ist.

Es sei

$$g(Z) = \sum_{T \geq 0}{}' b(T)\, e^{2\pi i\, \mathrm{Sp}(TZ)}$$

die FOURIER-Entwicklung von $g(Z)$. Da $g(Z)$ eine Spitzenform sein soll, ist $b(T) = 0$ für $|T| = 0$. Mit dem in Satz 1 genannten Vertretersystem wird dann

$$g(Z)\,|\,\tau(m) = c_{nk}(m) \sum_{\substack{B,D\\T>0}} b(T)\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T B D^{-1})}\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(D^{-1} T A Z)}.$$

In dieser Entwicklung sind alle Exponentenmatrizen positiv:

$$D^{-1}\, T\, A = \frac{1}{m}\, A'\, T\, A > 0.$$

Das aber ist für Spitzenformen charakteristisch. Satz 4 ist nunmehr bewiesen.

Satz 5: *Die Teilscharen in der Zerlegung $\mathfrak{M}_k^{(n)} = \mathfrak{N}_k^{(n)} + \mathfrak{S}_k^{(n)}$ sind bezüglich der Operatoren $\tau(m)$ invariant:*

(47) $$\mathfrak{N}_k^{(n)}\,|\,\tau(m) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}, \quad \mathfrak{S}_k^{(n)}\,|\,\tau(m) \subset \mathfrak{S}_k^{(n)}.$$

Der Beweis für die Schar der Spitzenformen ist schon erbracht. Sei $f(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$ und $g(Z)$ eine beliebige Spitzenform $\subset \mathfrak{S}_k^{(n)}$. Dann ist nach Satz 4 $(f(Z)\,|\,\tau(m), g(Z)) = 0$, also $f(Z)\,|\,\tau(m) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$, q. e. d.

Um die metrische Grundformel auch für beliebige Modulformen $f(Z)$, $g(Z) \subset \mathfrak{M}_k^{(n)}$ beweisen zu können, bedürfen wir einer Vertauschungsregel für Φ und $\tau(m)$. Im Primzahlfall ($m = p$) werden wir später die bisherigen Ergebnisse mit Hilfe POINCARÉscher Reihen ergänzen und zum Teil verschärfen können.

§ 3. Die Vertauschungsregel $\tau(p)\,\Phi^{n-1} = \Phi^{n-1}\,\tau(p)$.

Um mit Hilfe der FOURIER-Entwicklung einer gegebenen Modulform $f(z) \subset \mathfrak{M}_k^{(n)}$ die Form $f(Z)\,|\,\tau(m)$ berechnen zu können, bedürfen wir näherer Angaben über das in Satz 1 genannte Vertretersystem V_m. Man hat zunächst alle ganzen Matrizen D vom Rang n zu betrachten, für die $m\,D^{-1}$ gleichfalls ganz ist. Bezeichnen wir die der Größe nach geordneten Elementarteiler von D mit $d_1, d_2, \ldots, d_n$, so ist D mit einer Matrix $(\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, U'$ links assoziiert. Dabei ist $\delta_{\mu\nu}$ das Kroneckersymbol und U eine unimodulare Matrix. Damit $m\,D^{-1}$ ganz wird, ist d_n/m notwendig und hinreichend. Die Elementarteiler d_μ genügen also den Bedingungen

(48) $$d_1/d_2/\cdots/d_n/m, \quad d_\mu > 0.$$

Wir untersuchen, wann zwei Matrizen vom Typus $(\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, U'$ links assoziiert sind: Sei

(49) $$(\delta_{\mu\nu}\, \tilde{d}_\mu)\, \tilde{U}' = V'\, (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, U', \qquad V \text{ unimodular}.$$

Hieraus folgt $\tilde{d}_\mu = d_\mu$ für alle μ, mithin

(50) $$U^{-1}\, \tilde{U} = (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, V\, (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)^{-1}.$$

Es sei U_n die Gruppe der n-reihigen unimodularen Matrizen, $\mathfrak{d}$ die Spalte mit den Elementen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ und

(51) $$\mathsf{U}_n(\mathfrak{d}) = \mathsf{U}_n \cap (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, \mathsf{U}_n\, (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)^{-1}.$$

Dann ist (50) mit

(52) $$U\, \mathsf{U}_n(\mathfrak{d}) = \tilde{U}\, \mathsf{U}_n(\mathfrak{d})$$

gleichwertig. Ein volles System links nicht assoziierter ganzer Matrizen D vom Rang n, für welche $m\,D^{-1}$ ganz ist, wird also von den Matrizen

(53) $$D = (\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)\, U'$$

gebildet, wenn $\mathfrak{d}' = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ alle durch (48) gekennzeichneten Zeilen und U ein Repräsentantensystem der Rechtsrestklassen von $\mathsf{U}_n(\mathfrak{d})$ in U_n durchläuft. Aus $A\,D' = m\,E$ ergibt sich noch

$$A = \left(\delta_{\mu\nu}\,\frac{m}{d_\mu}\right) U^{-1}. \tag{54}$$

An Stelle von B soll im folgenden $B\,U'$ gesetzt werden. $B\,D^{-1}$ geht dann in $B\,(\delta_{\mu\nu}\,d_\mu)^{-1}$ über. Bei festem $\mathfrak{d}$ wird ein Repräsentantensystem der B (in neuer Bezeichnung) durch folgende Angaben bestimmt:

$$B = (b_{\mu\nu}) \tag{55}$$
$$b_{\mu\nu} \equiv 0\ (1) \ \text{für}\ \mu \gtrless \nu, \quad b_{\mu\nu} = \frac{d_\nu}{d_\mu}\, b_{\nu\mu}\ \text{für}\ \mu < \nu, \quad 0 \leq b_{\mu\nu} < d_\nu\ \text{für}\ \mu \geqq \nu.$$

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 6: *Man erhält ein Vertretersystem V_m der Linksrestklassen von M_n in $\mathsf{O}_n^{(m)}$, bestehend aus den Matrizen*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \left(\delta_{\mu\nu}\,\frac{m}{d_\mu}\right) & B \\ O & (\delta_{\mu\nu}\,d_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & O \\ O & U' \end{pmatrix},$$

wenn

1. *$\mathfrak{d}' = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ alle Zeilen durchläuft, die den Bedingungen*

$$d_1/d_2/\cdots/d_n/m\,,\ d_\mu > 0 \quad \textit{für alle}\ \mu$$

genügen,

2. *U ein Repräsentantensystem der Rechtsrestklassen von $\mathsf{U}_n(\mathfrak{d})$ in U_n durchläuft,*

3. *$B = (b_{\mu\nu})$ alle ganzen Matrizen durchläuft, die den Bedingungen*

$$b_{\mu\nu} = \frac{d_\nu}{d_\mu}\, b_{\nu\mu}\ \textit{für}\ \mu < \nu, \quad 0 \leqq b_{\mu\nu} < d_\nu \qquad \textit{für}\ \mu \geqq \nu$$

genügen.

Mit dem in Satz 6 genannten System V_m wird nun weiter gerechnet. Wir finden

$$f(Z)\,|\,\tau(m) = c_{nk}(m) \sum_{\mathfrak{d}, U, B} f\left(m\,Z\left[U'^{-1}\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{d_\mu}\right)\right] + \left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)\right)(d_1\,d_2\ldots d_n)^{-k}. \tag{56}$$

Hierin tragen wir die FOURIER-Entwicklung

$$f(Z) = \sum_{T \geqq 0}{}' a(T)\, e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)} \tag{57}$$

ein. Es ergibt sich, wenn $e^z = \exp z$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} f(Z)\,|\,\tau(m) = c_{nk}(m) \sum_{\mathfrak{d}, U, T}{}' a(T) \exp 2\pi i\,\mathrm{Sp}\left(m\,T\left[\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{d_\mu}\right) U^{-1}\right] Z\right) \times \\ \times \left(\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{-k}\right) \sum_{B}{}' \exp 2\pi i\,\mathrm{Sp}\left(T\left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)\right). \end{aligned} \tag{58}$$

Die Summe über B kann berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß $T = (t_{\mu\nu})$ symmetrisch und halbganz ist. Wegen

$$\mathrm{Sp}\left(T\left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)\right) = \sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{t_{\mu\mu}}{d_\mu}\, b_{\mu\mu} + 2 \sum_{\mu > \nu}{}' \frac{t_{\mu\nu}}{d_\nu}\, b_{\mu\nu} \tag{59}$$

folgt dann mit den in Satz 6 genannten Summationsbedingungen

$$\sum_{B} \exp 2\pi i \operatorname{Sp}\left(T\left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)\right) = \prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{\mu+1-\nu} \quad \text{oder} \quad 0 \tag{60}$$

je nachdem

$$d_\mu / t_{\mu\mu} \text{ für alle } \mu,\ d_\nu / 2\, t_{\mu\nu} \text{ für alle Paare } \mu, \nu \text{ mit } \mu > \nu$$

oder eine von diesen Bedingungen verletzt ist. Wird

$$t_{\mu\nu} = d_\nu\, s_{\mu\nu} \quad \text{für} \quad \mu \geqq \nu$$

gesetzt, so darf also die Summation über T in (58) auf solche Matrizen beschränkt werden, die in der Gestalt

$$T = \begin{pmatrix} d_1 s_{11} & d_1 s_{12} & \dots & d_1 s_{1n} \\ d_1 s_{21} & d_2 s_{22} & \dots & d_2 s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1 s_{n1} & d_2 s_{n2} & \dots & d_n s_{nn} \end{pmatrix} \tag{61}$$

mit halbganzer symmetrischer Matrix $S = (s_{\mu\nu})$ geschrieben werden können. Aus (58) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f(Z) \mid \tau(m) &= c_{nk}(m) \sum_{\mathfrak{d}, U, T} a(T) \left(\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{n+1-\nu-k} \right) \exp 2\pi i \operatorname{Sp}\left(m\, T \left[\begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} \\ d_\mu \end{pmatrix} U^{-1} \right] Z \right) \\ &= \sum_{T_1 \geqq 0}{}' \, b(T_1)\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z)} \end{aligned} \tag{62}$$

mit

$$b(T_1) = c_{nk}(m) \sum_{\mathfrak{d}, U}{}' a\left(\frac{1}{m} T_1 [U (\delta_{\mu\nu} d_\mu)] \right) \prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{n+1-\nu-k}. \tag{63}$$

Summiert wird hier über diejenigen $\mathfrak{d}, U$, welche den Bedingungen 1. und 2. von Satz 6 genügen und für welche zugleich

$$\frac{1}{m} T_1 [U (\delta_{\mu\nu} d_\mu)] = \begin{pmatrix} d_1 s_{11} & d_1 s_{12} & d_1 s_{13} & \dots & d_1 s_{1n} \\ d_1 s_{21} & d_2 s_{22} & d_2 s_{23} & \dots & d_2 s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1 s_{n1} & d_2 s_{n2} & d_3 s_{n3} & \dots & d_n s_{nn} \end{pmatrix} \tag{64}$$

mit einer halbganzen symmetrischen Matrix $S = (s_{\mu\nu})$ gilt. Die Formel (63) stimmt im Spezialfall $n = 1$ mit einer von HECKE angegebenen überein.

