Math. Annalen, Bd. 123 125–151 (1951).

Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen.

Von

Hans Maass in Heidelberg.

Man verdankt H. Petersson die Erkenntnis, daß die Poincaréschen Reihen

$$(1) \qquad g_{-k}(z,t) = \sum_L{}' e^{2\pi i t L(z)} (cz+d)^{-k} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

die lineare Schar der (ganzen) Modulformen ersten Grades von der Dimension $-k\,(k > 2,\ k \equiv 0\,(2))$ erzeugen[1]). Dabei durchläuft $L = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$ ein vollständiges System von Modulsubstitutionen ersten Grades mit nicht assoziierten zweiten Zeilen (c, d). Zwei Zeilen (c, d) und (c^*, d^*) heißen assoziiert, wenn $c\,d^* - d\,c^* = 0$ ist. Dieser *Darstellungssatz* ist weitgehender Verallgemeinerungen fähig. In sinngemäßer Fassung gilt er für alle nach dem *Prinzip der Quersummation* gebildeten Poincaréschen Reihen[2]). Die ganze Tragweite der Peterssonschen Ansätze zeigt sich jedoch erst in der Anwendbarkeit auf Funktionen in mehreren Veränderlichen[3])[4]).

Bei dieser Sachlage war es naheliegend, die Peterssonschen Methoden auf die Siegelschen Modulformen anzuwenden. Wenn auch grundsätzlich feststand, wie man hier zu einem Darstellungssatz kommen mußte, so waren im einzelnen doch noch erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. Nach wiederholten Bemühungen gelang es schließlich, die Peterssonschen Ergebnisse über Poincarésche Reihen zur Modulgruppe ersten Grades in angemessener Form auf die Modulgruppe n-ten Grades zu übertragen. Diese Theorie soll im folgenden dargestellt werden. Zum besseren Verständnis wird eine kurze Übersicht vorausgeschickt.

Bekanntlich[5]) gestattet jede Modulform n-ten Grades von der Dimension $-k$ eine Fourierentwicklung der Art

$$(2) \qquad g_{-k}(Z) = \sum_{T \geqq 0} a(T)\, e^{2\pi i\, \mathrm{Sp}(TZ)},$$

wobei über alle halbganzen nicht-negativen symmetrischen Matrizen $T = T^{(n)}$ summiert wird. $Z = Z^{(n)} = (z_{\mu\nu})$ bezeichnet eine komplexe symmetrische

[1]) Petersson, H.: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. dtsch. Math. Ver. **49**, 49 (1939).

[2]) Petersson, H.: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **14**, 22 (1941).

[3]) Maass, H.: Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Ann. **117**, 538 (1940).

[4]) Maass, H.: Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe. Math. Ann. **118**, 518 (1942).

[5]) Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617 (1939).

Matrix mit positivem Imaginärteil. Wendet man das Verfahren der Quersummation auf diesen Entwicklungstypus an, so erhält man die Poincaréschen *Reihen*

(3) $$g_{-k}(Z, T) = \sum_{\sigma} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k} \qquad (T \geqq 0).$$

Die Summation ist hier über ein vollständiges System von Modulsubstitutionen n-ten Grades

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

zu erstrecken, die verschiedene Reihenglieder ergeben. Die Konvergenz der Poincaréschen Reihen (3) wird nach bewährtem Verfahren[6]) unter Verwendung von Begriffsbildungen der symplektischen Geometrie[7]) bewiesen. Es sei $X + iY$ die Zerlegung von Z in Real- und Imaginärteil. Es wird dann festgestellt, daß die Reihen (3) in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich des Z-Gebietes $Y > 0$ absolut und gleichmäßig konvergieren, sobald

(4) $$k > \operatorname{Min}(2n, n + 1 + \operatorname{Rang} T)$$

ist. Ob diese Bedingung verbessert werden kann, müßte noch besonders untersucht werden. Als Spezialfall erhält man noch die von H. Braun[8]) angegebene Konvergenzbedingung für die *Eisensteinreihen* ($T = O$).

Auf Grund der angegebenen Konvergenzverhältnisse ergibt sich einerseits die Regularität der Poincaréschen Reihen als Funktionen der $z_{\mu\nu}$ ($\mu \leq \nu$) in dem Gebiet $Y > 0$, andererseits die für Modulformen charakteristische Transformationsformel

(5) $$g_{-k}(\sigma(Z), T) = |CZ + D|^{k} g_{-k}(Z, T).$$

Dabei bezeichnet (C, D) wieder die zweite Matrizenzeile der Substitution σ. Um zu beweisen, daß $g_{-k}(Z, T)$ eine Modulform darstellt, braucht nur noch die Beschränktheit der Poincaréschen Reihe in dem von Siegel[5]) angegebenen Fundamentalbereich der Modulgruppe — wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{F}_n$ — gezeigt zu werden. Gleichwertig damit ist, daß $g_{-k}(Z, T)$ in eine Fourierreihe der Art (2) entwickelt werden kann. Im Falle $n = 1$ lag hier keine besondere Schwierigkeit vor, da sich mit Hilfe eines Peterssonschen Hilfssatzes[9]) in $\mathfrak{F}_1$ sofort eine von z unabhängige konvergente Majorante für $g_{-k}(z, t)$ angeben ließ. Dieser Hilfssatz läßt sich zwar in der erforderlichen Weise verallgemeinern und liefert für die *Eisensteinreihen* die gleichmäßige Konvergenz in $\mathfrak{F}_n$; doch kann im Falle $T \neq O$ auf diesem oder ähnlichem Wege keine von Z unabhängige konvergente Majorante für $g_{-k}(Z, T)$ in $\mathfrak{F}_n$ gewonnen werden. Der allgemeine Fall wird nun so erledigt, daß mit Hilfe des Metrisierungsintegrals

(6) $$(h(Z), g(Z)) = \int_{\mathfrak{F}_n} \cdots \int h(Z)\,\overline{g(Z)}\,|Y|^{k-n-1}\, d(X)\, d(Y),$$

---

[6]) Petersson, H.: Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen. Acta math. **80**, 23 (1948).

Diese Untersuchungen waren Gegenstand eines Vortrags, den Herr Petersson bereits 1941 in Heidelberg hielt, konnten also in [4]) schon berücksichtigt werden.

[7]) Siegel, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. **65**, 1 (1943). — Maass, H.: Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum. Math. Ann. **118**, 312 (1942).

[8]) Braun, H.: Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen. Math. Z. **44**, 387 (1939).

[9]) Siehe [6]), S. 32, Hilfssatz 4.

wobei $d(X) = \prod\limits_{\mu \leq \nu} d\,x_{\mu\nu}$, $d(Y) = \prod\limits_{\mu \leq \nu} d\,y_{\mu\nu}$ ist, unmittelbar gezeigt wird, daß in der FOURIER-Reihe von $g_{-k}(Z, T)$ nur solche Koeffizienten von Null verschieden sein können, die zu nicht-negativen Exponentenmatrizen gehören.

Die auszuführenden Integralumformungen ergeben zugleich folgenden Tatbestand: Verschwinden in der FOURIER-Entwicklung (2) der Modulform $g_{-k}(Z)$ alle Koeffizienten $a(T)$ mit $|T| = 0$ — Formen mit dieser Eigenschaft sollen *Spitzenformen* genannt werden —, so existiert das Integral (6) für $h(Z) = g_{-k}(Z)$, $g(Z) = g_{-k}(Z, T)$. Wir bezeichnen es als das *Skalarprodukt* der beiden Modulformen. Die Berechnung ergibt

(7) $$(g_{-k}(Z), g_{-k}(Z, T))$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon(T)}\, a(T)\, |T|^{\frac{n+1}{2}-k}\, \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\, (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}-nk} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(k - \dfrac{n+\nu}{2}\right) & \text{für } |T| > 0, \\ 0 & \text{für } |T| = 0. \end{cases}$$

Hierin ist $a(T)$ der FOURIER-Koeffizient der Spitzenform $g_{-k}(Z)$ zur Exponentenmatrix T und $\varepsilon(T)$ im Falle $|T| > 0$ die Anzahl der unimodularen $U = U^{(n)}$ mit $T[U] = T$. Die Relation (7) ist als die *Grundformel* der metrischen Formentheorie anzusprechen. Im Falle $n = 1$ hat man in der Grundformel ein ausreichendes Hilfsmittel zum Beweis des Darstellungssatzes; im einzelnen ist hier festzustellen, daß eine gegebene Modulform mit Hilfe von $g_{-k}(z, 0)$ auf eine Spitzenform reduziert werden kann und daß eine Spitzenform, die auf allen POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(z, t)$ mit $t > 0$ senkrecht steht, identisch verschwindet. Schließlich muß noch beachtet werden, daß diese Reihen für $t > 0$ selbst Spitzenformen darstellen. Im allgemeinen Fall ($n > 1$) sind nun zwei Aufgaben zu lösen. Man hat unter den POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ diejenigen ausfindig zu machen, die mit Sicherheit Spitzenformen darstellen, und ferner zu zeigen, daß eine gegebene Modulform mit Hilfe der übrigen Reihen auf eine Spitzenform reduziert werden kann. Sodann läßt sich der Darstellungssatz mit Hilfe der Grundformel wie im Falle $n = 1$ beweisen.

Spitzenformen können allgemein wie folgt charakterisiert werden: Setzt man $Z = \begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & i\lambda \end{pmatrix}$, $Z^* = Z^{*(n-1)}$, $\lambda > 0$, $\mathfrak{n} =$ Nullspalte und bestimmt man für eine vorgegebene Modulform n-ten Grades $g_{-k}(Z)$ den Grenzwert

(8) $$g_{-k}(Z^*) = \lim_{\lambda \to \infty} g_{-k}(Z),$$

so erhält man, wie SIEGEL[5]) gezeigt hat, eine Modulform $(n-1)$-ten Grades. Wir setzen

(9) $$g_{-k}(Z^*) = \Phi(g_{-k}(Z)).$$

Auf Grund der SIEGELschen Untersuchungen ist sofort festzustellen, daß die Spitzenformen $g_{-k}(Z)$ durch $\Phi(g_{-k}(Z)) = 0$ gekennzeichnet sind. Es liegt nunmehr nahe, alle POINCARÉschen Reihen der funktionalen Operation Φ zu unterwerfen. Eine besondere Überlegung ist erforderlich, um einen gliedweisen Grenzübergang in sämtlichen Reihen zu rechtfertigen. Man erkennt schließlich, daß für $|T| \neq 0$

$$\Phi(g_{-k}(Z, T)) = 0$$

ist, während die Formen $\Phi(g_{-k}(Z, T))$ mit $|T| = 0$ in ihrer Gesamtheit mit dem vollen System der Poincaréschen Reihen $(n-1)$-ten Grades übereinstimmen. Durch vollständige Induktion nach n gelangt man nun sofort zum Ziel. Es darf angenommen werden, daß der Darstellungssatz für Formen $(n-1)$-ten Grades richtig ist. Sodann läßt sich eine beliebige Form n-ten Grades mit Hilfe der Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit $|T| = 0$ auf eine Spitzenform reduzieren. Die Darstellbarkeit der Spitzenformen durch die Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit $|T| \neq 0$ ist nun wie im Falle $n = 1$ einzusehen.

Auf die *metrische Kennzeichnung* der Poincaréschen Reihen sei hier noch hingewiesen. Es gelten analoge Aussagen wie im Falle $n = 1$; sie können aus der Grundformel gewonnen werden.

Im folgenden bezeichnet:

M_n die Modulgruppe n-ten Grades,

$\mathfrak{H}_n$ den Bereich der komplexen symmetrischen Matrizen $Z = Z^{(n)}$ mit positivem Imaginärteil Y,

$\mathfrak{F}_n$ den Siegelschen Fundamentalbereich von M_n in $\mathfrak{H}_n$,

$\mathfrak{R}_n$ den Bereich der nach Minkowski reduzierten positiven symmetrischen Matrizen $Y = Y^{(n)}$,

$\mathfrak{W}_n$ den Bereich der modulo 1 reduzierten reellen symmetrischen Matrizen $X = X^{(n)}$.

Setzt man $Z = X + i\,Y$, $X = (x_{\mu\nu})$, $Y = (y_{\mu\nu})$, so bedeutet
$X \subset \mathfrak{W}_n$: $X = X'$ (transponierte Matrix), $-{}^1/_2 \leqq x_{\mu\nu} \leqq {}^1/_2$ für alle μ, ν;
$Y \subset \mathfrak{R}_n$: $Y > 0$, $Y[\mathfrak{g}_\mu] \geqq y_{\mu\mu}$, für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ und alle Spalten $\mathfrak{g}_\mu$ aus ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_n$, von denen $g_\mu, g_{\mu+1}, \ldots, g_n$ teilerfremd zu wählen sind, $y_{\nu\,\nu+1} \geqq 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$;
$Z \subset \mathfrak{F}_n : Z = Z'$, $Y > 0$, abs $(C Z + D) \geqq 1$ für alle zweiten Matrizenzeilen (C, D) von Modulsubstitutionen n-ten Grades, $Y \subset \mathfrak{R}_n$, $X \subset \mathfrak{W}_n$.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

Wir verallgemeinern zunächst den Peterssonschen Hilfssatz[9]). Wenn auch im folgenden kein Gebrauch davon gemacht wird, so bleibt doch ein gewisses Interesse an diesem Satz im Hinblick auf die Eisensteinschen Reihen bestehen.