Man hätte sich nun der Aufgabe zuzuwenden, die Entwicklungskoeffizienten von $f(Z) \mid \tau(m)\, \Phi$, d. h. die Koeffizienten $b(T_1)$ mit Rang $T_1 < n$ auf Grund der Gleichungen (63) durch die Entwicklungskoeffizienten der Formen $f(Z) \mid \Phi\, \tau(m\, d^{-2})$, wobei d ganz und d^2 ein Teiler von m ist, auszudrücken. Zu dem Zweck müßte festgestellt werden, wie oft eine halbganze symmetrische Matrix $T \geqq 0$ vom Rang $< n$ unter den Matrizen $\frac{1}{m} T_1 [U (\delta_{\mu\nu} d_\mu)]$ oder jenen, die aus diesen durch Transformation mit unimodularen Matrizen hervorgehen, vorkommt. Das Problem führt tief in die Elementarteilertheorie und bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Um so bemerkenswerter ist die Tatsache, daß es jedenfalls im Primzahlfall ($m = p$) mit Hilfe POINCARÉscher Reihen gelingt, eine Vertauschungsregel für $\tau(m)$ und Φ zu beweisen.

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf das einfachere Problem, im Primzahlfall die Koeffizienten von $f(Z)|\tau(m)\Phi^{n-1}$ (ohne POINCARÉsche Reihen) zu berechnen. Man hat also T_1 vom Rang 1 anzusetzen. Wir nehmen einige Hilfsbetrachtungen vorweg.

Eine Matrix $Q = Q^{(n,r)}$ $(r \leqq n)$ heißt primitiv, wenn sie ganz ist, den Rang r hat und ihre sämtlichen Elementarteiler gleich 1 sind. Die letzte Bedingung ist gleichwertig damit, daß der größte gemeinsame Teiler aller r-reihigen Unterdeterminanten von Q gleich 1 ist. Wir nennen Q primitiv modulo m, wenn Q ganz ist und der größte gemeinsame Teiler aller r-reihigen Unterdeterminanten zu m teilerfremd ist. Offenbar handelt es sich hier um einen Begriff, der den Restklassen der Matrizen modulo m zukommt. Bei Restklassenuntersuchungen modulo m braucht zwischen „primitiven Matrizen" und „primitiven Matrizen modulo m" nicht unterschieden zu werden. Dies folgt aus

Hilfssatz 2: *Es sei $Q = Q^{(n,r)}$ $(r \leqq n)$ eine primitive Matrix modulo m. Dann gibt es eine primitive Matrix*

$$Q^* \equiv Q \ (m). \tag{65}$$

Beweis: Wir schließen mit vollständiger Induktion nach r.

1. Es sei $r = 1$, $Q = (q_\mu)$, also $(q_1, q_2, \ldots, q_n, m) = 1$. Wir dürfen $q_1 \neq 0$ annehmen. In der Zerlegung $q_1 = q_1' q_1''$ möge sich q_1' aus Primteilern von m zusammensetzen, während q_1'', m teilerfremd seien. Wir lösen die Kongruenzen

$$q_i^* \equiv q_i \ (m), \quad q_i^* \equiv 1 \ (q_1'') \quad \text{für } i > 1 .$$

Dann ist

$$(q_1, q_2^*, \ldots, q_n^*) = 1 .$$

Denn andernfalls gäbe es eine Primzahl p mit p/q_1, p/q_i^* $(i > 1)$, also $p \nmid q_1''$, folglich p/q_1', daher p/m und p/q_i $(i > 1)$, was nicht sein kann.

2. Es sei $r > 1$ und die Behauptung richtig für Matrizen mit weniger als r Spalten. Q_1 entstehe aus Q durch Streichen der letzten Spalte, die wir mit $\mathfrak{q}$ bezeichnen wollen. Da die r-reihigen Unterdeterminanten von Q ganzzahlige Linearkombinationen der $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von Q_1 sind, so ist auch Q_1 primitiv modulo m. Es gibt also eine primitive Matrix $Q_1^* \equiv Q_1 \ (m)$. Wir bestimmen nun unimodulare Matrizen U, V, so daß

$$U\, Q_1^*\, V = \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix}, \quad E = E^{(r-1)}$$

wird und rechnen mit einer zunächst beliebigen ganzen Spalte $\mathfrak{v}$ von $r-1$ Elementen ($\mathfrak{n}$ = Nullspalte)

$$U\, Q \begin{pmatrix} V & \mathfrak{v} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix} \equiv U\,(Q_1^*, \mathfrak{q}) \begin{pmatrix} V & \mathfrak{v} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix} = (U\, Q_1^*\, V,\ U\, Q_1^*\, \mathfrak{v} + U\, \mathfrak{q}) \ \ (m).$$

Sei $U\,\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix}$, $\mathfrak{a}$ eine Spalte von $r-1$ Elementen; dann wird $\mathfrak{v} = -V\mathfrak{a}$ gesetzt, so daß

$$U\, Q_1^*\, \mathfrak{v} + U\, \mathfrak{q} = -\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix},$$

also

$$U\, Q \begin{pmatrix} V & \mathfrak{v} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E & \mathfrak{n} \\ O & \mathfrak{b} \end{pmatrix} \ (m)$$

wird. $\mathfrak{b}$ bestehe aus den Elementen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-r+1}$. Da der größte gemeinsame Teiler aller r-reihigen Unterdeterminanten von Q nach Voraussetzung zu m teilerfremd ist, so folgt

$$(b_1, b_2, \ldots, b_{n-r+1}, m) = 1\,.$$

Nach 1. gibt es also eine primitive Spalte

$$\mathfrak{b}^* \equiv \mathfrak{b} \quad (m)\,.$$

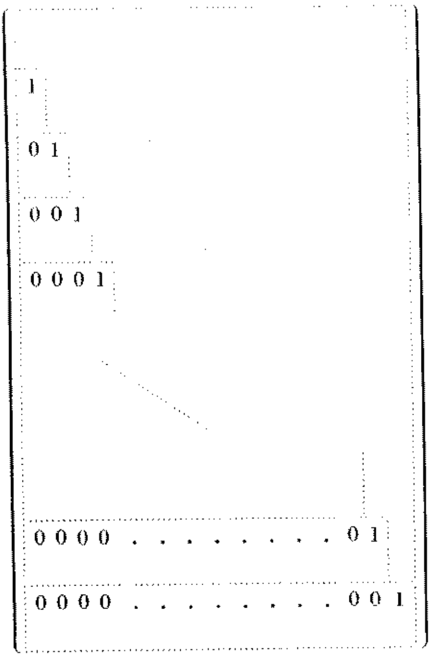
Dann ist

$$Q^* = U^{-1}\begin{pmatrix} E & \mathfrak{n} \\ O & \mathfrak{b}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & \mathfrak{v} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

primitiv und es gilt ersichtlich

$$Q^* \equiv Q \quad (m)\,, \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir nennen zwei Matrizen $Q_1^{(n,r)}$ und $Q_2^{(n,r)}$ $(r \leq n)$ modulo m rechts assoziiert, wenn sie ganz sind und wenn es eine ganze Matrix $W^{(r)}$ mit $Q_2 \equiv Q_1 W$ (m) und $(|W|, m) = 1$ gibt.



Hilfssatz 3: *Es sei p eine Primzahl. Ein volles System modulo p primitiver und rechts nicht assoziierter Matrizen $Q^{(n,r)}$ wird dargestellt durch die Matrizen mit nebenstehendem Besetzungsschema, das in folgender Weise auszufüllen ist: In die ersten Zeilen der r-Kästchen sind Nullen zu setzen mit Ausnahme der rechten Endstellen; hier ist jeweils 1 einzusetzen. Die übrigen Stellen in den Kästchen sind unabhängig voneinander mit den Zahlen eines festen Restsystems modulo p auszufüllen, während außerhalb der Kästchen nur Nullen zu setzen sind. Tragen die ersten Zeilen der r Kästchen in der vollen Matrix die Indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, so ist*

$$1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_r \leq n\,.$$

Umgekehrt ist auch jedes derartige System zuzulassen. Einen zu $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ gehörigen Repräsentanten bezeichnen wir mit $Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r}$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist elementar; denn das Rechnen modulo p bedeutet Rechnen im Primkörper zur Charakteristik p. Die Rechtsmultiplikation mit Matrizen W, deren Determinante zu p teilerfremd ist, ist daher mit den elementaren Spaltenoperationen (über dem Primkörper) äquivalent. Die Zeilen lassen sich nacheinander in der angegebenen Weise ausräumen, wenn man mit der ersten beginnt. Das Verfahren führt zu einem modulo p eindeutig bestimmten Repräsentanten.

Wir wenden uns nun dem Primzahlfall $m = p$ zu. Die mit den Elementen $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 1$, $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_n = p$ gebildete Spalte soll mit $\mathfrak{d}_r$ bezeichnet werden. Für r sind die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ möglich. In den Fällen

$r = 0$ und n ist $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{d}_r) = \mathfrak{U}_n$. Ist $0 < r < n$, so besteht $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{d}_r)$ aus den unimodularen Matrizen

$$V \equiv \begin{pmatrix} W & * \\ O & * \end{pmatrix} \ (p) \quad \text{mit} \quad O = O^{(n-r,\,r)}.$$

Die unimodularen Matrizen $U, \widetilde{U}$ mögen in derselben Rechtsrestklasse von $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{d}_r)$ liegen. Wird $U = (Q\,R)$, $\widetilde{U} = (\widetilde{Q}\,\widetilde{R})$ mit $Q = Q^{(n,r)}$, $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^{(n,r)}$ gesetzt, so folgt

$$\widetilde{Q} \equiv Q\,W \ (p)$$

mit einer ganzen Matrix W, deren Determinante $|W|$ durch p nicht teilbar ist. D. h. Q und $\widetilde{Q}$ sind modulo p rechts assoziiert. Ergänzt man umgekehrt zwei primitive Matrizen $Q, \widetilde{Q}$, die modulo p rechts assoziiert sind, in der angegebenen Weise zu unimodularen Matrizen, so liegen diese in derselben Rechtsrestklasse von $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{d}_r)$. Ein Repräsentantensystem U der Rechtsrestklassen von $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{d}_r)$ erhält man also, wenn man ein Repräsentantensystem primitiver Matrizen $Q^{(n,r)}$, die modulo p rechts nicht assoziiert sind, bestimmt und jede Matrix Q auf genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix $U = (Q\,R)$ ergänzt. Die in Hilfssatz 3 aufgeführten Matrizen

$$Q = Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r}$$

stellen ein System der gewünschten Art dar. Dieses wird im folgenden verwendet:

$$U = \begin{cases} E & \text{für} \quad r = 0, n, \\ (Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r}\, R) & \text{für} \quad 0 < r < n. \end{cases} \tag{66}$$

Wir setzen nun generell

$$a\begin{pmatrix} u & \mathfrak{u}' \\ \mathfrak{u} & O \end{pmatrix} = a(u), \quad b\begin{pmatrix} u & \mathfrak{u}' \\ \mathfrak{u} & O \end{pmatrix} = b(u) \qquad \text{mit} \quad O = O^{(n-1)} \tag{67}$$

und mit festem ganzen t

$$T_1 = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & O \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile von U bestehe aus den Elementen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Es ist also

$$\begin{aligned} &u_1 \equiv u_2 \equiv \cdots \equiv u_r \equiv 0 && \text{für } 0 < r < n,\ \nu_1 > 1, \\ &u_1 = 1,\ u_2 \equiv u_3 \equiv \cdots \equiv u_r \equiv 0 && \text{für } 0 < r < n,\ \nu_1 = 1 \text{ oder } r = 0, n. \end{aligned} \tag{68}$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{m}\, T_1\,[U\,(\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)] = \frac{t}{p}\,(u_\mu\, u_\nu\, d_\mu\, d_\nu) \tag{69}$$

und müssen

$$\frac{t}{p}\, u_\mu\, u_\nu\, d_\mu\, d_\nu = d_\nu\, s_{\mu\nu} \qquad (\mu \geqq \nu) \tag{70}$$

mit

$$s_{\mu\mu} \equiv 2\, s_{\mu\nu} \equiv 0 \ \ (1) \tag{71}$$

erfüllen. Gleichwertig damit ist $p \mid t\, u_\mu$ für $\mu = 1, 2, \ldots, r$. Als einzige Bedingung verbleibt demnach die Beschränkung auf

$$0 < r < n, \ \nu_1 > 1 \qquad \text{im Fall} \quad p \nmid t.$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist

$$a\left(\frac{1}{m}\, T_1\,[U\,(\delta_{\mu\nu}\, d_\mu)]\right) = a(w), \tag{72}$$

wenn w den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $\dfrac{t\, u_\mu\, u_\nu\, d_\mu\, d_\nu}{p}$ bezeichnet.

Hierfür kann auch

$$w = \frac{t}{p}\,(u_1\,d_1,\,u_2\,d_2,\,\ldots,\,u_n\,d_n)^2 \tag{73}$$

genommen werden. Man stellt leicht fest, daß

$$(u_1\,d_1,\,u_2\,d_2,\,\ldots,\,u_n\,d_n) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r = n \quad \text{und} \quad 0 < r < n,\ \nu_1 = 1\,, \\ p & \text{für} \quad r = 0 \quad \text{und} \quad 0 < r < n,\ \nu_1 > 1 \end{cases}$$

ist, woraus

$$w = \begin{cases} \dfrac{t}{p} & \text{für} \quad r = n \quad \text{und} \quad 0 < r < n\,,\ \nu_1 = 1\,, \\ t\,p & \text{für} \quad r = 0 \quad \text{und} \quad 0 < r < n\,,\ \nu_1 > 1 \end{cases} \tag{74}$$

erhellt.

In einer Matrix $Q_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}$ sind $r\,n - \nu_1 - \nu_2 - \cdots - \nu_r - \frac{r\,(r-1)}{2}$ Stellen, die unabhängig von einander mit den Zahlen eines festen Restsystems modulo p ausgefüllt werden können. Folglich gibt es im Falle $0 < r < n$

$$p^{r\,n - \nu_1 - \nu_2 - \cdots - \nu_r - \frac{r\,(r-1)}{2}}$$

Matrizen vom Typus $Q_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}$. Schließlich ist noch

$$\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{\,n+1-\nu-k} = p^{(n+1-k)\,(n-r) - \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{r\,(r+1)}{2}} \tag{75}$$

zu beachten. Aus (63) folgt dann, wenn $a\,(w) = 0$ für nicht ganzes w gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
(76)\quad b\,(t) &= c_{n\,k}\,(p) \sum_{r=0}^{n}{}' \sum_{U}{}' a\,(w)\, p^{(n+1-k)\,(n-r) - \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{r\,(r+1)}{2}} \\
&= c_{n\,k}\,(p) \left(a\,(t\,p)\, p^{\frac{n\,(n+1)}{2} - n\,k} + a\left(\frac{t}{p}\right)\right) \\
&\quad + c_{n\,k}\,(p) \sum_{r=1}^{n-1}{}' \sum_{Q_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}}{}' a\,(w)\, p^{(n+1-k)\,(n-r) - \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{r\,(r+1)}{2}} \\
&= c_{n\,k}\,(p) \left(a\,(t\,p)\, p^{\frac{n\,(n+1)}{2} - n\,k} + a\left(\frac{t}{p}\right)\right) \\
&\quad + c_{n\,k}\,(p) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_r \leqq n}{}' a\,(w)\, p^{\frac{n\,(n+1)}{2} + (r-n)\,k - \nu_1 - \nu_2 - \cdots - \nu_r} \\
&= c_{n\,k}\,(p)\, a\,(t\,p)\, p^{\frac{n\,(n+1)}{2} - n\,k} \left(1 + \sum_{r=1}^{n-1}{}' \sum_{1 < \nu_1 < \cdots < \nu_r \leqq n}{}' p^{r\,k - \nu_1 - \nu_2 - \cdots - \nu_r}\right) \\
&\quad + c_{n\,k}\,(p)\, a\left(\frac{t}{p}\right) p^{\frac{n\,(n+1)}{2} - n\,k + (k-1)} \left(p^{-\frac{n\,(n+1)}{2} + n\,k - (k-1)} + \right. \\
&\quad \left. + 1 + \sum_{r=2}^{n-1}{}' \sum_{1 < \nu_2 < \cdots < \nu_r \leqq n}{}' p^{(r-1)\,k - \nu_2 - \nu_3 - \cdots - \nu_r}\right).
\end{aligned}$$

In der letzten Klammer kann das erste Glied in die Doppelsumme mit $r = n$ einbezogen werden. Ersetzt man hier noch $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_r$ durch $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}$

und nun $r-1$ durch r, so erhält man Übereinstimmung mit der vorletzten Klammer. Wir finden

$$
\begin{aligned}
(77) \qquad b(t) &= c_{nk}(p)\, p^{\frac{n(n+1)}{2} - nk} \left(a(t\,p) + a\left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} \right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n-1}{}' \sum_{1 < \nu_1 < \dots < \nu_r \leqq n}{}' p^{rk - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_r} \right) \\
&= c_{nk}(p)\, p^{\frac{n(n+1)}{2} - nk} \prod_{\nu=2}^{n} (1 + p^{k-\nu}) \left(a(t\,p) + a\left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} \right) \\
&= c_{nk}(p)\, p^{1-k} \prod_{\nu=2}^{n} (1 + p^{\nu-k}) \left(a(t\,p) + a\left(\frac{t}{p}\right) p^{k-1} \right),
\end{aligned}
$$

nach (23) und (24) also

$$(78) \qquad b(t) = \sum_{d \mid t,\, p}{}' a\left(\frac{t\,p}{d^2}\right) d^{k-1},$$

wobei über alle gemeinsamen positiven Teiler von t, p summiert wird. Auf der rechten Seite der Gleichung steht, wie schon HECKE gezeigt hat, der t-te FOURIER-Koeffizient der Modulform $f(Z) \mid \Phi^{n-1} \tau(p)$. Es gilt also

Satz 7: *Für jede Primzahl p ist $\tau(p)\, \Phi^{n-1} = \Phi^{n-1}\, \tau(p)$.*

§ 4. Die Vertauschungsregel $\tau(p)\, \Phi = \Phi\, \tau(p)$.

Wir stellen zunächst einige Ergebnisse über POINCARÉsche Reihen zusammen. Es handelt sich um die Reihen

$$(79) \qquad g(Z, T) = g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T)} \sum_{\substack{\varrho \subset \mathsf{S}_0 \\ P \text{ primitiv}}}{}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} \mid \varrho\,.$$

Dabei ist $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} [V]$, V unimodular, $T_1^{(s)} > 0$, $P = P^{(n,s)}$, $\varepsilon(T)$ die Anzahl der Einheiten von T_1 im Falle $s > 0$ und 1 im Falle $s = 0$. Verstehen wir unter A_0 die Gruppe der Modulsubstitutionen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit $C = O$, so bezeichnet S_0 ein Repräsentantensystem der Linksrestklassen von A_0 in M_n:

$$(80) \qquad \mathsf{M}_n = \sum_{\varrho \subset \mathsf{S}_0}{}' \mathsf{A}_0\, \varrho\,.$$

Die Reihen $g(Z, T)$ konvergieren für $k > n + s + 1$. Wie bisher soll k im folgenden stets gerade vorausgesetzt werden.

In [6]) konnte gezeigt werden:

Satz 8: *(a) Für $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $T_1^{(s)} > 0$, $k > n + s + 1$ ist*

$$(81) \qquad g(Z, T) \mid \Phi = \begin{cases} 0 & \text{für } \quad s = n\,, \\ g(Z^*, T^*) & \text{für } \quad s < n\,. \end{cases}$$

Dabei entstehen Z^*, T^* aus Z, T durch Streichen der letzten Zeile und Spalte.

(b) Für eine Spitzenform $f(Z) \subset \mathfrak{S}_k^{(n)}$ und $k > n + s + 1$ ist

$$(f(Z), g(Z, T)) = \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon(T)} a(T) |T|^{\frac{n+1}{2} - k} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2} - nk} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(k - \dfrac{n+\nu}{2}\right) & \text{für } s = n, \\ 0 & \text{für } s < n. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $a(T)$ den FOURIER-Koeffizienten *von $f(Z)$ zur Exponentenmatrix T.*

(c) Im Falle $k > 2n + 1$, $s = n$ steht $g(Z, T)$ senkrecht auf allen Spitzenformen, deren FOURIER-*Koeffizient zur Exponentenmatrix T verschwindet. $g(Z, T)$ ist durch diese Eigenschaft in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*

Hieraus ergab sich:

Satz 9: *(a) Für $k > 2n + 1$ wird $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ durch Φ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$ abgebildet.*

(b) Im Falle $k > 2n + 1$ wird $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ von den Reihen $g(Z, T)$ mit $s = n$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ von den Reihen $g(Z, T)$ mit $s < n$ erzeugt.

Für Satz 3 ergibt sich auf Grund von Satz 8 (a) und Satz 9 (a) mit Hilfe vollständiger Induktion nach n leicht folgende Verschärfung:

Satz 10: *Ist $k > 2n + 1$, so wird $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ $(\nu \leq n)$ von den Reihen $g(Z, T)$ mit $s = \nu$ erzeugt und $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ $(\nu < n)$ durch Φ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)}$ abgebildet: $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} | \Phi = \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)}$.*

Unter der Diskriminante $\Delta(T)$ von T verstehen wir 1, wenn $T = O$ ist, und die Determinante $|T_1|$ sonst, wenn $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} [V]$, V unimodular, $T_1^{(s)} > 0$ ist. Ferner sei $\delta_0 = 1$ und $\delta_s = 2$ für $s > 0$.

Satz 8 (b) gestattet nun folgende Verallgemeinerung:

Satz 11: *Für $k > 2n + 1$ und $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ ist*

$$(82) \quad (f(Z), g(Z, T)) = \begin{cases} \dfrac{\delta_s}{\varepsilon(T)} a(T) (\Delta(T))^{\frac{s+1}{2} - k} \pi^{\frac{s(s-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{s(s+1)}{2} - sk} \prod\limits_{\nu=1}^{s} \Gamma\left(k - \dfrac{s+\nu}{2}\right) & \\ & \text{für } s = \nu, \\ 0 & \text{für } s \neq \nu. \end{cases}$$

Dabei ist $a(T)$ der Entwicklungskoeffizient von $f(Z)$ zur Exponentenmatrix T.