Hilfssatz 1: *Es sei* $Z = X + i\,Y \subset \mathfrak{H}_n$, $\operatorname{Sp}(X X') \leqq m_1$, $\operatorname{Sp}(Y^{-1}) \leqq m_2$. *Dann ist*

$$\operatorname{abs}(C Z + D) \geqq \varepsilon \operatorname{abs}(C i + D) \tag{10}$$

für alle zweiten Matrizenzeilen (C, D) *reeller symplektischer Matrizen mit einer nur von* n, m_1, m_2 *abhängigen positiven Konstanten* ε.

Beweis: 1) Es sei $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$. Die Elemente der reellen Matrizen

$$R^{(n,m)} = (r_{\mu\nu}), \quad S^{(n,m)} = (s_{\mu\nu}) \qquad (n \geqq m)$$

mögen den Gleichungen $s_{\mu\nu} = \lambda_\mu r_{\mu\nu}$ genügen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m$ die Spaltenvektoren von $R^{(n,m)}$ und mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_m$ die von $S^{(n,m)}$, so gilt

$$(\lambda_{n-m+1}\,\lambda_{n-m+2} \ldots \lambda_n)^{-2}\,|\mathfrak{s}_\mu' \mathfrak{s}_\nu| \leqq |\mathfrak{r}_\mu' \mathfrak{r}_\nu| \leqq (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m)^{-2}\,|\mathfrak{s}_\mu' \mathfrak{s}_\nu| \tag{11}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Bekanntlich ist nämlich

$$|\mathfrak{r}'_\mu \mathfrak{r}_\nu| = \sum_{1 \leqq \varrho_1 < \cdots < \varrho_m \leqq n} \begin{vmatrix} r_{\varrho_1 1} & \dots & r_{\varrho_1 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{\varrho_m 1} & \dots & r_{\varrho_m m} \end{vmatrix}^2$$

$$= \sum_{1 \leqq \varrho_1 < \cdots < \varrho_m \leqq n} (\lambda_{\varrho_1} \lambda_{\varrho_2} \dots \lambda_{\varrho_m})^{-2} \begin{vmatrix} s_{\varrho_1 1} & \dots & s_{\varrho_1 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho_m 1} & \dots & s_{\varrho_m m} \end{vmatrix}^2,$$

$$|\mathfrak{s}'_\mu \mathfrak{s}_\nu| = \sum_{1 \leqq \varrho_1 < \cdots < \varrho_m \leqq n} \begin{vmatrix} s_{\varrho_1 1} & \dots & s_{\varrho_1 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho_m 1} & \dots & s_{\varrho_m m} \end{vmatrix}^2,$$

woraus (11) sofort folgt.

2) Es sei $Y = Y^{(n)} > 0$, $T = T^{(n)} = T'$ reell. Wir transformieren Y mit Hilfe einer orthogonalen Matrix W auf Diagonalgestalt:

$$Y[W] = D^2,\ D = (\delta_{\mu\nu}\lambda_\nu),\ 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$$

und setzen $T[W] = S = (s_{\mu\nu})$, $Q = S[D^{-1}] = (q_{\mu\nu})$.
Dann ist

$$|Y| = |D|^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^2, \quad s_{\mu\nu} = \lambda_\mu \lambda_\nu q_{\mu\nu},$$

$$\operatorname{abs}(T + iY)^2 = \operatorname{abs}(S + iD^2)^2 = \operatorname{abs}(Q + iE)^2 |Y|^2$$

$$= |Q'Q + E|\,|Y|^2.$$

Bezeichnen wir die Spaltenvektoren von Q und S mit $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n$ bzw. $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \dots, \mathfrak{s}_n$ und setzen noch $\mathfrak{q}_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\mathfrak{r}_\nu$, so ergibt sich mit Hilfe von (11)

$$|Q'Q + E| = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_\nu} |\mathfrak{q}'_{\mu_j} \mathfrak{q}_{\mu_k}|$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_\nu} (\lambda_{\mu_1} \dots \lambda_{\mu_\nu})^{-2} |\mathfrak{r}'_{\mu_j} \mathfrak{r}_{\mu_k}|$$

$$\geqq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_{n-\nu+1} \dots \lambda_n)^{-4} \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_\nu} |\mathfrak{s}'_{\mu_j} \mathfrak{s}_{\mu_k}|,$$

mithin

$$\operatorname{abs}(T + iY)^2 \geqq |Y|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})^4 \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_\nu} |\mathfrak{s}'_{\mu_j} \mathfrak{s}_{\mu_k}|.$$

Wenn $\operatorname{Sp}(Y^{-1}) \leqq m_2$ ist, so gibt es für alle charakteristischen Wurzeln λ_ν^2 von Y eine positive nur von m_2 abhängige untere Schranke. Für ein geeignetes positives $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, m_2)$ ist also

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})^4 \geqq \varepsilon_1^2 \qquad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

und daher

$$\operatorname{abs}(T + iY)^2 \geqq \varepsilon_1^2 \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_\nu} |\mathfrak{s}'_{\mu_j} \mathfrak{s}_{\mu_k}|\Big) = \varepsilon_1^2 |S'S + E|$$

$$= \varepsilon_1^2 |T'T + E|,$$

woraus

(12) $$\operatorname{abs}(T + iY) \geqq \varepsilon_1 \operatorname{abs}(T + iE)$$

erhellt.

3) Sei $\mathrm{Sp}\,(X X') \leqq m_1$ und $S = S^{(n)} = S'$ reell. Dann liegt X in einem festen Würfel und nach[8]) gibt es eine positive Konstante $\varepsilon_2 = \varepsilon_2\,(n, m_1)$, so daß

$$\mathrm{abs}\,(X + S + i\,E) \geqq \varepsilon_2\,\mathrm{abs}\,(S + i\,E) \tag{13}$$

wird.

4) Hilfssatz 1 ist nun sofort beweisbar mit der Einschränkung $|C| \neq 0$. Dann wird

$$\mathrm{abs}\,(X + i\,Y + S) \geqq \varepsilon\,\mathrm{abs}\,(i\,E + S) \qquad \text{mit } S = C^{-1}\,D$$

behauptet. Da S symmetrisch ist, so folgt dies aus (12) und (13) mit $T = X + S$ und $\varepsilon = \varepsilon_1\,\varepsilon_2$.

Ist (C, D) die zweite Matrizenzeile einer beliebigen symplektischen Matrix, so kann $|D\,S + C|$ nicht identisch in S verschwinden, wenn S eine symmetrische Matrix bezeichnet, da auch $(D, -C)$ die zweite Matrizenzeile einer symplektischen Matrix und folglich $|D\,Z - C| \neq 0$ ist für $Z \subset \mathfrak{H}_n$. Wir bestimmen nun eine Folge reeller symmetrischer Matrizen S_k mit

$$\lim_{k \to \infty} S_k = O \quad\text{und}\quad |D\,S_k + C| \neq 0\,.$$

Wie schon gezeigt wurde, ist

$$\mathrm{abs}\,((D\,S_k + C)\,Z + D) \geqq \varepsilon\,\mathrm{abs}\,((D\,S_k + C)\,i + D)\,,$$

wenn Z die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Durch Grenzübergang $k \to \infty$ erhält man nun die allgemeine Behauptung.

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind für gewisse m_1 und m_2 sicher dann erfüllt, wenn Z in $\mathfrak{F}_n$ variiert.

In den folgenden Hilfsbetrachtungen verwenden wir den Abstandsbegriff der symplektischen Geometrie. D. h. wir legen die metrische Fundamentalform

$$ds^2 = \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,Y)^2 + \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,X)^2 \tag{14}$$

zugrunde. Den in dieser Metrik gemessenen Abstand zweier Punkte $Z, Z^* \subset \mathfrak{H}_n$ bezeichnen wir mit $s\,(Z, Z^*)$.

Hilfssatz 2: *Es sei $Z, Z^* \subset \mathfrak{H}_n$. Die Matrizen Z_1, Z_1^* mögen aus Z bzw. Z^* durch Streichen der letzten $n - r$ Zeilen und Spalten entstehen, so daß Z_1 und Z_1^* also $\mathfrak{H}_r$ angehören. Dann ist*

$$s\,(Z, Z^*) \geqq s\,(Z_1, Z_1^*)\,. \tag{15}$$

Beweis: Da die geodätischen Linien in der symplektischen Geometrie eindeutig bestimmt sind, braucht nur

$$\mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,Y)^2 + \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,X)^2 \geqq \mathrm{Sp}\,(Y_1^{-1}\,d\,Y_1)^2 + \mathrm{Sp}\,(Y_1^{-1}\,d\,X_1)^2 \tag{16}$$

gezeigt zu werden. Dabei ist

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Z_1 = Z_1^{(r)} = X_1 + i\,Y_1\,.$$

Wir wählen im Y-Raum folgende Parameterdarstellung

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_1 V \\ V' Y_1 & Y_2 + Y_1[V] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ O & Y_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix}\right]. \tag{17}$$

Zeilen- und Spaltenzahlen sämtlicher Matrizen sind durch diejenigen von Y und Y_1 eindeutig festgelegt. Offenbar ist $Y > 0$ mit $Y_1 > 0$, $Y_2 > 0$ gleichwertig. Man bestätigt leicht

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} Y_1^{-1} + Y_2^{-1}[V'] & -V Y_2^{-1} \\ -Y_2^{-1} V' & Y_2^{-1} \end{pmatrix}$$

und findet nach einer längeren, aber elementaren Rechnung

$$\text{(18)} \quad \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,Y)^2 = \mathrm{Sp}\,\{(Y_1^{-1}\,d\,Y_1)^2 + (Y_2^{-1}\,d\,Y_2)^2 + 2\,Y_2^{-1}\,d\,V'\,Y_1\,d\,V\}.$$

Wählt man speziell $d\,Y = d\,X$ und setzt

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3' & X_2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = X_1^{(r)},$$

so ergeben sich für $d\,Y_1$, $d\,Y_2$, $d\,V$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} d\,X_1 &= d\,Y_1\,, \\ d\,X_3 &= d\,Y_1\,V + Y_1\,d\,V, \\ d\,X_2 &= d\,Y_2 + d\,V'\,Y_1\,V + V'\,Y_1\,d\,V + d\,Y_1\,[V], \end{aligned}$$

die durch

$$\begin{aligned} d\,Y_1 &= d\,X_1\,, \\ d\,V &= Y_1^{-1}\,d\,X_3 - Y_1^{-1}\,d\,X_1\,V, \\ d\,Y_2 &= d\,X_2 + d\,X_1\,[V] - d\,X_3'\,V - V'\,d\,X_3 \end{aligned}$$

gelöst werden. (18) geht somit in

$$\text{(19)} \quad \begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,X)^2 = \mathrm{Sp}\,\{&(Y_1^{-1}\,d\,X_1)^2 + \\ &+ (Y_2^{-1}\,d\,X_2 + Y_2^{-1}\,d\,X_1\,[V] - Y_2^{-1}\,d\,X_3'\,V - Y_2^{-1}\,V'\,d\,X_3)^2 \\ &+ 2\,Y_2^{-1}\,(d\,X_3'\,Y_1^{-1} - V'\,d\,X_1\,Y_1^{-1})\;\;(d\,X_3 - d\,X_1\,V)\} \end{aligned}$$

über. Auf Grund der Darstellungen (18) und (19) ist

$$\mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,Y)^2 \geqq \mathrm{Sp}\,(Y_1^{-1}\,d\,Y_1)^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}\,(Y^{-1}\,d\,X)^2 \geqq \mathrm{Sp}\,(Y_1^{-1}\,d\,X_1)^2$$

festzustellen. (16) folgt nun durch Addition dieser Ungleichungen.

Hilfssatz 3: *Es sei $Z, Z^* \subset \mathfrak{H}_n$, $s\,(Z, Z^*) \leqq \varrho$. Die Matrizen $Z_1 = X_1 + i\,Y_1$ und $Z_1^* = X_1^* + i\,Y_1^*$ mögen aus Z bzw. Z^* durch Streichen der letzten $n - r$ Zeilen und Spalten entstehen. Dann ist*

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{m_1} \leqq \frac{\mathrm{Sp}\,(Y_1^*)}{\mathrm{Sp}\,(Y_1)} \leqq m_1, \quad \frac{1}{m_2} \leqq \frac{|\,Y_1^*|}{|\,Y_1|} \leqq m_2$$

mit gewissen positiven nur von ϱ und n abhängigen Konstanten m_1 und m_2.