Beweis: Da die Teilscharen $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)}, \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}, \ldots, \mathfrak{S}_{kn}^{(n)}$ paarweise orthogonal sind, so folgt aus $g(Z, T) \subset \mathfrak{S}_{ks}^{(n)}$ jedenfalls die Behauptung für $s \neq \nu$. Im Falle $s = \nu$ ist nach (39)

$$(f(Z), g(Z, T)) = (f(Z) | \Phi^{n-s}, g(Z, T) | \Phi^{n-s}).$$

Ist $s > 0$, so erhält man die angegebene Formel auf Grund der beiden Aussagen von Satz 8. Wenn $s = 0$ ist, kann man die Formel direkt bestätigen.

Satz 11 führt sofort zu einer Verallgemeinerung von Satz 8 (c):

Satz 12: *Im Falle $k > 2n+1$ steht $g(Z, T)$ senkrecht auf allen Formen der Schar $\mathfrak{S}_{ks}^{(n)}$, deren* FOURIER-*Koeffizient zur Exponentenmatrix T verschwindet. Durch diese Eigenschaft ist $g(Z, T)$ in $\mathfrak{S}_{ks}^{(n)}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*

Wir untersuchen nun die Wirkung des Operators $\tau(m)$ auf die POINCARÉschen Reihen. Nach (79) erhält man

$$g(Z, T) \mid \tau(m) = \frac{c_{nk}(m)}{\varepsilon(T)} \sum_{P \text{ primitiv}}' \sum_{\substack{\varrho \subset \mathsf{S}_0 \\ \sigma \subset \mathsf{V}_m}}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} \mid \varrho\, \sigma. \tag{83}$$

Die Produkte $\varrho\,\sigma$ durchlaufen ein Repräsentantensystem der Linksrestklassen von A_0 in $\mathsf{O}_n^{(m)}$. W_m bezeichne ein beliebiges Repräsentantensystem dieser Art. Dann ist also

$$g(Z, T) \mid \tau(m) = \frac{c_{nk}(m)}{\varepsilon(T)} \sum_{P \text{ primitiv}}' \sum_{\sigma \subset \mathsf{W}_m}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} \mid \sigma \tag{84}$$

und

$$\mathsf{O}_n^{(m)} = \sum_{\sigma \subset \mathsf{W}_m}' \mathsf{A}_0\, \sigma. \tag{85}$$

Wir wollen nun zeigen, daß in (83) ϱ mit σ vertauscht werden kann, wenn V_m das in Satz 1 genannte Vertretersystem bezeichnet.

Satz 13: *Durchläuft ϱ ein beliebiges Vertretersystem S_0 der Linksrestklassen von A_0 in M_n und σ das spezielle in Satz 1 genannte Vertretersystem V_m der Linksrestklassen von M_n in $\mathsf{O}_n^{(m)}$, so erhält man in den Produkten $\sigma\,\varrho$ ein Vertretersystem W_m der Linksrestklassen von A_0 in $\mathsf{O}_n^{(m)}$.*

Beweis: 1. Wir gehen von einer beliebigen Substitution

$$\tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{O}_n^{(m)}$$

aus und bestimmen unimodulare Matrizen U, V so, daß

$$(C, D) = U\,(F, O)\,V$$

wird. Mit $G = U\,F$ stellt $G^{-1}C$, $G^{-1}D$ offenbar ein teilerfremdes symmetrisches Matrizenpaar dar. Es gibt dann einen eindeutig bestimmten Vertreter $\varrho \subset \mathsf{S}_0$, dessen zweite Matrizenzeile mit $G^{-1}C$, $G^{-1}D$ links assoziiert ist. Infolgedessen ist

$$\tau\,\varrho^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ O & D_1 \end{pmatrix} \subset \mathsf{O}_n^{(m)}.$$

Wenn nun $\tau\,\varrho^{-1} = \omega\,\sigma$, wobei σ einen Vertreter aus V_m und ω eine Modulsubstitution bezeichnet, so folgt aus der speziellen Gestalt von $\tau\,\varrho^{-1}$ und σ, daß ω bereits in A_0 liegt. τ und $\sigma\,\varrho$ gehören also derselben Linksrestklasse von A_0 an.

2. Die aus den Vertretern $\sigma, \tilde{\sigma}$ und $\varrho, \tilde{\varrho}$ gebildeten Produkte $\sigma\,\varrho$ und $\tilde{\sigma}\,\tilde{\varrho}$ mögen in derselben Linksrestklasse von A_0 liegen. Dann sind die zweiten Matrizenzeilen von ϱ und $\tilde{\varrho}$ links assoziiert. Folglich ist $\varrho = \tilde{\varrho}$, also auch $\sigma = \tilde{\sigma}$.

Im folgenden möge σ das in Satz 6 beschriebene Vertretersystem V_m durchlaufen. Doch soll nun U'^{-1} an Stelle von U geschrieben werden. Das hat zur

Folge, daß U ein Vertretersystem der Rechtsrestklassen von $\mathsf{U}_n'(\mathfrak{d})$ in U_n durchläuft, wobei $\mathsf{U}_n'(\mathfrak{d})$ durch Transposition aller Matrizen aus $\mathsf{U}_n(\mathfrak{d})$ entsteht.

S_0 bezeichne das von SIEGEL[5]) angegebene System der Substitutionen

$$\varrho = \begin{pmatrix} A_0 & O & B_0 & O \\ O & E & O & O \\ C_0 & O & D_0 & O \\ O & O & O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & O \\ O & V^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \tag{86}$$

wobei

1. $C_0^{(t)}, D_0^{(t)}$ ein volles System links nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Paare mit $|C_0| \neq 0$ durchläuft und jedes Paar C_0, D_0 auf genau eine Weise zu einer Modulsubstitution

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_t$$

ergänzt wird,

2. $R^{(n,t)}$ ein volles System rechts nicht assoziierter primitiver Matrizen durchläuft und jede Matrix R auf genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix $V = (R \;\; *)$ ergänzt wird,

3. t alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ durchläuft.

Der Fall $\varrho = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$ soll durch $t = 0$ gekennzeichnet sein.

Sei (C, D) die zweite Matrizenzeile von $\sigma\,\varrho$; dann gilt

$$|C Z + D|^{-k} = \left(\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{-k}\right) |C_0 Z[R] + D_0|^{-k}. \tag{87}$$

Ist $t = 0$, so tritt hier kein Determinantenfaktor auf. Beachtet man noch

$$\operatorname{Sp}\left(T_1(\sigma\,\varrho(Z))[P]\right) = \operatorname{Sp}\left(m\, T_1(\varrho(Z))\left[U\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{d_\nu}\right) P\right] + T_1\left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)[P]\right), \tag{88}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &g(Z, T)\,|\,\tau(m) \\ &= \frac{c_{nk}(m)}{\varepsilon(T)} \sum_P{}' \sum_{\sigma \subset \mathsf{V}_m} \sum_{\varrho \subset \mathsf{S}_0} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])}\,|\,\sigma\,\varrho \\ &= \frac{c_{nk}(m)}{\varepsilon(T)} \sum_P{}' \sum_{\mathfrak{d}} \sum_U{}' \sum_B \sum_t \sum_{C_0, D_0}{}' \sum_R{}' \left(\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{-k}\right) \times \\ &\quad \times |C_0 Z[R] + D_0|^{-k} \exp 2\pi i \operatorname{Sp}\left(m\, T_1(\varrho(Z))\left[U\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{d_\nu}\right) P\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + T_1\left(\frac{b_{\mu\nu}}{d_\nu}\right)[P]\right). \end{aligned} \tag{89}$$

Wir beschränken uns nun auf den Primzahlfall $m = p$. Es sei $\mathfrak{d}_h$ die Spalte mit den Elementen

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_h = 1, \;\; d_{h+1} = d_{h+2} = \cdots = d_n = p \tag{90}$$

und

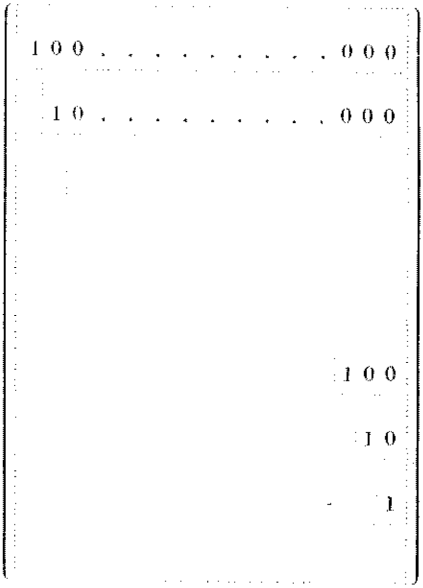
$$F_h = \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{d_\nu}\right). \tag{91}$$

An Stelle von $\mathfrak{d}$ wird nun über h von 0 bis n summiert.

U durchläuft ein Vertretersystem der Rechtsrestklassen von $\mathfrak{U}'_n(\mathfrak{d}_k)$ in $\mathfrak{U}_n$, wobei $\mathfrak{U}'_n(\mathfrak{d}_h)$ die Gruppe der unimodularen Substitutionen

$$W \equiv \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix} (p) \qquad \text{mit} \quad O = O^{(h,\, n-h)} \tag{92}$$

bezeichnet. Mit einer oben angegebenen Schlußweise zeigt man: Ein Vertretersystem der gewünschten Art erhält man, indem man sich ein geeignetes System primitiver Matrizen $Q = Q^{(n,\, n-h)}$ verschafft und jede Matrix dieses Systems auf genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix $U = (*\ Q)$ ergänzt. Ein geeignetes System erhält man in den Matrizen mit nebenstehendem Besetzungsschema, das in folgender Weise auszufüllen ist: In die letzten Zeilen der $n-h$ Kästchen sind Nullen zu setzen mit Ausnahme der linken Endstellen; hier ist jeweils 1 einzutragen. Die übrigen Stellen in den Kästchen sind unabhängig voneinander mit den Zahlen eines festen Restsystems modulo p auszufüllen, während außerhalb der Kästchen nur Nullen zu setzen sind. Tragen die letzten Zeilen der $n-h$ Kästchen in der vollen Matrix die Indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-h}$, so ist



$$1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{n-h} \leqq n\,.$$

Umgekehrt ist auch jedes derartige System zuzulassen. Einen zu $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-h}$ gehörigen Repräsentanten bezeichnen wir mit $Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-h}}$. Im folgenden soll also

$$U = \begin{cases} E & \text{für} \quad h = 0, n\,, \\ (*\ Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-h}}) & \text{für} \quad 0 < h < n \end{cases} \tag{93}$$

genommen werden.