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn $r = n$ angenommen wird. Sei $Z = X + i\,Y$, $Z^* = X^* + i\,Y^*$. Mit Hilfe einer orthogonalen Matrix W transformieren wir Y^* auf Diagonalgestalt:

$$Y^*\,[W] = D^2, \quad D = (\lambda_\mu\,\delta_{\mu\nu}), \quad \lambda_\mu > 0$$

und setzen

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} &= (Z - X^*)\,[W\,D^{-1}] = \widetilde{X} + i\,\widetilde{Y}, \\ \widetilde{Z}^* &= (Z^* - X^*)\,[W\,D^{-1}] = i\,E. \end{aligned}$$

Da $s\,(Z, Z^*)$ gegenüber symplektischen Substitutionen invariant ist, gilt

$$s\,(Z, Z^*) = s\,(\widetilde{Z}, \widetilde{Z}^*) = s\,(\widetilde{Z}, i\,E) \leqq \varrho.$$

$\widetilde{Z}$ liegt also in einer abgeschlossenen endlichen Punktmenge von $\mathfrak{H}_n$. Für ein geeignetes $m_2 = m_2\,(\varrho)$ gilt infolgedessen

$$\frac{1}{m_2} \leqq |\,\widetilde{Y}| \leqq m_2\,.$$

Beachtet man

$$|\widetilde{Y}| = |Y|\,|W\,D^{-1}|^2 = |Y|\,|D|^{-2} = |Y|\,|Y^*|^{-1},$$

so ergibt sich die eine der Behauptungen.

Offenbar ist auch $m_1 \geqq \mathrm{Sp}\,(\widetilde{Y})$ für ein gewisses positives $m_1 = m_1\,(\varrho)$. Wird noch $Y\,[W] = H = (h_{\mu\nu})$ gesetzt, so ist $\mathrm{Sp}\,(Y) = \mathrm{Sp}\,(H)$, $\mathrm{Sp}\,(Y^*) = \mathrm{Sp}\,(D^2)$ und daher

$$m_1 \geqq \mathrm{Sp}\,(\widetilde{Y}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_{\nu\nu}}{\lambda_\nu^2} \geqq \frac{\mathrm{Sp}\,(H)}{\mathrm{Sp}\,(D^2)} = \frac{\mathrm{Sp}\,(Y)}{\mathrm{Sp}\,(Y^*)}$$

zu schließen. Aus Gründen der Symmetrie darf auch $m_1 \geqq \frac{\mathrm{Sp}\,(Y^*)}{\mathrm{Sp}\,(Y)}$ angenommen werden. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wir berechnen noch einige Integrale. Zur Abkürzung werde

$$d\,(Y) = \prod_{\mu \leqq \nu} d\,y_{\mu\nu}$$

gesetzt.

Hilfssatz 4: *Es sei $f\,(y)$ auf dem Halbstrahl $y \geqq 0$ reell und stetig. Dann ist*

$$(21)\quad \underset{\substack{Y \subset \mathfrak{R}_n \\ |Y| \leqq t}}{\int \cdots \int} f\,(|Y|)\,|Y|^s\; d\,(Y) = \frac{n+1}{2}\, v_n \int_0^t f\,(y)\, y^{s + \frac{n-1}{2}}\, d\,y \quad \text{für } s + \frac{n+1}{2} > 0$$

mit einer gewissen positiven Konstanten v_n.

Beweis: Wir setzen

$$J\,(a,\, y) = \underset{\substack{Y \subset \mathfrak{R}_n \\ a \leqq |Y| \leqq y}}{\int \cdots \int} f\,(|Y|)\,|Y|^s\, d\,(Y) \qquad \text{für } 0 < a \leqq y$$

und finden mit einem reellen ϑ im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\frac{\partial\, J\,(a,\, y)}{\partial\, y} = \lim_{\Delta y \to 0} f\,(y + \vartheta\,\Delta\,y)\;(y + \vartheta\,\Delta\,y)^s\, \frac{1}{\Delta\,y} \underset{\substack{Y \subset \mathfrak{R}_n \\ y \leqq |Y| \leqq y + \Delta y}}{\int \cdots \int} d\,(Y)\,.$$

Nach Minkowski[10]) ist

$$(22)\qquad \underset{\substack{Y \subset \mathfrak{R}_n \\ |Y| \leqq y}}{\int \cdots \int} d\,(Y) = v_n\, y^{\frac{n+1}{2}}$$

mit einer gewissen positiven Konstanten v_n. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial\, J(a,\, y)}{\partial\, y} = v_n\, f\,(y)\, y^s \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta\, y} \left\{ (y + \Delta\, y)^{\frac{n+1}{2}} - y^{\frac{n+1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{n+1}{2}\, v_n\, f\,(y)\, y^{s + \frac{n-1}{2}}\,,$$

also

$$J\,(a,\, t) = \frac{n+1}{2}\, v_n \int_a^t f\,(y)\, y^{s + \frac{n-1}{2}}\, d\,y\,.$$

Dieses Integral hat für $a \to 0$ einen Grenzwert, falls $s + \frac{n+1}{2} > 0$ ist. Der Grenzübergang $a \to 0$ liefert also die in Hilfssatz 4 angegebene Integralformel.

[10]) Minkowski, H.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 80, 1911.

Wir heben zwei Spezialfälle hervor. $f(y) = 1$ ergibt

(23) $$\underset{\substack{Y \subset \mathfrak{P}_n \\ |Y| \leq t}}{\int \cdots \int} |Y|^s \, d(Y) = \frac{n+1}{2s+n+1} v_n \, t^{s+\frac{n+1}{2}} \quad \text{für } s + \frac{n+1}{2} > 0 .$$

Ferner wird $f(y) = e^{-a y^\alpha}$ $(a > 0, \alpha > 0)$ gesetzt und der Grenzübergang $t \to \infty$ vollzogen. Die Variablensubstitution $x = y^\alpha$ führt auf das bekannte Gammaintegral und liefert

(24) $$\underset{Y \subset \mathfrak{P}_n}{\int \cdots \int} e^{-a|Y|^\alpha} |Y|^s \, d(Y) = \frac{n+1}{2\alpha} \, v_n \, \Gamma\left(\frac{s}{\alpha} + \frac{n+1}{2\alpha}\right) a^{-\frac{s}{\alpha} - \frac{n+1}{2\alpha}}$$

für $a > 0$, $\alpha > 0$, $s + \frac{n+1}{2} > 0$.

§ 2. Poincarésche Reihen.

Es sei $T = T^{(n)}$ eine halbganze nicht-negative symmetrische Matrix. $\mathsf{A}(T)$ bezeichne die Gruppe der Modulsubstitutionen n-ten Grades, die von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U & S\,U'^{-1} \\ O & U'^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } T[U] = T$$

sind. Wir bestimmen ein beliebiges Repräsentantensystem $\mathsf{S}(T)$ der Linksrestklassen von $\mathsf{A}(T)$ in M_n und setzen für $k \equiv 0 \ (2)$

(25) $$g_{-k}(Z, T) = \sum_{\sigma \subset \mathsf{S}(T)}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |C Z + D|^{-k},$$

wobei (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ bezeichnen möge. Offenbar ändert sich das allgemeine Glied dieser Reihe nicht, wenn man σ mit einer Substitution aus $\mathsf{A}(T)$ von links multipliziert; d. h. $g_{-k}(Z, T)$ hängt von der Auswahl des Repräsentantensystems $\mathsf{S}(T)$ nicht ab. Multipliziert man die Substitutionen aus $\mathsf{S}(T)$ von rechts mit einer Modulsubstitution, so erhält man ein mit $\mathsf{S}(T)$ gleichwertiges System. Nunmehr kann festgestellt werden, daß sich $g_{-k}(Z, T)$ formal (d. h. ohne Rücksicht auf Konvergenz) gegenüber den Modulsubstitutionen wie eine Modulform der Dimension $-k$ verhält. Wir zeigen, daß sich $g_{-k}(Z, T)$ nicht ändert, wenn man T mit einer unimodularen Matrix transformiert:

(26) $$g_{-k}(Z, T[V]) = g_{-k}(Z, T) \qquad \text{für unimodulare } V.$$

Die Gruppe $\mathsf{A}(T[V])$ besteht aus den Modulsubstitutionen der Art

$$\begin{pmatrix} U_1 & S_1 U_1'^{-1} \\ O & U_1'^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } (T[V])[U_1] = T[V].$$

Dies bedeutet, wenn $U = V U_1 V^{-1}$, $S = V S_1 V'$ und

$$\varrho = \begin{pmatrix} V & O \\ O & V'^{-1} \end{pmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\varrho \begin{pmatrix} U_1 & S_1 U_1'^{-1} \\ O & U_1'^{-1} \end{pmatrix} \varrho^{-1} = \begin{pmatrix} U & S\,U'^{-1} \\ O & U'^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } T[U] = T.$$

Mithin ist

$$\varrho\, \mathsf{A}(T[V])\, \varrho^{-1} = \mathsf{A}(T),$$

also

$$\varrho\, \mathsf{S}(T[V]) = \mathsf{S}(T),$$

woraus in der Tat (26) geschlossen werden kann. Hat T den Rang r, so kann durch geeignete Wahl einer unimodularen Matrix V

$$T[V] = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad T_1 = T_1^{(r)} > 0$$

erreicht werden. Um die Konvergenz der POINCARÉschen Reihe (25) zu beweisen, darf also gemäß (26) von vornherein

$$(27) \qquad T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad T_1 = T_1^{(r)} > 0$$

angenommen werden. Das soll im folgenden geschehen. Setzen wir in entsprechender Zerlegung

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

so ist $T[U] = T$ mit $T_1[U_1] = T_1$, $U_2 = O$ gleichwertig.

Unter A_r soll nun die Gruppe derjenigen Modulsubstitutionen verstanden werden, die in der Form

$$(28) \qquad \tau = \begin{pmatrix} U & S\,U'^{-1} \\ O & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } U = \begin{pmatrix} E & O \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}, E = E^{(r)}$$

dargestellt werden können. Offenbar ist A_r eine Untergruppe von $\mathsf{A}(T)$. Es ist leicht festzustellen, daß der Index von A_r in $\mathsf{A}(T)$ im Falle $r = 0$ gleich 1 ist und im Falle $r > 0$ mit der Anzahl der Automorphismen von T_1, d. h. der Anzahl der unimodularen U_1 übereinstimmt, die T_1 in sich transformieren. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $\varepsilon(T_1)$ und setzen $\varepsilon(T_1) = 1$ im Falle $r = 0$. S_r sei ein vollständiges Vertretersystem der Linksrestklassen von A_r in M_n. Offenbar ist dann

$$(29) \qquad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \subset \mathsf{S}_r} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}.$$

Ein spezielles Vertretersystem S_r erhält man in den Produkten $\varrho\,\sigma$, wobei unabhängig von einander σ ein Vertretersystem S_0 und ϱ ein vollständiges System von Vertretern der Linksrestklassen von A_r in A_0 durchlaufen. Durchläuft Q alle primitiven Matrizen vom Typus $Q^{(r,n)}$ und ergänzt man jede auf genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix

$$\begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix} = U,$$

so durchläuft

$$\varrho = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U'^{-1} \end{pmatrix}$$

gerade ein Vertretersystem der gewünschten Art. Damit erhält man noch

$$(30) \qquad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\substack{\sigma \subset \mathsf{S}_0 \\ Q \text{ primitiv}}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1[Q]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}.$$

Um für A_r einen einfachen Fundamentalbereich zu bestimmen, bedienen wir uns der Parameterdarstellung (17). Die Substitution (28) führt Z in $UZU' + S$, also X in $UXU' + S$ und Y in

$$Y[U'] = \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ O & Y_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & U_3' \\ O & U_4' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ O & Y_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & U_3' + V\,U_4' \\ O & U_4' \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ O & Y_2[U_4'] \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & U_3' + V\,U_4' \\ O & E \end{pmatrix}\right]$$

über. Die Anwendung von τ auf Z bewirkt also die Ersetzungen

$$X \to U X U' + S, \quad V \to U_3' + V U_4', \quad Y_1 \to Y_1, \quad Y_2 \to U_4 Y_2 U_4'.$$

Dabei ist S eine beliebige ganze symmetrische Matrix, U_3 eine beliebige ganze Matrix und U_4 eine beliebige unimodulare Matrix. Im Raum der Matrizen $V = (v_{\mu\nu})$ bezeichne $\mathfrak{W}_{r,n-r}$ den modulo 1 reduzierten Bereich

$$-{}^1\!/_2 \leqq v_{\mu\nu} \leqq {}^1\!/_2 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, r; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Offenbar stellt der durch

$$(31) \qquad X \subset \mathfrak{W}_n, \quad V \subset \mathfrak{W}_{r,n-r}, \quad Y_2 \subset \mathfrak{R}_{n-r}$$

erklärte Z-Bereich in $\mathfrak{H}_n$ einen Fundamentalbereich von A_r dar; wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{S}_r$.

Die zu (29) gehörige mit $|Y|^{\frac{k}{2}}$ multiplizierte Betragreihe lautet

$$(32) \qquad h_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \subset \mathsf{S}_r}' e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}},$$

wenn zur Abkürzung $\sigma(Z) = Z_\sigma = X_\sigma + i\, Y_\sigma$ gesetzt wird. Wir beweisen ihre Konvergenz.