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} g(Z, T) \mid \tau(p) = \frac{c_{nk}(p)}{\varepsilon(T)} \sum_{P} \sum_{h=0}^{n}{}' \sum_{Q_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-h}}}' \sum_{B} \sum_{t=0}^{n}{}' \sum_{C_0, D_0}' \sum_{R}' p^{-(n-h)k} \times \\ \times \left| C_0 Z[R] + D_0 \right|^{-k} \exp 2\pi i \operatorname{Sp}\bigl(p\, T_1(\varrho(Z))\,[U F_h P] + T_1(B F_h)\,[P]\bigr). \end{aligned} \tag{94}$$

Zur Berechnung von $g(Z, T) \mid \tau(p)\, \Phi$ führen wir den in (33) beschriebenen Grenzübergang aus. Mit einer in [6]) auseinandergesetzten Methode läßt sich zeigen, daß dieser Grenzübergang in der unendlichen Reihe (94) gliedweise vorgenommen werden kann. Wir führen die Grenzwertberechnung mit

$$Z = \begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u}' & i\lambda \end{pmatrix}, \quad Z^* \subset \mathfrak{H}_{n-1}, \quad \lambda > 0 \tag{95}$$

aus. Enthält die letzte Zeile von R eine von 0 verschiedene Zahl, so gilt, wie in [6]) bewiesen wurde.

$$\lim_{\lambda\to\infty} |C_0 Z[R] + D_0| = \infty .$$

Folglich darf

$$R = \begin{pmatrix} R^* \\ \mathfrak{n}' \end{pmatrix} \tag{96}$$

angenommen werden. Dies hat $t < n$ zur Folge. R^* ist wieder primitiv. Es gilt nun

$$|C_0 Z[R] + D_0| = |C_0 Z^*[R^*] + D_0| \tag{97}$$

Eine einfache Rechnung ergibt ferner

$$\varrho(Z) = \begin{pmatrix} \varrho^*(Z^*) & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & i\lambda \end{pmatrix} \tag{98}$$

mit

$$\varrho^* = \begin{pmatrix} A_0 & O & B_0 & O \\ O & E & O & O \\ C_0 & O & D_0 & O \\ O & O & O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{*\prime} & O \\ O & V^{*-1} \end{pmatrix}, \quad V^* = (R^* \; *) . \tag{99}$$

Die Matrizen A_0, B_0, C_0, D_0 sind hier so zu ergänzen, daß eine Modulsubstitution $(n-1)$-ten Grades herauskommt. Zwischen ϱ^* und C_0, D_0, R^* besteht also ein analoger Zusammenhang wie zwischen ϱ und C_0, D_0, R.

Wir untersuchen nun den Exponenten in (94). Wird $\varrho(Z) = X_\varrho + i\,Y_\varrho$ gesetzt, so folgt nach (98)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{Sp}(p\,T_1\,Y_\varrho[U\,F_h\,P]) = \infty ,$$

wenn die letzte Zeile von $U\,F_h\,P$ von 0 verschiedene Zahlen enthält. Diese Fälle können gleichfalls ausgeschieden werden. Auf Grund des Besetzungsschemas der Matrizen Q kann mühelos erreicht werden, daß die letzte Zeile von U aus den Zahlen

$$0, 0, \ldots, 0, 1 \quad \text{oder} \quad 1, 0, \ldots, 0, 0$$

besteht, je nachdem $\nu_{n-h} = n$ oder $\nu_{n-h} < n$ ist. Wir dürfen demnach

$$U = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathfrak{n} & U^* \\ 1 & \mathfrak{n}' \end{pmatrix} & \text{für} \quad \nu_{n-h} < n , \\ \begin{pmatrix} U^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix} & \text{für} \quad \nu_{n-h} = n \quad \text{oder} \quad h = n \end{cases} \tag{100}$$

setzen. Besteht die letzte Zeile von $U\,F_h\,P$ aus Nullen, so bedeutet dies also, daß

$$P = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathfrak{n}' \\ P^* \end{pmatrix} & \text{für} \quad \nu_{n-h} < n , \\ \begin{pmatrix} P^* \\ \mathfrak{n}' \end{pmatrix} & \text{für} \quad \nu_{n-h} = n \quad \text{oder} \quad h = n \end{cases} \tag{101}$$

ist. Insbesondere darf also auch $s < n$ angenommen werden. Die Matrix P^* ist wieder primitiv.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} U^* &= (*\; Q^*) , \\ Q^* &= \begin{cases} Q^{*(n-1,\,n-h)} & \text{für} \quad \nu_{n-h} < n , \\ Q^{*(n-1,\,n-1-h)} & \text{für} \quad \nu_{n-h} = n \quad \text{oder} \quad h = n . \end{cases} \end{aligned} \tag{102}$$

Für $h < n$ entstehe $\mathfrak{d}_h^*$ aus $\mathfrak{d}_h$ durch Streichen des letzten Elements, analog F_h^* aus F_h durch Streichen der letzten Zeile und Spalte. Die Matrizen U^* durchlaufen wieder gewisse Rechtsrepräsentantensysteme. Dies wird zum

Ausdruck gebracht durch

(103)
$$\mathfrak{U}_{n-1} = \sum' U^* \mathfrak{U}'_{n-1}(\mathfrak{d}^*) \qquad \text{für} \quad h < n,$$
$$U^* = E^{(n-1)} \qquad \text{für} \quad h = n.$$

Dabei ist

(104)
$$\mathfrak{d}^* = \begin{cases} \mathfrak{d}^*_{h-1} & \text{für} \quad r_{n-h} < n, \\ \mathfrak{d}^*_h & \text{für} \quad r_{n-h} = n. \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung liefert

(105)
$$U F_h P = \begin{pmatrix} U^* F^* P^* \\ \cdot \quad \mathfrak{u}' \end{pmatrix}$$

mit

(106)
$$F^* = \begin{cases} F^*_{h-1} & \text{für} \quad r_{n-h} < n \quad \text{oder} \quad h = n, \\ F^*_h & \text{für} \quad r_{n-h} = n \end{cases}$$

und

(107)
$$\mathrm{Sp}\left(p\, T_1(\varrho(Z))\,[U F_h P]\right) = \mathrm{Sp}\left(p\, T_1(\varrho^*(Z^*))\,[U^* F^* P^*]\right).$$

Der zweite Bestandteil des Exponenten in (93) wird ähnlich behandelt. Sei

(108)
$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11} & \mathfrak{b}'_1 \\ \mathfrak{b}_2 & B^* \end{pmatrix} & \text{für} \quad r_{n-h} < n \quad \text{oder} \quad h = n, \\ \begin{pmatrix} B^* & \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{b}'_2 & b_{nn} \end{pmatrix} & \text{für} \quad r_{n-h} = n. \end{cases}$$

Dann findet man

(109)
$$\mathrm{Sp}\,(T_1(B F_h)\,[P]) = \mathrm{Sp}\,(T_1(B^* F^*)\,[P^*]).$$

Wir stellen fest, daß die Reihenglieder von (94) mit einem von 0 verschiedenen Grenzwert von λ überhaupt nicht abhängen. Es ergibt sich

(110)
$$g(Z, T)\,|\,\tau(p)\,\Phi$$
$$= \frac{c_{nk}(p)}{\varepsilon(T)} \sum_{h=0}^{n} \sum_{Q_{r_1 r_2 \ldots r_{n-h}}} \sum'_{P^*} \sum'_{B} \sum_{t=0}^{n-1}{}' \sum'_{C_0, D_0} \sum'_{R^*} p^{-(n-h)k} \times$$
$$\times |C_0 Z^*[R^*] + D_0|^{-k} \exp 2\pi i\, \mathrm{Sp}\left(p\, T_1(\varrho^*(Z^*))\,[U^* F^* P^*] + T_1(B^* F^*)\,[P^*]\right)$$
$$= \frac{c_{nk}(p)}{\varepsilon(T)} \sum_{h=1}^{n} \sum'_{\substack{Q^*(n-1,\, n-h) \\ r_{n-h} < n}} \sum'_{P^*} \sum'_{\substack{b_{11}, \mathfrak{b}_2 \\ B^*}} \sum_{t=0}^{n-1}{}' \sum'_{C_0, D_0} \sum'_{R^*} p^{-(n-h)k} \times$$
$$\times |C_0 Z^*[R^*] + D_0|^{-k} \exp 2\pi i\, \mathrm{Sp}\left(p\, T_1(\varrho^*(Z^*))\,[U^* F^*_{h-1} P^*] + T_1(B^* F^*_{h-1})[P^*]\right)$$
$$+ \frac{c_{nk}(p)}{\varepsilon(T)} \sum_{h=0}^{n-1}{}' \sum'_{\substack{Q^*(n-1,\, n-1-h) \\ \mathfrak{u},\, r_{n-h} = n}} \sum'_{P^*} \sum'_{\substack{b_{nn}, \mathfrak{b}_2 \\ B^*}} \sum_{t=0}^{n-1}{}' \sum'_{C_0, D_0} \sum'_{R^*} p^{-(n-h)k} \times$$
$$\times |C_0 Z^*[R^*] + D_0|^{-k} \exp 2\pi i\, \mathrm{Sp}\left(p\, T_1(\varrho^*(Z^*))\,[U^* F^*_h P^*] + T_1(B^* F^*_h)\,[P^*]\right).$$

Die Reihenglieder hängen von den Größen $b_{11}, b_{nn}, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{u}$ nicht ab, so daß die Summation über $b_{11}, \mathfrak{b}_2$ bzw. $b_{nn}, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{u}$ sofort ausgeführt werden kann. Aus Satz 6 entnimmt man

$$b_{\nu 1} \equiv b_{n\nu} \equiv 0\ (1), \quad 0 \leqq b_{\nu 1} < d_1, \quad 0 \leqq b_{n\nu} < d_\nu \qquad \text{für alle } \nu.$$

Daraus folgt

(111)
$$\sum'_{b_{11}, \mathfrak{b}_2} 1 = 1 \qquad \text{im Falle} \quad r_{n-h} < n,$$
$$\sum'_{b_{nn}, \mathfrak{b}_2} 1 = p^{n-h} \qquad \text{im Falle} \quad r_{n-h} = n.$$

Man bestätigt leicht

$$\sum_{U} 1 = p^h \qquad \text{im Falle} \quad \nu_{n-h} = n. \tag{112}$$

Ersetzt man in dem ersten Summenkomplex von (110), in welchem über h von 1 bis n summiert wird, h durch $h+1$, so lassen sich die beiden Summenkomplexe zusammenfassen. Man erhält

$$\begin{aligned} (113)\quad & g(Z,T)\,|\,\tau(p)\,\Phi \\ & = \frac{c_{nk}(p)}{\varepsilon(T)}(1+p^{n-k}) \sum_{h=0}^{n-1} \sum'_{Q^*(n-1,\,n-1-h)} \sum'_{P^*} \sum'_{B^*} \sum_{t=0}^{n-1}{}' \sum'_{C_0,\,D_0} \sum'_{R^*} \times \\ & \times p^{-(n-1-h)k} \left| C_0 Z^*[R^*] + D_0 \right|^{-k} \\ & \times \exp 2\pi i \,\mathrm{Sp}\left(p\,T_1(\varrho^*(Z^*))[U^* F_h^* P^*] + T_1(B^* F_h^*)[P^*]\right) \quad \text{für } s < n \end{aligned}$$

Dies ist unsere Ausgangsreihe (94), jedoch gebildet für $n-1$ an Stelle von n. Auch der Normierungsfaktor stimmt nach (23). Dazu kommt noch

$$g(Z,T)\,|\,\tau(p)\,\Phi = 0 \qquad \text{für} \quad s = n. \tag{114}$$

Für $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ und $s < n$ folgt aus (113)

$$g(Z,T)\,|\,\tau(p)\,\Phi = g(Z^*,T^*)\,|\,\tau(p), \tag{115}$$

wobei T^* aus T durch Streichen der letzten Zeile und Spalte hervorgeht. Satz 8 (a) ergibt schließlich

$$g(Z,T)\,|\,\tau(p)\,\Phi = g(Z,T)\,|\,\Phi\,\tau(p). \tag{116}$$

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen folgt nun aus Satz 9 (b):

Satz 14: *Für jede Primzahl p und $k > 2n+1$ ist $\tau(p)\,\Phi = \Phi\,\tau(p)$.*

Wiederholte Anwendung dieser Regel liefert

$$\tau(p)\,\Phi^\nu = \Phi^\nu\,\tau(p) \qquad \text{für } \nu < n. \tag{117}$$

Um dieser Beziehung auch noch für $\nu = n$ einen Sinn zu geben, soll für beliebiges m und eine beliebige Konstante f (= Form 0-ten Grades)

$$f\,|\,\tau(m) = c_{0k}(m)\,f \qquad \text{mit} \quad c_{0k}(m) = \sum_{d/m} d^{k-1} \tag{118}$$

vereinbart werden.