Es sei $Z_0 \subset \mathfrak{H}_n$ fest gewählt. Um Z_0 bestimmen wir eine symplektische Kugel $\mathfrak{K}_0$ vom Radius ${}^1\!/_2\,\varrho$ und wählen ϱ so klein, daß $\mathfrak{K}_0$ und $\sigma(\mathfrak{K}_0)$ (σ beliebig aus M_n) nur dann Punkte gemeinsam haben, wenn $\sigma(Z_0) = Z_0$ ist. e_0 sei die Anzahl dieser σ. Z und Z^* seien willkürliche Punkte aus $\mathfrak{K}_0$. Offenbar ist

$$s(Z, Z^*) \leqq \varrho, \text{ also auch } s(\sigma(Z), \sigma(Z^*)) \leqq \varrho.$$

Um für die Reihen $h_{-k}(Z^*, T)$ eine von Z^* unabhängige konvergente Majorante zu bekommen, bedürfen wir noch einiger Abschätzungen; dabei wird $s(Z, Z^*) \leqq \varrho$ vorausgesetzt. Y_1 entstehe aus Y durch Streichen der letzten $n-r$ Zeilen und Spalten. Dann ist

$$\operatorname{Sp}(T\,Y) = \operatorname{Sp}(T_1\,Y_1).$$

Wir bestimmen eine reelle Matrix $R = R^{(r)}$ so, daß $Y_1 = R\,R'$ wird. Bezeichnen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_r$ die Spaltenvektoren von R und μ_1, μ_2 das Minimum bzw. Maximum der quadratischen Form $T_1[\mathfrak{x}]$ auf $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = 1$, so gilt

$$\operatorname{Sp}(T_1\,Y_1) = \sum_{\nu=1}^{r} T_1[\mathfrak{r}_\nu],$$

$$\sum_{\nu=1}^{r} T_1[\mathfrak{r}_\nu] \leqq \mu_2 \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{r}_\nu = \mu_2 \operatorname{Sp} Y_1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{r} T_1[\mathfrak{r}_\nu] \geqq \mu_1 \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{r}_\nu = \mu_1 \operatorname{Sp} Y_1,$$

also

$$\mu_1 \operatorname{Sp}(Y_1) \leqq \operatorname{Sp}(T\,Y) \leqq \mu_2 \operatorname{Sp}(Y_1),$$

analog

$$\mu_1 \operatorname{Sp}(Y_1^*) \leqq \operatorname{Sp}(T\,Y^*) \leqq \mu_2 \operatorname{Sp}(Y_1^*),$$

folglich nach Hilfssatz 3

$$\operatorname{Sp}(T\,Y^*) \geqq m \operatorname{Sp}(T\,Y) \text{ mit } m = \frac{\mu_1}{\mu_2\, m_1}.$$

In dieser Darstellung können Y und Y^* durch die Imaginärteile von $\sigma(Z) = X_\sigma + i\, Y_\sigma$ und $\sigma(Z^*) = X_\sigma^* + i\, Y_\sigma^*$ ersetzt werden; man erhält

$$\mathrm{Sp}\,(T\, Y_\sigma^*) \geqq m\, \mathrm{Sp}\,(T\, Y_\sigma).$$

Schließlich liefert Hilfssatz 3 noch

$$|\,Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leqq M\, |\,Y_\sigma|^{\frac{k}{2}} \text{ mit } M = m_2^{\frac{k}{2}}.$$

Für das allgemeine Reihenglied von $h_{-k}(Z^*, T)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(T Y_\sigma^*)}\, |\,Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leqq M\, e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y_\sigma)}\, |\,Y_\sigma|^{\frac{k}{2}}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $Z \subset \mathfrak{K}_0$; folglich kann die rechte Seite durch den über $\mathfrak{K}_0$ erstreckten Integralmittelwert ersetzt werden:

$$e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(T Y_\sigma^*)}\, |\,Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leqq \frac{M}{J_0} \int_{Z \subset \mathfrak{K}_0} \!\!\cdots\! \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y_\sigma)}\, |\,Y_\sigma|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d\,(X_\sigma)\, d\,(Y_\sigma).$$

Dabei ist

$$J_0 = \int_{Z \subset \mathfrak{K}_0} \!\!\cdots\! \int |\,Y_\sigma|^{-n-1}\, d\,(X_\sigma)\, d\,(Y_\sigma) = \int_{Z \subset \mathfrak{K}_0} \!\!\cdots\! \int |\,Y|^{-n-1}\, d\,(X)\, d\,(Y)$$

der gegenüber Modulsubstitutionen invariante symplektische Inhalt von $\mathfrak{K}_0$ und

$$d\,(X) = \prod_{\mu \leqq \nu} d\, x_{\mu\nu}, \quad d\,(Y) = \prod_{\mu \leqq \nu} d\, y_{\mu\nu}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} h_{-k}(Z^*, T) &\leqq \frac{M}{J_0\, \varepsilon\,(T_1)} \sum_{\sigma \subset S_r} \int_{Z \subset \mathfrak{K}_0} \!\!\cdots\! \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y_\sigma)}\, |\,Y_\sigma|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d\,(X_\sigma)\, d\,(Y_\sigma) \\ &= \frac{M}{J_0\, \varepsilon\,(T_1)} \sum_{\sigma \subset S_r} \int_{Z \subset \sigma(\mathfrak{K}_0)} \!\!\cdots\! \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y)}\, |\,Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d\,(X)\, d\,(Y). \end{aligned} \tag{33}$$

Jede Kugel $\sigma\,(\mathfrak{K}_0)$ kann in endlich viele punktfremde meßbare Teilbereiche zerlegt werden:

$$\sigma\,(\mathfrak{K}_0) = \mathfrak{B}_\sigma^{(1)} + \mathfrak{B}_\sigma^{(2)} + \cdots + \mathfrak{B}_\sigma^{(a_\sigma)},$$

so daß jeder Teilbereich $\mathfrak{B}_\sigma^{(\nu)}$ aus inäquivalenten Punkten bezüglich A_r besteht; denn $\sigma\,(\mathfrak{K}_0)$ hat mit nur endlich vielen der Fundamentalbereiche, die aus $\mathfrak{S}_r$ durch Anwendung von Substitutionen aus A_r hervorgehen, Punkte gemeinsam. Zu $\mathfrak{B}_\sigma^{(\nu)}$ bestimmen wir in $\mathfrak{S}_r$ den bezüglich A_r äquivalenten Bereich $\mathfrak{A}_\sigma^{(\nu)}$. Da der Integrand

$$e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y)}\, |\,Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d\,(X)\, d\,(Y)$$

gegenüber den Substitutionen aus A_r invariant ist, so folgt aus (33)

$$h_{-k}(Z^*, T) \leqq \frac{M}{J_0\, \varepsilon\,(T_1)} \sum_{\sigma \subset S_r} \sum_{\nu=1}^{a_\sigma} \int_{Z \subset \mathfrak{A}_\sigma^{(\nu)}} \!\!\cdots\! \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T Y)}\, |\,Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d\,(X)\, d\,(Y). \tag{34}$$

Wir zeigen, daß ein vorgegebener Punkt $Z \subset \mathfrak{S}_r$ höchstens e_0^2 verschiedenen $\mathfrak{A}_\sigma^{(\nu)}$ angehören kann. Gleichwertig hiermit sind die beiden Forderungen:

1. In jeder Kugel $\sigma\,(\mathfrak{K}_0)$ liegen höchstens e_0 verschiedene Punkte, die mit Z bezüglich A_r äquivalent sind.

2. Es gibt höchstens e_0 verschiedene $\sigma \subset S_r$, so daß $\sigma\,(\mathfrak{K}_0)$ mindestens einen mit Z bezüglich A_r äquivalenten Punkt enthält.

Diese Aussagen lassen sich wie folgt beweisen. Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ verschiedene Substitutionen $\subset \mathsf{S}_r$ und $Z_{\mu 1}, Z_{\mu 2}, \ldots, Z_{\mu s_\mu}$ verschiedene Punkte $\subset \sigma_\mu(\mathfrak{K}_0)$. Ferner sei $Z_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}(Z)$, $\tau_{\mu\nu} \subset \mathsf{A}_r$ und $s_\mu \geq 1$ für alle μ, ν. Da alle Kugeln $\tau_{\mu\nu}^{-1}\sigma_\mu(\mathfrak{K}_0)$ den Punkt Z gemeinsam haben, ist

$$\tau_{\mu\nu}^{-1}\sigma_\mu(Z_0) = \tau_{11}^{-1}\sigma_1(Z_0) \quad \text{oder} \quad \tau_{\mu\nu}^{-1}\sigma_\mu = \tau_{11}^{-1}\sigma_1\alpha,$$

wobei α eine von den e_0 Substitutionen bezeichnet, die Z_0 festlassen. Man erkennt nun, daß σ_μ höchstens e_0 verschiedene Linksrestklassen von A_r in M_n repräsentieren kann. Mithin ist $t \leq e_0$. Außerdem sind bei festem μ die Substitutionen $\tau_{\mu\nu}$ auf e_0 Möglichkeiten beschränkt, so daß auch $s_\mu \leqq e_0$ gilt, q. e. d.

Bekanntlich gibt es unter den zu Z_0 äquivalenten Punkten $\sigma(Z_0) = X_{0\sigma} + i\,Y_{0\sigma}$ einen, in welchem $|Y_{0\sigma}|$ einen maximalen Wert hat. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann auch eine von σ unabhängige Schranke für $|Y|$, wenn Z in einer der Kugeln $\sigma(\mathfrak{K}_0)$ liegt. Da $|Y|$ gegenüber den Substitutionen aus A_r invariant ist, kann t so bestimmt werden, daß der durch

$$Z \subset \mathfrak{S}_r, \quad |Y| \leqq t$$

gegebene Bereich alle $\mathfrak{A}_\sigma^{(\nu)}$ enthält. Aus dem Bisherigen geht hervor, daß dieser Bereich an jeder Stelle durch die Gesamtheit aller $\mathfrak{A}_\sigma^{(\nu)}$ höchstens e_0^2-fach überdeckt wird, woraus

$$(35) \quad h_{-k}(Z^*, T) \leqq \frac{M\,e_0^2}{J_0{}^{\nu}(T_1)} \int_{Z\subset\mathfrak{S}_r,\,|Y|\leqq t} \cdots \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(TY)}\,|Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

erhellt. Es bleibt zu untersuchen, wann das Integral

$$(36) \qquad F_k(m\,T_1, t) = \int_{Z\subset\mathfrak{S}_r,\,|Y|\leqq t} \cdots \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(TY)}\,|Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\,d(X)\,d(Y)$$

existiert.

Im allgemeinen Fall $(0 < r < n)$ führen wir an Stelle von Y die durch (17) gegebenen Matrizen Y_1, Y_2, V ein. Man bestätigt leicht, daß die Formeln

$$(37) \qquad |Y| = |Y_1|\,|Y_2| \quad \text{und} \quad d(Y) = |Y_1|^{n-r}\,d(Y_1)\,d(Y_2)\,d(V)$$

gelten, wenn
$$d(V) = \prod_{\mu,\nu} dv_{\mu\nu}$$
gesetzt wird und wenn $d(Y_1)$, $d(Y_2)$ wie $d(Y)$ erklärt werden. Nach (31) wird nun

$$(38) \qquad F_k(m\,T_1, t) =$$

$$= \int_{\substack{X\subset\mathfrak{W}_n,\;V\subset\mathfrak{W}_{r,n-r}\\ Y_1>0,\;Y_2\subset\mathfrak{K}_{n-r}\\ |Y_1||Y_2|\leqq t}} \cdots \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T_1Y_1)}\,|Y_1|^{\frac{k}{2}-r-1}\,|Y_2|^{\frac{k}{2}-n-1}\,d(X)\,d(V)\,d(Y_1)\,d(Y_2)$$

$$= \int_{\substack{Y_1>0,\;Y_2\subset\mathfrak{K}_{n-r}\\ |Y_1|\,|Y_2|\leqq t}} \cdots \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T_1Y_1)}\,|Y_1|^{\frac{k}{2}-r-1}\,|Y_2|^{\frac{k}{2}-n-1}\,d(Y_1)\,d(Y_2)$$

$$\text{für} \quad 0 < r < n.$$

Die Integration über Y_2 kann mit Hilfe von (23) ausgeführt werden und ergibt

$$(39) \qquad F_k(m\,T_1, t) =$$

$$= \frac{n-r+1}{k-n-r-1}\,v_{n-r}\,t^{-\frac{k-n-r-1}{2}} \int_{Y_1>0} \cdots \int e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(T_1Y_1)}\,|Y_1|^{\frac{n-r-1}{2}}\,d(Y_1)$$

$$\text{für} \quad k > n+r+1, \quad 0 < r < n.$$

Nach der von SIEGEL[11]) mitgeteilten Formel

$$(40)\qquad \underset{Y>0}{\int\cdots\int} e^{-\mathrm{Sp}(TY)} |Y|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d(Y) =$$
$$= \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\, \Gamma(s)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(s-\frac{n-1}{2}\right)|T|^{-s}$$
$$\text{für}\quad Y = Y^{(n)},\ T = T^{(n)} > 0,\ s > \frac{n-1}{2}$$

erhält man schließlich

$$(41)\qquad F_k(m\,T_1, t) =$$
$$= \frac{n-r+1}{k-n-r-1}\, v_{n-r}\, t^{\frac{k-n-r-1}{2}}\, \pi^{\frac{r(r-1)}{4}}\, (2\pi m)^{-\frac{rn}{2}}\, |T_1|^{-\frac{n}{2}} \prod_{\nu=0}^{r-1} \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)$$
$$\text{für}\ k > n+r+1,\ 0 < r < n.$$

In den Grenzfällen $(r = 0, n)$ treten an Stelle von (38) die folgenden Formeln:

$$(38')\qquad F_k(m\,T_1, t) = \underset{\substack{X\subset\mathfrak{W}_n,\ Y\subset\mathfrak{K}_n\\ |Y|\leq t}}{\int\cdots\int} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(X)\, d(Y)$$
$$= \underset{\substack{Y\subset\mathfrak{K}_n\\ |Y|\leq t}}{\int\cdots\int} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(Y) = \frac{n+1}{k-n-1}\, v_n\, t^{\frac{k-n-1}{2}}$$
$$\text{für}\ r = 0,\ k > n+1,$$

$$(38'')\qquad F_k(m\,T_1, t) = \underset{\substack{X\subset\mathfrak{W}_n,\ Y>0\\ |Y|\leq t}}{\int\cdots\int} e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(TY)}\, |Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(X)\, d(Y)$$
$$\leq \underset{Y>0}{\int\cdots\int} e^{-2\pi m\,\mathrm{Sp}(TY)}\, |Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(Y)$$
$$= \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\, (2\pi m)^{\frac{n(n+1-k)}{2}}\, |T|^{\frac{n+1-k}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k-n-\nu}{2}\right)$$
$$\text{für}\ r = n,\ k > 2n.$$

Damit ist bewiesen, daß die POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ für $k > \mathrm{Min}\,(2n, n+r+1)$ in einer Kugelumgebung eines jeden Punktes $Z_0 \subset \mathfrak{H}_n$ absolut und gleichmäßig konvergieren. Infolgedessen konvergieren die Reihen absolut in $\mathfrak{H}_n$ und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich von $\mathfrak{H}_n$. $g_{-k}(Z, T)$ ist also eine reguläre Funktion der unabhängigen Elemente von Z, wenn Z in $\mathfrak{H}_n$ variiert. Da wir uns auf Modulformen gerader Dimension beschränken, so können wir im folgenden die Forderung $k > \mathrm{Min}\,(2n, n+r+1)$ durch $k > n+r+1$ ersetzen; denn beide Ungleichungen besagen im Falle $k \equiv 0\ (2)$ dasselbe.

Es soll nun bewiesen werden, daß die POINCARÉschen Reihen in FOURIER-Reihen der Art (2) entwickelt werden können. Da $g_{-k}(Z, T)$ sich gegenüber den Modulsubstitutionen $Z \to Z + S$ ($S = S'$ ganz) wie eine Modulform verhält, also invariant und als Funktion der unabhängigen Elemente von Z in $\mathfrak{H}_n$ regulär ist, so gibt es jedenfalls eine FOURIER-Entwicklung

[11]) SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math. **36**, 527 (1935), Hilfssatz 37.

$$g_{-k}(Z, T) = \sum_{T_0} a(T, T_0)\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_0 Z)}, \tag{42}$$

wobei über alle halbganzen symmetrischen T_0 summiert wird. Man braucht also nur zu zeigen, daß $a(T, T_0) = 0$ ist, wenn T_0 nicht ≥ 0 ist.

Hilfssatz 5: *Eine für $Z \subset \mathfrak{H}_n$ erklärte komplexwertige Funktion $h(Z)$ sei in jedem meßbaren abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{H}_n$ im* RIEMANNschen *Sinne integrierbar, verhalte sich gegenüber den Modulsubstitutionen wie eine Modulform:*

$$h(\sigma(Z)) = |CZ + D|^k\, h(Z) \text{ für } \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n$$

und genüge der Abschätzung

$$\operatorname{abs} h(Z) \leq M\, e^{-m|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \subset \mathfrak{F}_n,$$

wobei m, M positive Konstanten bezeichnen. Ferner sei T die durch (27) erklärte Matrix. Dann ist mit $\delta_0 = 1$ und $\delta_r = 2$ für $r > 0$

$$\begin{aligned} &\delta_r \int_{Z \subset \mathfrak{S}_r} \cdots \int h(Z)\, e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T\bar{Z})}\, |Y|^{k-n-1}\, d(X)\, d(Y) \\ &= \varepsilon(T_1) \int_{Z \subset \mathfrak{F}_n} \cdots \int h(Z)\, \overline{g_{-k}(Z, T)}\, |Y|^{k-n-1}\, d(X)\, d(Y) \end{aligned} \tag{43}$$

für $k > \operatorname{Min}(2n, n + r + 1)$. D. h. es wird die Existenz und Gleichheit der Integrale behauptet.

Beweis: Gemäß Voraussetzung ist

$$\operatorname{abs} h(Z)\, |Y|^{\frac{k}{2}} \leq M\, Y^{\frac{k}{2}}\, e^{-m|Y|^{\frac{1}{n}}} \leq M_1\, e^{-m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \subset \mathfrak{F}_n,$$

wenn $m_1 = \frac{m}{2}$ gesetzt und die positive Konstante M_1 geeignet gewählt wird. Wendet man auf $Z\ (\subset \mathfrak{F}_n)$ eine Modulsubstitution an, so ändert sich $\operatorname{abs} h(Z)\, |Y|^{\frac{k}{2}}$ nicht und $|Y|$ wird sicher nicht größer. Demnach ist

$$\operatorname{abs} h(Z)\, |Y|^{\frac{k}{2}} \leq M_1\, e^{-m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \subset \mathfrak{H}_n.$$

Wir zeigen nun, daß

$$h(Z)\, e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T\bar{Z})}\, |Y|^{k-n-1}$$

über $\mathfrak{S}_r$ absolut integrierbar ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn das Integral

$$G_k(T_1, m_1) = \int_{Z \subset \mathfrak{S}_r} \cdots \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(TY) - m_1|Y|^{\frac{1}{n}}}\, |Y|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(X)\, d(Y) \tag{44}$$

existiert. Wir führen hier wieder die Parameterdarstellung (17) ein. Beachtet man (31) und (37), so erhält man

$$G_k(T_1, m_1) = \int_{Y_1 > 0,\ Y_2 \subset \mathfrak{R}_{n-r}} \cdots \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T_1 Y_1) - m_1|Y_1|^{\frac{1}{n}}|Y_2|^{\frac{1}{n}}}\, |Y_1|^{\frac{k}{2}-r-1}\, |Y_2|^{\frac{k}{2}-n-1}\, d(Y_1)\, d(Y_2).$$

Die Integration über Y_2 kann mit Hilfe von (24) ausgeführt werden. Es ergibt sich im allgemeinen Fall $0 < r < n$

$$\begin{aligned} G_k(T_1, m_1) &= \frac{n(n-r+1)}{2}\, v_{n-r}\, m_1^{-\frac{n(k-n-r-1)}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n(k-n-r-1)}{2}\right) \\ &\quad \int_{Y_1 > 0} \cdots \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T_1 Y_1)}\, |Y_1|^{\frac{n-r-1}{2}}\, d(Y_1) \text{ für } k > n + r + 1, \end{aligned}$$

nach (40) also

$$G_k(T_1, m_1) = \frac{n(n-r+1)}{2} v_{n-r}\, m_1^{-\frac{n(k-n-r-1)}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n(k-n-r-1)}{2}\right) \tag{45}$$
$$\pi^{\frac{r(r-1)}{4}} (2\pi)^{-\frac{rn}{2}} |T_1|^{-\frac{n}{2}} \prod_{\nu=0}^{r-1} \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right) \text{ für } k > n+r+1.$$

Dazu treten die Grenzfälle

$$G_k(T_1, m_1) = \int\cdots\int_{Y\subset\mathfrak{F}_n} e^{-m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y) \tag{45'}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} v_n\, \Gamma\left(\frac{n(k-n-1)}{2}\right) m_1^{\frac{n(n+1-k)}{2}}$$
$$\text{für } r=0,\ k>n+1,$$

$$G_k(T_1, m_1) = \int\cdots\int_{Y>0} e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(TY) - m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y) \tag{45''}$$
$$\leqq \int\cdots\int_{Y>0} e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y)$$
$$= \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (2\pi)^{\frac{n(n+1-k)}{2}} |T|^{\frac{n+1-k}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k-n-\nu}{2}\right)$$
$$\text{für } r=n,\ k>2n.$$

Damit ist die Existenz des Integrals

$$H_k(T_1, h) = \int\cdots\int_{Z\subset\mathfrak{S}_r} h(Z)\, e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(T\bar{Z})} |Y|^{k-n-1} d(X)\, d(Y) \tag{46}$$

für $k > \mathrm{Min}\,(2n, n+r+1)$ bewiesen und zugleich sind die folgenden Umformungen dieses Integrals gerechtfertigt.

Nach (28) enthält A_0 mit τ auch $-\tau$, während A_r für $r>0$ von den beiden Modulsubstitutionen τ und $-\tau$ höchstens eine enthält. Wir dürfen also annehmen, daß S_r im Falle $r>0$ mit σ auch $-\sigma$ enthält. Bildet man die Vereinigung aller $\sigma(\mathfrak{F}_n)$ (σ beliebig aus S_r), so erhält man einen einfach bzw. doppelt überdeckten Fundamentalbereich von A_r, je nachdem $r=0$ oder $r>0$ ist. Da der Integrand von (46) gegenüber den Substitutionen aus A_r invariant ist, kann (46) in

$$H_k(T_1, h) = \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma\subset\mathsf{S}_r}{}' \int\cdots\int_{Z\subset\sigma(\mathfrak{F}_n)} h(Z)\, e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(T\bar{Z})} |Y|^{k-n-1} d(X)\, d(Y) \tag{47}$$
$$= \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma\subset\mathsf{S}_r}{}' \int\cdots\int_{Z\subset\mathfrak{F}_n} h(\sigma(Z))\, e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(T\overline{\sigma(Z)})} |Y|^k |CZ+D|^{-k} |C\bar{Z}+D|^{-k} |Y|^{-n-1} d(X)\, d(Y)$$
$$= \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma\subset\mathsf{S}_r}{}' \int\cdots\int_{Z\subset\mathfrak{F}_n} h(Z)\, e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(T\overline{\sigma(Z)})} |C\bar{Z}+D|^{-k} |Y|^{k-n-1} d(X)\, d(Y)$$

übergeführt werden. Dabei ist $\delta_0 = 1$, $\delta_r = 2$ für $r>0$ und (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ. Vertauschung der Summation mit der Integration ergibt nach (29)

$$H_k(T_1, h) = \frac{\varepsilon(T_1)}{\delta_r} \int\cdots\int_{Z\subset\mathfrak{F}_n} h(Z)\, \overline{g_{-k}(Z, T)}\, |Y|^{k-n-1} d(X)\, d(Y), \text{ q. e. d.} \tag{48}$$

Im folgenden benötigen wir eine Parameterdarstellung der Determinantenfläche $|Y| =$ konstant. Eine solche wird durch

$$Y = u\begin{pmatrix} W & \mathfrak{w} \\ \mathfrak{w}' & |W|^{-1} + W^{-1}[\mathfrak{w}] \end{pmatrix} \tag{49}$$

geliefert. Dabei ist u eine positive reelle Zahl, $W = W^{(n-1)} = (w_{\mu\nu}) > 0$ und $\mathfrak{w} = (w_\mu)$ eine Spalte von $n-1$ beliebigen reellen Zahlen. Man stellt leicht fest, daß $|Y| = u^n$ und

$$d\,(Y) = u^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\,(|W|^{-1} + W^{-1}[\mathfrak{w}])\,d\,(W)\,d\,(\mathfrak{w})\,d\,u \tag{50}$$

mit

$$d\,(W) = \prod_{\mu \leqq \nu} d\,w_{\mu\nu},\quad d\,(\mathfrak{w}) = \prod_{\mu} d\,w_\mu$$

ist.