Sei $g(z)$ eine beliebige Modulform ersten Grades mit dem konstanten Koeffizienten $a(0)$. Wie HECKE gezeigt hat, ist dann $c_{0k}(m)\,a(0)$ der konstante Koeffizient von $g(z)\,|\,\tau(m)$. Wir können also

$$g(z)\,|\,\tau(m)\,\Phi = g(z)\,|\,\Phi\,\tau(m) \qquad \text{für} \quad g(z) \subset \mathfrak{M}_k^{(1)} \tag{119}$$

notieren. Insbesondere folgt nun auch

$$\tau(p)\,\Phi^n = \Phi^n\,\tau(p). \tag{120}$$

Wir merken noch an, daß (22) und (23) auch noch für $n = 0$ bzw. $n = 1$ gelten.

§ 5. Eigenfunktionen.

Aus der eben bewiesenen Vertauschungsregel ergeben sich wichtige Eigenschaften für die Modulformen n-ten Grades.

Satz 15: *Die linearen Scharen $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ sind invariant bezüglich der Operatoren $\tau(p)$, wenn $k > 2n+1$ und p Primzahl ist:*

$$\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}\,|\,\tau(p) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}. \tag{121}$$

Beweis: Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 5. Sei $n > 1$ und Satz 15 richtig für $n-1$ an Stelle von n. Dann ist nach Satz 10 und Satz 14 für $\nu < n$:

$$\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \,|\, \Phi = \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)} \supset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n-1)} \,|\, \tau(p) = \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \,|\, \Phi\,\tau(p) = \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \,|\, \tau(p)\,\Phi,$$

also $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} \supset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)} | \tau(p)$; denn beide Scharen liegen nach Satz 5 in $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ wird durch Φ umkehrbar eindeutig abgebildet. Der ausgelassene Fall $\nu = n$ wird durch Satz 5 erledigt.

Auf Grund der mitgeteilten Sätze kann die von H. PETERSSON[9]) angegebene Formel

$$g(z, p) \,|\, \tau(q) = g(z, q) \,|\, \tau(p) \tag{122}$$

mühelos verallgemeinert werden. Die Formel gilt für beliebige natürliche Zahlen p, q. Wir beschränken uns darauf, für p und q Primzahlen zu nehmen. Außerdem werde $k > 2n + 1$ vorausgesetzt. Bezeichnet T_p eine ganze symmetrische Matrix $\geqq 0$ vom Rang 1 mit der Diskriminante p, so gilt

$$g(Z, T_p) \,|\, \Phi^{n-1} = g(z, p), \quad \text{analog} \quad g(Z, T_q) \,|\, \Phi^{n-1} = g(z, q),$$

folglich nach Satz 7

$$(g(Z, T_p) \,|\, \tau(q) - g(Z, T_q) \,|\, \tau(p)) \,|\, \Phi^{n-1} = 0.$$

Da die Differenz der Formen in der Klammer der Schar $\mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ angehört und diese durch Φ^{n-1} umkehrbar eindeutig abgebildet wird, ist nun

$$g(Z, T_p) \,|\, \tau(q) = g(Z, T_q) \,|\, \tau(p) \tag{123}$$

zu schließen.

Satz 16: *Es sei $k > 2n + 1$, p eine Primzahl, $f(Z), g(Z)$ ein Paar von Modulformen aus $\mathfrak{M}_k^{(n)}$. Dann ist*

$$(f(Z) \,|\, \tau(p), g(Z)) = (f(Z), g(Z) \,|\, \tau(p)). \tag{124}$$

Beweis: Sei

$$f(Z) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(Z), \quad g(Z) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(Z) \quad \text{mit} \quad f_\nu(Z), g_\nu(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}.$$

Nach Satz 15 ist dann auch

$$f_\nu(Z) \,|\, \tau(p), \; g_\nu(Z) \,|\, \tau(p) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}.$$

Wiederholte Anwendung von Satz 4, der auch noch für $n = 0$ gilt, und Satz 14 ergibt dann

$$\begin{aligned}
(f(Z) \,|\, \tau(p), g(Z)) &= \sum_{\nu=0}^{n} (f_\nu(Z) \,|\, \tau(p)\,\Phi^{n-\nu}, \; g_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (f_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}\,\tau(p), \; g_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (f_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}, \; g_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}\,\tau(p)) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} (f_\nu(Z) \,|\, \Phi^{n-\nu}, \; g_\nu(Z) \,|\, \tau(p)\,\Phi^{n-k}) \\
&= (f(Z), \; g(Z) \,|\, \tau(p)).
\end{aligned}$$

[9]) PETERSSON, H.: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **49**, 49—75 (1939).

Satz 17: *Ist $k > 2n + 1$, so gibt es in $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ eine Basis $f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_j(Z)$, die aus Eigenfunktionen der Operatoren $\tau(p)$ besteht:*

$$f_\mu(Z) \mid \tau(p) = a_\mu(p) f_\mu(Z). \tag{125}$$

Dabei bezeichnet p eine beliebige Primzahl.

Beweis: Wir wählen in $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(n)}$ eine normierte Orthogonalbasis $g_r(Z)$ ($r = 1, 2, \ldots, j$) und bestimmen die Darstellungsmatrizen $\Lambda(p) = (\lambda_{rs}(p))$ der Operatoren $\tau(p)$ bezüglich dieser Basis. Aus

$$g_r(Z) \mid \tau(p) = \sum_s \lambda_{rs}(p) g_s(Z)$$

folgt dann mit Hilfe von Satz 16, daß die Matrizen $\Lambda(p)$ hermitisch sind. Nach Satz 2 sind sie vertauschbar, sie können also mit Hilfe einer unitären Transformation simultan auf Diagonalgestalt transformiert werden. Die transformierte Basis besteht dann aus Eigenfunktionen der Operatoren $\tau(p)$.

Sind $a(T)$ die FOURIER-Koeffizienten einer Modulform und ist $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $T_1 = T_1^{(s)}$, so wird $a(T) = a(T_1)$ gesetzt.

Satz 18: *Ist $k > 2n + 1$, so läßt sich in $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ eine Basis $f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_{\varrho_1}(Z)$ mit folgenden Eigenschaften finden:*

1) *Es ist $f_\mu(Z) \mid \tau(p) = a_\mu(p) f_\mu(Z)$ für alle Primzahlen p.*

2) *Die Eigenwerte $a_\mu(p)$ sind FOURIER-Koeffizienten von $f_\mu(Z)$.*

3) *Wenn $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ und $f(Z) \mid \tau(p) = a(p) f(Z)$ für alle Primzahlen p gilt, dann ist $f(Z) = c f_\mu(Z)$ für ein gewisses μ und eine geeignete Konstante c.*

Beweis: Die Existenz einer Basis $f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_{\varrho_1}(Z)$ mit der Eigenschaft 1) folgt bereits aus Satz 17. Nach Satz 7 wird dann

$$(f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}) \mid \tau(p) = a_\mu(p) f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1};$$

d. h. die Formen ersten Grades $f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}$ sind Eigenfunktionen der HECKEschen Operatoren $T(p)$. Da die $T(p)$ bereits den vollen Ring der HECKEschen Operatoren erzeugen, ist auch

$$(f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}) \tau(m) = a_\mu(m) f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1} \qquad \text{für alle } m.$$

Bei geeigneter Normierung der Formen $f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}$ sind die Eigenwerte $a_\mu(m)$ FOURIER-Koeffizienten von $f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}$, also auch von $f_\mu(Z)$ selbst. Die Eigenschaft 2) ist also realisierbar. Ist $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ Eigenfunktion der Operatoren $\tau(p)$, so folgt zunächst wieder

$$(f(Z) \mid \Phi^{n-1}) \mid \tau(m) = a(m) f(Z) \mid \Phi^{n-1},$$

auf Grund der HECKEschen Theorie also

$$f(Z) \mid \Phi^{n-1} = c f_\mu(Z) \mid \Phi^{n-1}$$

für ein gewisses μ und eine geeignete Konstante c. Da $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ durch Φ^{n-1} umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{M}_k^{(1)}$ abgebildet wird, folgt nun $f(Z) = c f_\mu(Z)$, q. e. d.

Satz 19: *Es sei $k > 2n + 1$. Dann gibt es — je nachdem $k \not\equiv 2 \ (12)$ oder $k \equiv 2 \ (12)$ ist — in $\mathfrak{S}_{k0}^{(n)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(n)}$ genau $\left[\frac{k}{12}\right] + 1$ bzw. $\left[\frac{k}{12}\right]$ verschiedene Formen*

$f(Z)$, deren FOURIER-*Koeffizienten $a(T)$ der folgenden Multiplikationsformel genügen:*

$$(126)\qquad a(p)\,a(T) = c_{nk}(p)\sum_{\mathfrak{d},U}{}' a\left(\frac{1}{p}\,T\,[U\,(\delta_{\mu\nu}\,d_\mu)]\right)\prod_{\nu=1}^{n} d_\nu^{n+1-\nu-k}.$$

Die Summationsbedingungen sind hier dieselben wie in Formel (63), *wenn man dort $m = p$ und $T_1 = T$ setzt. p bezeichnet eine Primzahl. Die so gekennzeichneten Formen $f(Z)$ sind linear unabhängig.*

Beweis: Genügen die FOURIER-Koeffizienten $a(T)$ von $f(Z)$ der angegebenen Multiplikationsformel, so ist nach Herkunft dieser Formel klar, daß $f(Z)\,|\,\tau(p) = a(p)\,f(Z)$ für alle Primzahlen p gilt. Umgekehrt folgt hieraus wieder die Multiplikationsformel. Die restlichen Behauptungen ergeben sich aus Satz 18.

§ 6. Die Operatorentheorie der Modulformen zweiten Grades.

Der Aufwand, der bereits im Primzahlfall $m = p$ erforderlich ist, um einfache Vertauschungsregeln für die Operatoren zu bekommen, berechtigt kaum zu Hoffnungen auf eine befriedigende Erledigung des allgemeinen Falles, in welchem m, n, k keiner Beschränkung unterliegen. Wir wollen nun noch den Fall $n = 2$ ohne weitere Einschränkung für m und k behandeln. Der Reichtum der Theorie an allgemeinen Beziehungen wird dabei etwas besser zur Geltung kommen.

Es sei

$$(127)\qquad f(Z) = \sum_{T \geqq 0}{}' a(T)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)}$$

eine Modulform zweiten Grades. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$(128)\qquad f(Z)\,|\,\tau(m) = \sum_{T \geqq 0}{}' b(T)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)}$$

können mit Hilfe von (63) berechnet werden. Der Fall $n = 2$ gestattet in der Darstellung einige Vereinfachungen. Mit

$$(129)\qquad d_1 = g,\ d_2 = g\,d,\ m = g\,h\,d,\ S_d = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$$

geht (63) in

$$(130)\qquad b(T) = c_{2k}(m)\sum_{\substack{g h d = m\\ U}}{}' a\left(\frac{g}{h\,d}\,T\,[U\,S_d]\right) g\,(g^2\,d)^{1-k}$$

über. Hinsichtlich der Summation ist folgendes zu bemerken: Bei vorgegebenem d durchläuft U ein volles System von unimodularen Matrizen, so daß die ersten Spalten aller U modulo d rechts nicht assoziiert sind und

$$(131)\qquad \frac{1}{h\,d}\,T\,[U\,S_d] = \begin{pmatrix}s_0 & s_1\\ s_1 & d\,s_2\end{pmatrix}\quad \text{mit}\quad s_0 \equiv s_2 \equiv 2\,s_1 \equiv 0\ (1)$$

gilt. Für $T = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$ ergibt sich, wenn $U = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ gesetzt wird,

$$a\left(\frac{g}{h\,d}\,T\,[U\,S_d]\right) = a\left(\frac{g\,t}{h\,d}\begin{pmatrix}\gamma^2 & \gamma\,\delta\,d\\ \gamma\,\delta\,d & \delta^2\,d^2\end{pmatrix}\right) = a\left(\frac{g\,t\,(\gamma, d)^2}{h\,d}\right);$$

denn es ist

$$(\gamma^2,\ \gamma\,\delta\,d,\ \delta^2\,d^2) = (\gamma,\ \delta\,d)^2 = (\gamma,\ d)^2.$$

Wir erhalten nun

$$(132) \qquad b(t) = c_{2k}(m) \sum_{\substack{g h d = m \\ U}} a\left(\frac{g t (\gamma, d)^2}{h d}\right) g (g^2 d)^{1-k}$$

mit der Summationsbeschränkung

$$\frac{t \gamma^2}{h d} \equiv \frac{2 t \gamma \delta}{h} \equiv \frac{t \delta^2}{h} \equiv 0 \, (1) \, .$$

Diese Forderung ergibt sich aus (131); sie kann durch die folgende ersetzt werden:

$$(133) \qquad h/t, \quad h \, d/t \, (\gamma, d)^2.$$

Es darf und soll vorausgesetzt werden, daß der linke untere Koeffizient von U stets d teilt: γ/d. Sind nämlich α, γ teilerfremd vorgegeben, so sind die Bedingungen

$$(\xi, d) = 1, \;\; \gamma \, \xi \equiv \gamma_1 \, (d) \qquad \text{mit} \quad \gamma_1 = (\gamma, d)$$

lösbar und es gilt

$$(\alpha_1, \gamma_1) = 1, \;\; \gamma_1/d, \; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \xi \, (d) \qquad \text{mit} \quad \alpha_1 = \alpha \, \xi \, .$$

Jede unimodulare Matrix U_1 mit der ersten Spalte $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ kann nun bei der Summation in (132) an die Stelle von $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ treten. Die Voraussetzung γ/d ist also in der Tat unwesentlich.

Wir bezeichnen mit $\varphi_d(\gamma)$ die Anzahl der Restklassen α modulo d mit $(\alpha, \gamma, d) = 1$, für welche die Spalten $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ modulo d rechts nicht assoziiert sind. Die Teilerfremdheit von α und γ kann nachträglich durch eine Änderung von α innerhalb seiner Restklasse erreicht werden. Aus (132) folgt mit $\gamma = r$, $d = r s$

$$(134) \qquad b(t) = c_{2k}(m) \sum_{\substack{g h r s = m \\ h/t, \, h s/t r}} a\left(\frac{m t}{(h s)^2}\right) \varphi_{rs}(r) \, g \, (g^2 r s)^{1-k}.$$

Es genügt, wie wir später sehen werden, wenn wir nun den Primzahlpotenzfall $m = p^\mu$ weiter diskutieren. Zunächst ist

$$(135) \qquad \varphi_{p^{\mu+\nu}}(p^\mu) = \begin{cases} p^\nu & \text{für} \quad \mu = 0, \\ \varphi(p^\nu) & \text{für} \quad \mu \geqq 1, \;\; \nu \geqq 0 \end{cases}$$

zu beweisen. Die Behauptung ist klar für $\mu = 0$. Im Falle $\mu > 0$ ist leicht festzustellen, daß $a \equiv a' \, (p^\nu)$, $(a, p) = 1$ notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Kongruenz

$$\begin{pmatrix} a' \\ p^\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ p^\mu \end{pmatrix} x \;\; (p^{\mu+\nu})$$

ist. Man erhält demnach ein volles System modulo $p^{\mu+\nu}$ rechts nicht assoziierter Spalten vom Typus $\begin{pmatrix} a \\ p^\mu \end{pmatrix}$, wenn man a ein primes Restsystem modulo p^ν durchlaufen läßt. Die Anzahl dieser Repräsentanten ist $\varphi(p^\nu)$, wie behauptet wurde.

Unter der Voraussetzung $m = p^\mu$ ist in (134) entweder r ein Teiler von s oder s ein echter Teiler von r. Dementsprechend nehmen wir eine Zerlegung von (134) in zwei Teilsummen vor. In die erste Teilsumme nehmen wir die Glieder mit $s = r\,q$ und in die zweite Teilsumme die mit $r = s\,q$, $q > 1$ auf:

$$
\begin{aligned}
b\,(t) &= c_{2k}\,(p^u) \sum_{\substack{g\,h\,r^2\,q = p^u \\ h/t,\ h\,q/t}} a\left(\frac{p^u\,t}{(h\,r\,q)^2}\right) \varphi_{r^2 q}\,(r)\; g\,(g^2\,r^2\,q)^{1-k} \\
&\quad + c_{2k}\,(p^u) \sum_{\substack{g\,h\,s^2\,q = p^u \\ q > 1,\ h/t}}' a\left(\frac{p^u\,t}{(h\,s)^2}\right) \varphi_{s^2 q}\,(s\,q)\; g\,(g^2\,s^2\,q)^{1-k} \\
&= c_{2k}\,(p^u) \sum_{r^2/p^u}' \sum_{l/(p^u r^{-2},\,t)}' a\left(\frac{p^u\,r^{-2}\,t}{l^2}\right) \sum_{\substack{g\,l = p^u r^{-2} \\ h\,q = l}}' \varphi_{r^2 q}\,(r)\; g\,(g^2\,r^2\,q)^{1-k} \\
&\quad + c_{2k}\,(p^u) \sum_{s^2/p^u}' \sum_{h/(p^u s^{-2},\,t)}' a\left(\frac{p^u\,s^{-2}\,t}{h^2}\right) \sum_{\substack{g\,q = p^u s^{-2} h^{-1} \\ q > 1}}' \varphi_{s^2 q}\,(s\,q)\; g\,(g^2\,s^2\,q)^{1-k}.
\end{aligned} \tag{136}
$$

Wir ersetzen die Summationsbuchstaben r, l durch s, h, um die Summen in folgender Weise vereinigen zu können:

$$
\begin{aligned}
b\,(t) &= c_{2k}\,(p^u) \sum_{s^2/p^u}' \sum_{h/(p^u s^{-2},\,t)}' a\left(\frac{p^u\,s^{-2}\,t}{h^2}\right) \times \\
&\quad \times \Big\{ \sum_{q/h}' \varphi_{s^2 q}\,(s)\; (p^u\,s^{-2}\,h^{-1})^{3-2k}\,(s^2\,q)^{1-k} \\
&\quad + \sum_{p/q/p^u s^{-2} h^{-1}}' \varphi_{s^2 q}\,(s\,q)\; (p^u\,s^{-2}\,h^{-1}\,q^{-1})^{3-2k}\,(s^2\,q)^{1-k} \Big\} \\
&= c_{2k}\,(p^u)\; p^{u(3-2k)} \sum_{s^2/p^u}' s^{2(k-2)} \sum_{h/(p^u s^{-2},\,t)}' a\left(\frac{p^u\,s^{-2}\,t}{h^2}\right) h^{2k-3} \times \\
&\quad \times \Big\{ \sum_{q/h}' \varphi_{s^2 q}\,(s)\; q^{1-k} + \sum_{p/q/p^u s^{-2} h^{-1}}' \varphi_{s^2 q}(sq)\,q^{k-2} \Big\}.
\end{aligned} \tag{137}
$$

Der Wert der geschweiften Klammer kann mit Hilfe von (135) leicht ermittelt werden. Doch ist zunächst eine Fallunterscheidung erforderlich.

Fall $s > 1$:

$$
\begin{aligned}
\{\ \} &= \sum_{q/h}' \varphi\,(s\,q)\; q^{1-k} + \sum_{p/q/p^u s^{-2} h^{-1}}' \varphi\,(s)\; q^{k-2} \\
&= \varphi\,(s) \left(\sum_{q/h}' q^{2-k} + \sum_{p/q/p^u s^{-2} h^{-1}}' q^{k-2} \right) \\
&= \varphi\,(s) \left(\frac{1 - (h\,p)^{2-k}}{1 - p^{2-k}} + p^{k-2}\, \frac{1 - (p^u\,s^{-2}\,h^{-1})^{k-2}}{1 - p^{k-2}} \right) \\
&= \varphi\,(s)\, \frac{(p^u\,s^{-2}\,h^{-1})^{k-2} - (h\,p)^{2-k}}{1 - p^{2-k}} \\
&= p^{2-k}\,\varphi\,(s)\; h^{2-k}\, \frac{p^{u+1}\,s^{-2}\,{}^{k-2} - 1}{1 - p^{2-k}}
\end{aligned}
$$

Fall $s = 1$:

$$
\begin{aligned}
\{\ \} &= \sum_{q/h}' q^{2-k} + \sum_{p/q/p^u h^{-1}}' q^{k-2} \\
&= p^{2-k}\, h^{2-k}\, \frac{p^{(u+1)(k-2)} - 1}{1 - p^{2-k}}.
\end{aligned}
$$

Man erhält damit

$$(138)\qquad b(t) = c_{2k}(p^u)\, p^{u(3-2k)} \sum_{s^2/p^u}{}' \varphi(s^{2k-3}) \frac{1-(p^{u+1}s^{-2})^{k-2}}{1-p^{k-2}} \times \sum_{h/(p^u s^{-2},\, t)}{}' a\left(\frac{p^u s^{-2} t}{h^2}\right) h^{k-1}.$$