Es sei nun

$$\mathrm{Sp}\,(T^*\,Y^*) < 0,\quad Y^* \subset \mathfrak{K}_n, \qquad T^* \text{ halbganz und symmetrisch.} \tag{51}$$

Für $Y = Y^*$ sei $u = u^*$, $W = W^*$ und $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}^*$. Da Y^* in $\mathfrak{K}_n$ liegt, kann u_0 bekanntlich[5]) so bestimmt werden, daß für $u \geqq u_0$, $X \subset \mathfrak{W}_n$ stets

$$X + i\,\frac{u}{u^*}\,Y^* \subset \mathfrak{F}_n$$

gilt. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß Y^* ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}_n$ ist. Dann gilt aber auch noch für eine volle Umgebung $\mathfrak{V}$ von $(W^*, \mathfrak{w}^*)$ im $(W, \mathfrak{w})$-Raum $\mathrm{Sp}\,(T^*\,Y) < 0$ und

$$X + i\,Y \subset \mathfrak{F}_n,\ \text{ wenn } u \geqq u_0,\ (W, \mathfrak{w}) \subset \mathfrak{V},\ X \subset \mathfrak{W}_n$$

ist. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{V}$ meßbar und abgeschlossen ist; dann hat $\mathfrak{V}$ einen positiven Inhalt:

$$\int_{(W,\mathfrak{w})\subset\mathfrak{V}}\!\!\cdots\!\int d\,(W)\,d\,(\mathfrak{w}) > 0\,.$$

Ferner läßt sich eine positive Konstante δ so bestimmen, daß

$$\mathrm{Sp}\,(T^*\,Y) \leqq -2\,\delta\,u \qquad \text{für } (W, \mathfrak{w}) \subset \mathfrak{V}$$

gilt. Für ein hinreichend kleines $\delta_1 > 0$ ist dann auch

$$\delta_1\,\mathrm{Sp}\,(Y) \leqq \delta\,u \qquad \text{für } (W, \mathfrak{w}) \subset \mathfrak{V}.$$

Wir setzen nun

$$h\,(Z) = \begin{cases} e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(T^* X) - 2\pi\delta_1\,\mathrm{Sp}(Y)} & \text{für } u \geqq u_0,\ (W, \mathfrak{w}) \subset \mathfrak{V},\ X \subset \mathfrak{W}_n, \\ 0 & \text{für alle anderen Punkte} \subset \mathfrak{F}_n \end{cases}$$

und

$$h\,(\sigma\,(Z)) = |C\,Z + D|^k\,h\,(Z) \text{ für } Z \subset \mathfrak{F}_n,\ \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n\,. \tag{52}$$

Die Funktion $h\,(Z)$ ist damit in $\mathfrak{H}_n$ erklärt. Man stellt leicht fest, daß (52) nicht nur in $\mathfrak{F}_n$, sondern ganz $\mathfrak{H}_n$ gilt. Für $Y > 0$ ist

$$\mathrm{Sp}\,(Y) \geqq n\,\sqrt[n]{y_{11}\,y_{22}\cdots y_{nn}} \geqq n\,|Y|^{\frac{1}{n}}$$

und daher

$$\mathrm{abs}\,h\,(Z) \leqq e^{-2\pi n\delta_1 |Y|^{\frac{1}{n}}} \tag{53}$$

für $Z \subset \mathfrak{F}_n$. Auf $h\,(Z)$ ist also Hilfssatz 5 anwendbar. Insbesondere ist damit gezeigt, daß

$$\int_{Z\subset\mathfrak{F}_n}\!\!\cdots\!\int h\,(Z)\,\overline{g_{-k}\,(Z, T)}\,|Y|^{k-n-1}\,d\,(X)\,d\,(Y) \tag{54}$$

existiert. Beachtet man

$$a\,(T,\,T^*)\,e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(T^*Y)} = \underset{X\subset\mathfrak{W}_n}{\int\cdots\int} g_{-k}\,(Z,\,T)\,e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(T^*X)}\,d\,(X)\,,$$

so geht (54) über in

$$\underset{\substack{u\geqq u_0,\,(W,\,\mathfrak{w})\subset\mathfrak{B}\\ X\subset\mathfrak{W}_n}}{\int\cdots\int} \overline{g_{-k}\,(Z,\,T)}\,e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(T^*X)-2\pi\delta_1\mathrm{Sp}(Y)}\,|Y|^{k-n-1}\,d\,(X)\,d\,(Y)$$
$$= \overline{a\,(T,\,T^*)}\underset{\substack{(W,\,\mathfrak{w})\subset\mathfrak{B}\\ u\geqq u_0}}{\int\cdots\int} e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(T^*Y)-2\pi\delta_1\mathrm{Sp}(Y)}\,|Y|^{k-n-1}\,d\,(Y)\,.$$

Das letzte Integral ist nach unten durch

$$\underset{\substack{(W,\,\mathfrak{w})\subset\mathfrak{B}\\ u\geqq u_0}}{\int\cdots\int} e^{2\pi\delta u}\,u^{n(k-n-1)+\frac{n(n+1)}{2}-1}\,(|W|^{-1} + W^{-1}\,[\mathfrak{w}])\,d\,(W)\,d\,(\mathfrak{w})\,du$$
$$= \underset{(W,\,\mathfrak{w})\subset\mathfrak{B}}{\int\cdots\int} (|W|^{-1} + W^{-1}\,[\mathfrak{w}])\,d\,(W)\,d\,(\mathfrak{w})\int\limits_{u_0}^{\infty} e^{2\pi\delta u}\,u^{n\left(k-\frac{n+1}{2}\right)-1}\,du$$

abgeschätzt. Das Integral über u divergiert; das Integral über W, $\mathfrak{w}$ hat einen positiven Wert. Es muß also $a\,(T,\,T^*) = 0$ sein.

Sei T_0 nicht $\geqq 0$. Dann gibt es eine positive Matrix Y_0 mit $\mathrm{Sp}\,(T_0\,Y_0) < 0$. Wir setzen $T^* = T_0\,[U^{-1}]$, $Y^* = Y_0\,[U']$ (U unimodular), so daß $\mathrm{Sp}\,(T^*\,Y^*) = \mathrm{Sp}\,(T_0\,Y_0) < 0$ und bei geeigneter Wahl von U auch $Y^* \subset \mathfrak{R}_n$ gilt. Unter der Voraussetzung (51), die nun erfüllt ist, konnten wir aber $a\,(T,\,T^*) = 0$ schließen. Aus $g_{-k}\,(Z\,[U'],\,T) = g_{-k}\,(Z,\,T)$ folgt andererseits $a\,(T,\,T^*) = a\,(T,\,T_0)$ und damit $a\,(T,\,T_0) = 0$, q. e. d.

Zusammenfassend können wir folgendes feststellen:

Satz 1: *Es sei $T = T^{(n)}$ eine halbganze symmetrische Matrix $\geqq 0$ vom Rang r und $k \equiv 0\ (2)$, $k > n + r + 1$. Dann stellt*

$$g_{-k}\,(Z,\,T) = \sum_{\sigma\subset\mathfrak{S}(T)} e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(T\sigma(Z))}\,|C\,Z + D|^{-k}$$

eine Modulform der Dimension $-k$ dar. Dabei ist $(C,\,D)$ die zweite Matrizenzeile von σ.

Wie aus den Untersuchungen[5]) hervorgeht, sind für eine Spitzenform $g_{-k}\,(Z)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 erfüllt. Bezeichnet $a\,(T)$ den FOURIER-Koeffizienten von $g_{-k}\,(Z)$ zur Exponentenmatrix T, so kann unter Verwendung der Bezeichnung (6) nach (43) und (40)

$$\varepsilon\,(T_1)\,(g_{-k}\,(Z),\,g_{-k}\,(Z,\,T)) =$$
$$= \delta_r \underset{Z\subset\mathfrak{S}_r}{\int\cdots\int} g_{-k}\,(Z)\,e^{-2\pi i\,\mathrm{Sp}(TZ)}\,d\,(X)\,e^{-4\pi\,\mathrm{Sp}(TY)}\,|Y|^{k-n-1}\,d\,(Y)$$
$$= \begin{cases} 2\,a\,(T)\underset{Y>0}{\int\cdots\int} e^{-4\pi\,\mathrm{Sp}(TY)}\,|Y|^{k-n-1}\,d\,(Y) \\ 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2\,a\,(T)\,|T|^{\frac{n+1}{2}-k}\,\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\,(4\,\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}-nk}\,\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma\left(k-\frac{n+\nu}{2}\right) & \text{für } |T|>0, \\ 0 & \text{für } T = 0 \end{cases}$$

geschlossen werden. Damit ist die Grundformel (7) bewiesen.

§ 3. Der Darstellungssatz.

Wir wollen nun den durch (9) erklärten Funktional-Operator Φ auf die POINCARÉschen Reihen anwenden. Um den erforderlichen Grenzprozeß durchzuführen, setzen wir

$$Z = \begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & z \end{pmatrix} \text{ mit } Z^* \subset \mathfrak{H}_{n-1},\ z \subset \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{n} = \text{Nullspalte}. \tag{55}$$

Jede Modulform $g_{-k}(Z)$ der Dimension $-k$, insbesondere also auch $g_{-k}(Z, T)$ stellt nach E. WITT[12]) bei festem Z^* in z eine Modulform ersten Grades von der Dimension $-k$ dar. Wir bringen die Abhängigkeit von z in besonderer Weise zum Ausdruck, indem wir bei fest gewähltem T

$$\varphi(z) = g_{-k}(Z, T) \tag{56}$$

setzen. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{S}(T).$$

Man stellt leicht fest, daß $AZ + B$ in z linear ist und daß die $n-1$ ersten Spalten dieser Matrix von z nicht abhängen. Ebenso ist $|CZ + D| (CZ + D)^{-1}$ in z linear, wobei jedoch die letzte Zeile von z nicht abhängt. Infolgedessen ist $|CZ + D| \sigma(Z)$ in z linear. Berücksichtigen wir noch, daß auch $|CZ + D| = cz + d$ gilt mit Koeffizienten c, d, die von z unabhängig sind, so ergibt sich

$$\operatorname{Sp}(T\sigma(Z)) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{57}$$

mit einer von z unabhängigen Matrix $L_\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Offenbar ist

$$\mathfrak{Im}\, L_\sigma(z) \geqq 0 \qquad \text{für } z \subset \mathfrak{H}_1. \tag{58}$$

Wir zerlegen die POINCARÉsche Reihe $g_{-k}(Z, T)$, die nun in der Gestalt

$$\varphi(z) = \sum_{\sigma \subset \mathsf{S}(T)}' e^{2\pi i L_\sigma(z)} (cz + d)^{-k} \tag{59}$$

erscheint, in Teilreihen. G bezeichne die Gruppe der Modulsubstitutionen

$$\tau_t = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} \text{ mit } B = (b_{\mu\nu}),\ b_{\mu\nu} = \begin{cases} t & \text{für } (\mu, \nu) = (n, n), \\ 0 & \text{für } (\mu, \nu) \neq (n, n). \end{cases} \tag{60}$$

Offenbar ist $\tau_t = \tau_1^t$, also G zyklisch. Wendet man τ_t auf Z an, so bleibt Z^* fest und z geht in $z + t$ über.

Ein vollständiges System von Modulsubstitutionen ϱ, die verschiedene Komplexe $\mathsf{A}(T)\varrho\mathsf{G}$ ergeben, bezeichnen wir mit S^*. Die ganze nicht-negative Zahl n_ϱ erzeuge den Modul der Exponenten t, für welche

$$(\varrho\tau_1\varrho^{-1})^t = \varrho\tau_1^t\varrho^{-1} \subset \mathsf{A}(T)$$

gilt. Sodann ist

$$\mathsf{A}(T)\varrho\tau_p = \mathsf{A}(T)\varrho\tau_q \text{ mit } p \equiv q\ (n_\varrho)$$

gleichwertig. Es ergibt sich

$$\mathsf{M}_n = \sum_{\varrho \subset \mathsf{S}^*}' \mathsf{A}(T)\varrho\mathsf{G} = \sum_{\varrho \subset \mathsf{S}^*}' \sum_{t \bmod n_\varrho}' \mathsf{A}(T)\varrho\tau_t.$$

---

[12]) WITT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 14, 323 (1941).

Die hier auftretenden Produkte $\varrho\,\tau_t$ definieren also ein System $\mathsf{S}(T)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß sich die Funktionen

$$\text{(61)}\qquad \omega_\varrho(Z) = e^{2\pi i\, Sp(T\varrho(Z))}\,|C\,Z + D|^{-k} \text{ mit } \varrho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n$$

nach der Formel

$$\text{(62)}\qquad \omega_\varrho(\tau(Z)) = |\tilde{C}\,Z + \tilde{D}|^k\,\omega_{\varrho\tau}(Z) \text{ mit } \tau = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D}\end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_n$$

umsetzen. Speziell für $\tau = \tau_t$ erhält man

$$\text{(63)}\qquad e^{2\pi i L_\varrho(z+t)}\,(c\,(z+t)+d)^{-k} = e^{2\pi i L_{\varrho\tau_t}(z)}\,(c_t\,z + d_t)^{-k},$$

wenn $L_{\varrho\tau_t} = \begin{pmatrix} a_t b_t \\ c_t d_t\end{pmatrix}$ angenommen wird. (59) geht damit in

$$\text{(64)}\qquad \varphi(z) = \sum_{\varrho\subset\mathsf{S}^*}\ \sum_{t \bmod n_\varrho} e^{2\pi i L_{\varrho\tau_t}(z)}\,(c_t\,z + d_t)^{-k} = \sum_{\varrho\subset\mathsf{S}^*}\varphi_\varrho(z)$$

über, wenn

$$\text{(65)}\qquad \varphi_\varrho(z) = \sum_{t \bmod n_\varrho} e^{2\pi i L_\varrho(z+t)}\,(c\,(z+t)+d)^{-k} \text{ mit } L_\varrho = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d\end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Da bei jeder Wahl von $z \subset \mathfrak{H}_1$ stets $c\,z + d \neq 0$ ist, so ist entweder $c = 0$ oder $\mathfrak{Im}\,\dfrac{d}{c} \geqq 0$. Wir zeigen, daß $c = 0$ mit $n_\varrho > 0$ gleichwertig ist. Beachtet man, daß das allgemeine Glied der Reihe (65) nur von der Restklasse von t modulo n_ϱ abhängt, so folgt insbesondere

$$e^{2\pi i L_\varrho(z+n_\varrho) - 2\pi i L_\varrho(z)} = \left(\frac{c\,z + c\,n_\varrho + d}{c\,z + d}\right)^k.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist keine meromorphe Funktion von z, wenn zugleich $c \neq 0$ und $n_\varrho > 0$ ist. $n_\varrho > 0$ zieht also $c = 0$ nach sich. Ist $c = 0$, dann ist $\dfrac{a}{d}$ eine reelle nicht-negative Zahl; denn es ist stets $\mathfrak{Im}\,\dfrac{a\,z+b}{d} \geqq 0$ für $z \subset \mathfrak{H}_1$. Infolgedessen haben alle Glieder der Reihe (65) denselben von Null verschiedenen Betrag. Wegen der Konvergenz der Reihe dürfen dann nur endlich viele Glieder auftreten; d. h. es ist $n_\varrho > 0$.

Nunmehr ist gleichmäßig für alle x in einem Streifen $\operatorname{abs} x \leqq m$

$$\text{(66)}\qquad \lim_{y\to\infty}\varphi_\varrho(z) = \sum_{t \bmod n_\varrho}\ \lim_{y\to\infty} e^{2\pi i L_\varrho(z+t)}\,(c\,(z+t)+d)^{-k} \qquad (z = x + i\,y)$$

beweisbar. Es genügt natürlich, den Fall $n_\varrho = 0$, d. h. $c \neq 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\operatorname{abs}\left\{e^{2\pi i L_\varrho(z+t)}\,(c\,(z+t)+d)^{-k}\right\} \leqq \varepsilon^{-k}\operatorname{abs}(c\,(i+t)+d)^{-k}$$

für alle z in einem gegebenen Streifen $\operatorname{abs} x \leqq m$, $y \geqq \delta > 0$ und eine geeignete nur von m, δ abhängige Konstante $\varepsilon > 0$. Dies folgt aus $\mathfrak{Im}\,L_\varrho(z+t) \geqq 0$ und der mit

$$\operatorname{abs}(c\,(z+t)+d) \geqq \varepsilon\operatorname{abs}(c\,(i+t)+d)$$

gleichwertigen Ungleichung

$$\operatorname{abs}\left\{\frac{x+(y+q)\,i}{1+q}+\frac{p+t}{1+q}\right\}\geq\varepsilon\operatorname{abs}\left\{i+\frac{p+t}{1+q}\right\}\left(\frac{d}{c}=p+q\,i,\,q\geq 0,\right)$$

die auf Grund des PETERSSONschen Hilfssatzes[9]) bestätigt werden kann, falls $\varepsilon=\varepsilon\,(m,\,\delta)>0$ geeignet gewählt wird. $\varphi_\varrho\,(z)$ hat also eine von z unabhängige konvergente Majorante, wenn z in dem gegebenen Streifen variiert. Mithin gilt (66), sofern

$$\lim_{y\to\infty} e^{2\pi i\,l_\varrho\,(z+t)}\,(c\,(z+t)+d)^{-k}$$

existiert, was wir vorerst voraussetzen wollen. Später werden wir diesen Grenzwert berechnen.

Es bleibt noch

$$\lim_{y\to\infty}\varphi\,(z)=\sum_{\varrho\subset S^*}{}'\lim_{y\to\infty}\varphi_\varrho\,(z) \tag{67}$$

zu zeigen. $\varphi\,(z)$ und $\varphi_\varrho\,(z)$ stellen eindeutige Funktionen von $\zeta=e^{2\pi i z}$ dar:

$$\chi\,(\zeta)=\varphi\,(z),\ \chi_\varrho\,(\zeta)=\varphi_\varrho\,(z).$$

Sie sind in $0<\operatorname{abs}\zeta<1$ regulär und haben in $\zeta=0$ „hebbare Singularitäten". Dies folgt für $\chi\,(\zeta)$ aus der Beschränktheit der POINCARÉschen Reihe $g_{-k}\,(Z,\,T)$ in $\mathfrak{F}_n$ und für $\chi_\varrho\,(\zeta)$ aus (66). Da die POINCARÉsche Reihe $g_{-k}\,(Z,\,T)$, wie in § 2 gezeigt wurde, in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich von $\mathfrak{H}_n$ absolut und gleichmäßig konvergiert, so konvergiert

$$\chi\,(\zeta)=\sum_{\varrho\subset S^*}{}'\chi_\varrho\,(\zeta)$$

insbesondere in jedem Kreisring $0<\varepsilon\leq\operatorname{abs}\zeta\leq 1-\varepsilon$ gleichmäßig. Auf Grund der CAUCHYschen Integralformel ist dann leicht

$$\chi\,(0)=\sum_{\varrho\subset S^*}{}'\chi_\varrho\,(0)$$

zu verifizieren. Damit ist (67) bewiesen.

In unserer ursprünglichen Bezeichnung kann auf Grund von (66) und (67) folgender Tatbestand formuliert werden: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{y\to\infty} e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}\,(T\sigma\,(Z))}\,|\,C\,Z+D\,|^{-k}, \tag{68}$$

wobei Z durch (55) gegeben und $z=x+i\,y$ gesetzt ist, und konvergiert die Reihe

$$\sum_{\sigma\subset S\,(T)}{}'\lim_{y\to\infty} e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}\,(T\sigma\,(Z))}\,|\,C\,Z+D\,|^{-k} \tag{69}$$

absolut, so stellt sie

$$\lim_{y\to\infty} g_{-k}\,(Z,\,T)=\Phi\,(g_{-k}\,(Z,\,T)) \tag{70}$$

dar.

Wir berechnen (68). Dabei soll die Darstellung (30) zugrunde gelegt werden, wobei künftig $P=P^{(n,r)}$ an Stelle von Q' geschrieben werden soll. Ein volles Repräsentantensystem S_0 der Linksrestklassen von A_0 in M_n kann nach SIEGEL[5]) in folgender Weise gewonnen werden:

$\{C_0,\,D_0\}$ durchlaufe ein volles System links nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare mit $C_0=C_0^{(s)}$, $|\,C_0\,|\neq 0$.

$\{Q\}$ durchlaufe ein volles System rechts nicht assoziierter primitiver Matrizen $Q=Q^{(n,\,s)}$.

Man ergänze C_0, D_0 zu einer Modulsubstitution $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_s$, Q zu einer unimodularen Matrix $U = (Q, R)$ und setze

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U', \qquad B = \begin{pmatrix} B_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{-1},$$
$$C = \begin{pmatrix} C_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U', \qquad D = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{-1}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $E = E^{(n-s)}$. Schließlich hat s alle ganzen Zahlen des Intervalls $1 \leq s \leq n$ zu durchlaufen. Dem so bestimmten System von Modulsubstitutionen ist noch die Einheitssubstitution hinzuzufügen. Für diese ist der Rang s von C gleich 0. Man erhält dann

$$(71) \qquad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{P \text{ primitiv}}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{s=1}^{n} \sum_{P \text{ primitiv}} \sum_{\substack{(C_0, D_0) \\ (Q)}}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} \left| C_0 Z[Q] + D_0 \right|^{-k},$$

wobei T von der speziellen Gestalt (27) angenommen ist.

Im folgenden verstehen wir unter Z die Matrix (55). Wir setzen noch $Z^* = X^* + i Y^*$ und bezeichnen mit $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$ die Spaltenvektoren der Matrix $Q = (q_{\mu\nu})$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, s$). Ferner seien $\mathfrak{q}_1^*, \mathfrak{q}_2^*, \ldots, \mathfrak{q}_s^*$ die Spaltenvektoren der Matrix Q^*, die aus Q durch Streichen der letzten Zeile entsteht. Nach[5]) (Formel (32)) ist

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geq |Y[Q]| \text{ für } s > 0.$$

Da wir annehmen dürfen, daß $Y[Q]$ im MINKOWSKIschen Sinne reduziert ist, so kann mit einer geeigneten positiven Konstanten c_1

$$|Y[Q]| \geq c_1 \prod_{\nu=1}^{s} Y[\mathfrak{q}_\nu] = c_1 \prod_{\nu=1}^{s} (Y^*[\mathfrak{q}_\nu^*] + y\, q_{n\nu}^2)$$

geschlossen werden. Unter der Voraussetzung $(q_{n1}, q_{n2}, \ldots, q_{ns}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ folgt ersichtlich $\lim\limits_{y \to \infty} |Y[Q]| = \infty$, also

$$\lim_{y \to \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} |CZ + D|^{-k} = 0.$$

Es genügt also, wenn wir im folgenden $s = 0$ oder $s > 0$ und dann $(q_{n1}, q_{n2}, \ldots, q_{ns}) = (0, 0, \ldots, 0)$ annehmen. Hieraus folgt insbesondere $s < n$; denn Q ist primitiv. Ferner ist auch Q^* primitiv. Wir erledigen zunächst den Fall $s = 0$.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ bzw. $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \ldots, \mathfrak{p}_r^*$ die Spaltenvektoren von $P = (p_{\mu\nu})$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, r$) bzw. derjenigen Matrix P^*, die aus P durch Streichen der letzten Zeile entsteht. Mit einer nur von T_1 abhängigen positiven Konstanten c_2 ist dann

$$\operatorname{Sp}(T_1 Y[P]) \geq c_2 \operatorname{Sp}(Y[P]) = c_2 \sum_{\nu=1}^{r} Y[\mathfrak{p}_\nu]$$
$$= c_2 \sum_{\nu=1}^{r} (Y^*[\mathfrak{p}_\nu^*] + y\, p_{n\nu}^2),$$

also

(72) $$\lim_{y\to\infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} = 0,$$

wenn $(p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nr}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ist. Im Falle $(p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nr}) = (0, 0, \cdots, 0)$ hingegen ist $r < n$, da P primitiv ist, und

(73) $$e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z^*[P^*])},$$

was von z gar nicht mehr abhängt. P^* ist hier selber primitiv.

Wir haben jetzt noch den Fall $1 \leq s < n$ mit $(q_{n1}, q_{n2}, \cdots, q_{ns}) = (0, 0, \cdots, 0)$ zu behandeln. Q^* werde durch R^* zu einer unimodularen Matrix (Q^*, R^*) ergänzt. Wir dürfen dann

$$R = \begin{pmatrix} R^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & 1 \end{pmatrix}$$

setzen. Dabei ist $\mathfrak{n}$ eine Spalte von $n-1$ Nullen und $\mathfrak{n}'$ eine Zeile von $n-s-1$ Nullen. Eine elementare Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
\sigma(Z) &= (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} A_0 Z[Q] + B_0, & A_0 Q' Z R \\ R' Z Q & , & Z[R] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 Z[Q] + D_0, & C_0 Q' Z R \\ O & , & E \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} A_0 Z^*[Q^*] + B_0, & A_0 Q^{*\prime} Z^* R^*, & \mathfrak{n} \\ R^{*\prime} Z^* Q^*, & Z^*[R^*], & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & , \quad \mathfrak{n}', & z \end{pmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} C_0 Z^*[Q^*] + D_0, & C_0 Q^{*\prime} Z^* R^*, & \mathfrak{n} \\ O, & E, & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}', & \mathfrak{n}', & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^*(Z^*), & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}', & z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dabei stellt σ^* eine Modulsubstitution $(n-1)$-ten Grades dar, die mit $\{C_0, D_0\}$, $\{Q^*\}$ ersichtlich in demselben Zusammenhang steht, wie σ mit $\{C_0, D_0\}, \{Q\}$. Sei

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}, \quad U^* = (Q^*, R^*).$$

Dann ist also

$$A^* = \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{*\prime}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{*-1},$$
$$C^* = \begin{pmatrix} C_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{*\prime}, \quad D^* = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{*-1}$$

mit $E = E^{(n-s-1)}$ Ferner gilt

$$|CZ+D| = |C_0 Z[Q] + D_0| = |C_0 Z^*[Q^*] + D_0| = |C^* Z^* + D^*|.$$

Eine einfache Betrachtung, ähnlich wie sie oben schon durchgeführt ist, ergibt nun

(74) $$\lim_{y\to\infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} \, |CZ+D|^{-k} = 0,$$

wenn $(p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nr}) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ ist. Im Falle $(p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nr}) = (0, 0, \cdots, 0)$ ist jedoch

(75) $$e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} \, |CZ+D|^{-k} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma^*(Z^*)[P^*])} \, |C^* Z^* + D^*|^{-k},$$

was von z nicht mehr abhängt.

Wir stellen nunmehr fest: Damit ein Glied der Poincaréschen Reihe (71) bei dem Grenzübergang $y \to \infty$ einen von Null verschiedenen Limes ergibt, ist

$$r < n,\ s < n,\ Q = \begin{pmatrix} Q^* \\ \mathfrak{n}' \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} P^* \\ \mathfrak{n}' \end{pmatrix}\ (\mathfrak{n}' = \text{Nullzeile}) \tag{76}$$

notwendig. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hängt das betreffende Reihenglied von z nicht mehr ab. Auf Grund der Bemerkungen, die in bezug auf (68), (69), (70) gemacht wurden, ergibt sich folgendes Resultat:

$$\lim_{y \to \infty} g_{-k}(Z, T) = 0 \text{ für } r = n, \tag{77}$$

$$\lim_{y \to \infty} g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{P^* \text{ primitiv}}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z^*[P^*])} \tag{78}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{s=1}^{n-1}{}' \sum_{P^* \text{ primitiv}} \sum_{\substack{\{C_s, D_s\} \\ \{Q^*\}}}' e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma^*(Z^*)[P^*])} |C^* Z^* + D^*|^{-k}$$

$$\text{für } r < n.$$

Wir formulieren das Ergebnis in

Satz 2: *Es sei* $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $T_1 = T_1^{(r)} > 0$ *und halbganz. Ferner sei* $k > n + r + 1$, $k \equiv 0\ (2)$. *Dann ist*

$$\Phi(g_{-k}(Z, T)) = \begin{cases} 0 & \text{für } r = n, \\ g_{-k}(Z^*, T^*) & \text{für } r < n, \end{cases} \tag{79}$$

wenn Z^* und T^* aus Z bzw. T durch Streichen der letzten Zeile und Spalte hervorgehen.