Hierin ist noch

$$c_{2k}(p^u) = p^{u(k-1)} \left(\sum_{d/p^u} d^{2-k}\right)^{-1} = p^{u(k-1)} \frac{1-p^{2-k}}{1-p^{(u+1)(2-k)}}$$

einzutragen. Eine weitere Vereinfachung erzielt man mit Hilfe der Teilersummen

$$(139)\qquad \sigma_r(m) = \sum_{d/m} d^r,$$

die sich im Primzahlpotenzfall einfach summieren lassen:

$$\sigma_r(p^u) = \frac{1-p^{(u+1)r}}{1-p^r}.$$

Nach gehöriger Zusammenfassung ergibt sich schließlich

$$(140)\qquad b(t) = \sum_{s^2/p^u}{}' \varphi(s^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(p^u s^{-2})}{\sigma_{k-2}(p^u)} \sum_{h/(p^u s^{-2},\, t)}{}' a\left(\frac{p^u s^{-2} t}{h^2}\right) h^{k-1}.$$

Bekanntlich ist

$$\sum_{h/(p^u s^{-2},\, t)}{}' a\left(\frac{p^u s^{-2} t}{h^2}\right) h^{k-1}$$

der t-te FOURIER-Koeffizient der Modulform $f(Z) \mid \Phi\, \tau(p^u s^{-2})$. Es besteht also die Identität

$$(141)\qquad f(Z) \mid \tau(p^u)\, \Phi = \sum_{d^2/p^u} \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(p^u d^{-2})}{\sigma_{k-2}(p^u)} f(Z) \mid \Phi\, \tau(p^u d^{-2}).$$

Da $\varphi(m)$, $\sigma_r(m)$ und $\tau(m)$ „multiplikativ" hinsichtlich Teilerfremdheit sind, kann die Formel (141) sofort auf beliebige m an Stelle von p^u übertragen werden. Man erhält das folgende Resultat:

Satz 20: *Für jede Form $f(Z) \subset \mathfrak{M}_k^{(2)}$ ist*

$$(142)\qquad f(Z) \mid \tau(m)\, \Phi = \sum_{d^2/m} \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} f(Z) \mid \Phi\, \tau(m d^{-2}).$$

Die in § 5 für den Primzahlfall $m = p$ formulierten Sätze lassen sich im Falle $n = 2$ ohne Einschränkung für k beweisen und zugleich auf beliebige m verallgemeinern. Das soll nun ausgeführt werden.

Satz 21: *Der Operator Φ bildet die linearen Scharen $\mathfrak{S}_{k0}^{(2)}$ und $\mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{S}_{k0}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{S}_{k1}^{(1)}$ ab.*

Beweis: Für $k > 5$ folgt die Behauptung aus Satz 10. Die übrigen Fälle werden durch einen Satz von SIEGEL erledigt (siehe [6])), demzufolge $\mathfrak{M}_4^{(2)}$ von der EISENSTEIN-Reihe $g(Z, O)$ (sie konvergiert noch!) erzeugt wird und $\mathfrak{M}_2^{(2)}$ nur die Null enthält.

Satz 22: *Die linearen Scharen* $\mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}$ $(\nu \leqq 2)$ *sind invariant bezüglich der Operatoren* $\tau(m)$:
$$\mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)} \mid \tau(m) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}.$$

Beweis: Für die Schar der Spitzenformen ($\nu = 2$) wurde die Behauptung in Satz 5 ausgesprochen. Sei $\nu < 2$ und $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}$. Dann ist nach Satz 21 $f(Z) \mid \Phi \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(1)}$, folglich $f(Z) \mid \Phi\, \tau(m\, d^{-2}) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(1)}$ für d^2/m. Nun ergibt (142) $f(Z) \mid \tau(m)\, \Phi \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(1)}$. Beachtet man noch, daß nach Satz 5 $f(Z) \mid \tau(m)$ in $\mathfrak{M}_k^{(2)} = \mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ liegt, einer Schar, die durch Φ nach Satz 21 umkehrbar eindeutig abgebildet wird, so folgt in der Tat $f(Z) \mid \tau(m) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}$.

Satz 23: *Für* $f(Z), g(Z) \subset \mathfrak{M}_k^{(2)}$ *ist*
$$(f(Z) \mid \tau(m), g(Z)) = (f(Z), g(Z) \mid \tau(m)).$$

Beweis: Sei
$$f(Z) = \sum_{\nu=0}^{2} f_\nu(Z),\ g(Z) = \sum_{\nu=0}^{2} g_\nu(Z) \text{ mit } f_\nu(Z), g_\nu(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}.$$
Nach Satz 15 ist dann auch
$$f_\nu(Z) \mid \tau(m),\ g_\nu(Z) \mid \tau(m) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}.$$
Demnach gilt
$$(f(Z) \mid \tau(m), g(Z)) = \sum_{\nu=0}^{2} (f_\nu(Z) \mid \tau(m)\, \Phi^{2-\nu}, g_\nu(Z) \mid \Phi^{2-\nu}).$$
Nach Satz 4 ist
$$(f_2(Z) \mid \tau(m), g_2(Z)) = (f_2(Z), g_2(Z) \mid \tau(m))$$
zu schließen. (142) ergibt
$$\begin{aligned}
&(f_1(Z) \mid \tau(m)\, \Phi, g_1(Z) \mid \Phi)\\
&= \sum_{d^2/m} \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m\, d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} (f_1(Z) \mid \Phi\, \tau(m\, d^{-2}), g_1(Z) \mid \Phi)\\
&= \sum_{d^2/m} \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m\, d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} (f_1(Z) \mid \Phi, g_1(Z) \mid \Phi\, \tau(m\, d^{-2}))\\
&= (f_1(Z) \mid \Phi, g_1(Z) \mid \tau(m)\, \Phi).
\end{aligned}$$
Ebenso ist
$$(f_0(Z) \mid \tau(m)\, \Phi^2, g_0(Z) \mid \Phi^2) = (f_0(Z) \mid \Phi^2, g_0(Z) \mid \tau(m)\, \Phi^2)$$
zu beweisen. Dabei ist zu beachten, daß (142) zufolge (119) auch mit Φ^2 an Stelle von Φ und Satz 4 auch noch für $n = 0$ gilt. Nunmehr ergibt sich
$$\begin{aligned}
(f(Z) \mid \tau(m), g(Z)) &= \sum_{\nu=0}^{2} (f_\nu(Z) \mid \Phi^{2-\nu}, g_\nu(Z) \mid \tau(m)\, \Phi^{2-\nu})\\
&= (f(Z), g(Z) \mid \tau(m)), \text{ q. e. d.}
\end{aligned}$$

Satz 24: *Ist* $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k\nu}^{(2)}$, $\nu < 2$, *so gilt* $f(Z) \mid \tau(m_1)\, \tau(m_2) = f(Z) \mid \tau(m_2)\, \tau(m_1)$ *für beliebige* m_1, m_2.

Beweis: Da die zu beweisende Vertauschungsregel für beliebige Modulformen ersten Grades gilt, so liefert Satz 20 einerseits
$$f(Z) \mid \tau(m_1)\, \tau(m_2)\, \Phi = f(Z) \mid \tau(m_2)\, \tau(m_1)\, \Phi,$$
andererseits ist
$$f(Z) \mid \tau(m_1)\, \tau(m_2),\ f(Z) \mid \tau(m_2)\, \tau(m_1) \subset \mathfrak{M}_k^{(2)} = \mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}.$$
Nach Satz 21 folgt nun die Gleichheit der beiden Formen.

Satz 25: *In der linearen Schar* $\mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ *gibt es eine Basis* $f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_{e_1}(Z)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle* m *ist* $f_\mu(Z) \mid \tau(m) = \alpha_\mu(m) f_\mu(Z)$.
2. *Bezeichnen* $a_\mu(m)$ FOURIER-Koeffizienten *von* $f_\mu(Z)$, *so ist*

$$\alpha_\mu(m) = \sum_{d^2/m}' \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} a_\mu(m d^{-2}).$$

3. *Wenn* $f(Z) \subset \mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ *und* $f(Z) \mid \tau(m) = \alpha(m) f(Z)$ *für alle* m *gilt, dann ist* $f(Z) = c f_\mu(Z)$ *für ein gewisses* μ *und eine geeignete Konstante* c.

Beweis: Die Existenz einer Basis von $\mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ mit der Eigenschaft 1. ergibt sich mit der PETERSSONschen Methode, die auch schon Satz 17 lieferte. Nach Satz 20 folgt nun

$$f_\mu(Z) \mid \tau(m) \Phi = \sum_{d^2/m}' \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} f_\mu(Z) \mid \Phi \, \tau(m d^{-2}) = \alpha_\mu(m) f_\mu(Z) \mid \Phi.$$

Da diese Beziehung für alle m gilt, so kann mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der Primzahlen, aus denen sich m zusammensetzt,

$$f_\mu(Z) \mid \Phi \, \tau(m) = a_\mu(m) f_\mu(Z) \mid \Phi$$

geschlossen werden. Wir denken uns nun $f_\mu(Z)$ so normiert, daß $a_\mu(m)$ FOURIER-Koeffizienten von $f_\mu(Z) \mid \Phi$, also auch von $f_\mu(Z)$ darstellen. Die Formen $f_\mu(Z) \mid \Phi$ sind dann bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Wir erhalten noch

$$f_\mu(Z) \mid \tau(m) \Phi = \sum_{d^2/m}' \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} a_\mu(m d^{-2}) f_\mu(Z) \mid \Phi$$

und damit den angegebenen Wert von $\alpha_\mu(m)$. Die Überlegungen zeigen auch, daß 3. richtig ist.

Satz 26: *In* $\mathfrak{S}_{k0}^{(2)} + \mathfrak{S}_{k1}^{(2)}$ *gibt es — je nachdem* $k \not\equiv 2 \ (12)$ *oder* $k \equiv 2 \ (12)$ *ist — genau* $\left[\frac{k}{12}\right] + 1$ *bzw.* $\left[\frac{k}{12}\right]$ *verschiedene Formen* $f(Z)$, *deren* FOURIER-*Koeffizienten* $a(T)$ *der folgenden Formel genügen:*

$$\sum_{d^2/m}' \varphi(d^{2k-3}) \frac{\sigma_{k-2}(m d^{-2})}{\sigma_{k-2}(m)} a(m d^{-2}) a(T)$$
$$= c_{2k}(m) \sum_{\substack{g h d = m \\ U}}' a\left(\frac{g}{h d} T [U S_d]\right) g (g^2 d)^{1-k}.$$

Die Summationsbedingungen sind hier dieselben wie in Formel (130). *Die so gekennzeichneten Formen* $f(Z)$ *sind linear unabhängig.*

Beweis: Die angegebene Koeffizientenformel bringt zum Ausdruck, daß $f(Z)$ eine normierte Eigenfunktion aller Operatoren $\tau(m)$ ist. Nun folgt alles aus Satz 25.

Es wird noch einiger Anstrengungen bedürfen, um die allgemeine Theorie auf den Stand derjenigen zum Grad 1 oder 2 zu bringen. Von den Problemen, die hier nicht erörtert worden sind, erscheint mir die Frage nach der arithmetischen Natur der Eigenwerte jener Eigenfunktionen, die durch Φ^{n-1} auf 0 abgebildet werden, eines besonderen Interesses wert. Neue Gesichtspunkte wird man beim Ausbau der Theorie von seiten der Funktionaloperatoren (29) für $\nu > 0$ erhoffen können.

(Eingegangen am 14. April 1951.)