Es sei $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ die lineare Schar der Spitzenformen n-ten Grades von der Dimension $-k$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ die Normalschar bezüglich $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ in der Schar aller Modulformen. $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ besteht aus den Modulformen $g_{-k}(Z)$, die auf allen Spitzenformen $h_{-k}(Z) \subset \mathfrak{S}_k^{(n)}$ senkrecht stehen:

$$(g_{-k}(Z), h_{-k}(Z)) = 0.$$

Wir beweisen nun den Darstellungssatz in der folgenden scharfen Fassung:

Satz 3: *Es sei $k > 2n + 1$, $k \equiv 0\ (2)$. Dann ist die von den Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ erzeugte lineare Schar mit $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ identisch, während $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ alle Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T < n$ umfaßt und von diesen erzeugt wird. Jede Modulform* n-ten *Grades von der Dimension $-k$ gestattet eine eindeutige Darstellung der Art $g_{-k}(Z) + h_{-k}(Z)$ mit $g_{-k}(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$ und $h_{-k}(Z) \subset \mathfrak{S}_k^{(n)}$.*

Beweis: Für Modulformen ersten Grades ist der Satz bekannt[1]). Wir beweisen ihn für Modulformen n-ten Grades unter der Voraussetzung, daß er für solche $(n-1)$-ten Grades gilt. Auf die Nennung der Dimension können wir verzichten, da sie in jedem Falle $-k$ ist.

Nach Satz 2 lassen sich die Matrizen $T_1, T_2, \cdots, T_\mu$ vom Rang $< n$ so bestimmen, daß die Formen $(n-1)$-ten Grades

$$\Phi(g_{-k}(Z, T_1)),\ \Phi(g_{-k}(Z, T_2)),\ \cdots,\ \Phi(g_{-k}(Z, T_\mu))$$

die lineare Schar aller Modulformen $(n-1)$-ten Grades erzeugen. Sei $f_{-k}(Z)$ eine gegebene Modulform n-ten Grades. Dann ist

$$(80) \qquad \Phi\,(f_{-k}(Z)) = \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu\, \Phi\,(g_{-k}(Z, T_\nu))$$

mit gewissen konstanten Koeffizienten c_ν. Offenbar stellt

$$(81) \qquad h_{-k}(Z) = f_{-k}(Z) - \sum_{\nu=1}^{\mu} c_\nu\, g_{-k}(Z, T_\nu)$$

eine Spitzenform dar.

Die von den Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ erzeugte lineare Schar $\mathfrak{T}_k^{(n)}$ ist nach Satz 2 in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ enthalten. Nach allgemeinen Sätzen über metrische Vektorräume kann $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ als direkte Summe von $\mathfrak{T}_k^{(n)}$ und der in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ gelegenen Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ bezüglich $\mathfrak{T}_k^{(n)}$ dargestellt werden:

$$\mathfrak{S}_k^{(n)} = \mathfrak{T}_k^{(n)} + \mathfrak{N}_k^{(n)}.$$

Eine Spitzenform n-ten Grades, die auf allen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ senkrecht steht, muß nach (7) identisch verschwinden. Mithin ist $\mathfrak{S}_k^{(n)} = \mathfrak{T}_k^{(n)}$, insbesondere $h_{-k}(Z) \subset \mathfrak{T}_k^{(n)}$. Aus (7) ist auch sofort zu ersehen, daß alle $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T < n$ in der Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ liegen. Ist $f_{-k}(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)}$, so steht — in obiger Bezeichnung — $h_{-k}(Z)$ auf sich selber senkrecht, verschwindet also identisch. Die Reihen $g_{-k}(Z, T_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \mu)$ erzeugen also $\mathfrak{N}_k^{(n)}$.

Beachtet man, daß die lineare Schar aller Modulformen n-ten Grades als direkte Summe von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ dargestellt werden kann, so folgt auch noch die letzte Behauptung von Satz 3.

Satz 4: *Der Operator Φ bildet $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ isomorph auf $\mathfrak{N}_k^{(n-1)} + \mathfrak{S}_k^{(n-1)}$ ab, wenn $k > 2n + 1$, $k \equiv 0\ (2)$ angenommen wird.*

Beweis: Daß Φ die Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ homomorph auf $\mathfrak{N}_k^{(n-1)} + \mathfrak{S}_k^{(n-1)}$ abbildet, ergab sich beim Beweis von Satz 3. Sei

$$g_{-k}(Z) \subset \mathfrak{N}_k^{(n)},\ \Phi\,((g_{-k}(Z)) = 0.$$

Dann ist $g_{-k}(Z) \subset \mathfrak{S}_k^{(n)}$; d. h. $g_{-k}(Z)$ steht auf sich selber senkrecht, woraus $g_{-k}(Z) = 0$ erhellt, q. e. d.

Satz 5: *Es sei $k > 2n + 1$, $k \equiv 0\ (2)$. Die* POINCARÉsche *Reihe $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ steht senkrecht auf allen Spitzenformen, deren* FOURIER-*koeffizient zur Exponentenmatrix T verschwindet. Durch diese Eigenschaft ist $g_{-k}(Z, T)$ in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*
Der Beweis folgt sofort aus der Grundformel (7).

Satz 6: *Es sei $\varrho\,(n, k)$ der Rang der linearen Schar aller Modulformen n-ten Grades von der Dimension $-k$. Dann ist für $k > 2n + 1$, $k \equiv 0\ (2)$:*

$$(82) \qquad \varrho\,(n, k) \geqq \varrho\,(n-1, k) \geqq \cdots \geqq \varrho\,(1, k) = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{12}\right] & \textit{für } k \equiv 2\ (12), \\[2ex] \left[\dfrac{k}{12}\right] + 1 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Dies folgt aus Satz 4. Die Angaben über $\varrho\,(1, k)$ sind bekannt.

Die Voraussetzung $k > 2n + 1$ in den Sätzen 3 bis 6 gewährleistet die absolute Konvergenz der POINCARÉschen Reihen. Eine Einbeziehung des

Falles $k < 2n+1$ könnte in der Weise geschehen, daß die Poincaréschen Reihen einem besonderen Summationsverfahren (etwa dem Heckeschen[13]) unterworfen werden. Bei der technischen Durchführung dürften indessen erhebliche Schwierigkeiten auftreten.

Um wenigstens im Falle $n = 2$ zeigen zu können, daß aus den absolut konvergenten Poincaréschen Reihen alle Modulformen gewonnen werden können, bedürfen wir des folgenden allgemeinen Satzes von Siegel[14].

Satz 7: *Es sei s_n die kleinste obere Schranke von* $\mathrm{Sp}\,(Y^{-1})$ *im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_n$; es sei*

$$f_{-k}(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T)\, e^{2\pi i\, \mathrm{Sp}(TZ)} \tag{83}$$

eine Modulform n-ten Grades von der Dimension $-k$ und

$$a(T) = 0 \qquad \text{für } \mathrm{Sp}\,(T) \leq \frac{k}{4\pi} s_n. \tag{84}$$

Dann ist $f_{-k}(Z) = 0$.

Beweis: Sei $Z = X + iY \subset \mathfrak{F}_n$ und Y_ν die Matrix, die aus Y durch Streichen der ν-ten Zeile und Spalte entsteht. Auf Grund bekannter Ungleichungen[5]) ergibt sich dann

$$\mathrm{Sp}\,(Y^{-1}) = {\sum_{\nu=1}^{n}}' \frac{|Y_\nu|}{|Y|} \leq c_n {\sum_{\nu=1}^{n}}' \frac{1}{y_{\nu\nu}} \leq \frac{2 c_n n}{\sqrt{3}} \tag{85}$$

mit einer von Minkowski abgeschätzten nur von n abhängigen positiven Konstanten c_n, woraus $s_n \leq \frac{2 c_n n}{\sqrt{3}}$ erhellt. Insbesondere ist damit die Endlichkeit von s_n gezeigt.

Aus $Z^* = X^* + iY^* \subset \mathfrak{F}_{n-1}$ folgt, was leicht bestätigt werden kann, $Z = \begin{pmatrix} Z^* & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' & i\lambda \end{pmatrix} \subset \mathfrak{F}_n$ für alle hinreichend großen reellen λ. Die Spurrelation $\mathrm{Sp}\,(Y^{-1}) = \mathrm{Sp}\,(Y^{*-1}) + 1/\lambda$ zieht daher

$$s_{n-1} \leqq s_n \tag{86}$$

nach sich.

Es sei nun entweder $n = 1$ oder $n > 1$ und Satz 7 für $n - 1$ an Stelle von n richtig. Im letzteren Falle verschwinden dann alle $a(T)$ mit $|T| = 0$, wie man durch Bildung von $\Phi(f_{-k}(Z))$ unter Berücksichtigung von (86) erkennt. In beiden Fällen ist die Funktion

$$\alpha(Z) = \mathrm{abs}\, f_{-k}(Z)\, |Y|^{\frac{k}{2}} \qquad \text{für } Z \subset \mathfrak{H}_n$$

beschränkt und nimmt ihr Maximum $\mu \geqq 0$ in einem Punkt Z_0 von $\mathfrak{F}_n$ an. Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Variable, $Z = Z_0 + zE$, $\zeta = e^{2\pi i z}$ und

$$g(\zeta) = f_{-k}(Z)\, e^{-i\lambda\, \mathrm{Sp}(Z)},$$

wobei λ durch $\frac{n\lambda}{2\pi} = 1 + \left[\frac{k}{4\pi} s_n\right]$ bestimmt werden möge. Dann ist $g(\zeta)$ regulär

[13]) Hecke, E.: Theorie der Eisensteinreihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 5, 199 (1927).

[14]) Formulierung und Beweis dieses Satzes in der hier wiedergegebenen Form verdanke ich Herrn Siegel (briefliche Mitteilung vom 28. 11. 49). Die Publikation erfolgt hier mit seinem Einverständnis.

in einem Kreise abs $\zeta \leqq \varrho$ vom Radius $\varrho > 1$. Auf dem Kreise $e^{-2\pi y} = \text{abs}\,\zeta = \varrho$ liegt ein Punkt mit

$$\text{abs}\, g\,(\zeta) \geqq \text{abs}\, g\,(1).$$

Wegen

$$\text{abs}\, g\,(\zeta) = \alpha\,(Z)\,|\,Y\,|^{-\frac{k}{2}}\, e^{\lambda\,\text{Sp}\,(Y)}$$

folgt

$$\alpha\,(Z)\,|\,Y\,|^{-\frac{k}{2}}\, e^{\lambda\,\text{Sp}\,(Y)} \geqq \alpha\,(Z_0)\,|\,Y_0\,|^{-\frac{k}{2}}\, e^{\lambda\,\text{Sp}\,(Y_0)}.$$

Setzt man noch

$$n\,\lambda\, y - \frac{k}{2}\log|E + y\, Y_0^{-1}| = \varphi\,(y),$$

so ist also

$$\mu\, e^{\varphi\,(y)} \geqq \mu \quad \text{mit} \quad y = -\frac{1}{2\pi}\log\varrho.$$

Nun gilt aber $\varphi\,(0) = 0$ und

$$\varphi'\,(0) = n\,\lambda - \frac{k}{2}\,\text{Sp}\,(Y_0^{-1}) \geqq n\,\lambda - \frac{k}{2}\, s_n > 0,$$

also ist $\varphi\,(y) < 0$, wenn ϱ hinreichend nahe bei 1 gewählt wird. Daher ist $\mu = 0$, also $f_{-k}\,(Z) = 0$, q. e. d.

Als Beispiel wähle man $n = 2$. Die Ungleichung (85) ist dann mit $c_2 = {}^4/_3$ beweisbar, woraus

$$\frac{s_2}{4\pi} \leqq \frac{4}{3\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{4}$$

folgt. Ferner ist

$$\frac{s_1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{10}.$$

Ist nun $k \leqq 8$ und $a\,(O) = 0$, so folgt $\Phi\,(f_{-k}\,(Z)) = 0$, also $a\,(T) = 0$ für $\text{Sp}\,(T) < 2$, mithin $f_{-k}\,(Z) = 0$. Für $n = 2$ und jedes $k \leqq 8$ ist also die Basis der Modulformen von der Dimension $-k$ höchstens eingliedrig. Da jede Modulform ersten Grades von der Dimension -2 identisch verschwindet, so ist stets $\Phi\,(f_{-2}\,(Z)) = 0$, also $a\,(O) = 0$ und daher $f_{-2}\,(Z) = 0$. Für $k = 4, 6, 8$ werden die Modulformen $f_{-k}\,(Z)$ von den EISENSTEIN-Reihen $g_{-k}\,(Z, O)$ erzeugt. Für $k \geqq 10$, $k \equiv 0\ (2)$ werden die Formen $f_{-k}\,(Z)$ jedenfalls durch die POINCARÉschen Reihen $g_{-k}\,(Z, T)$ dargestellt.

(Eingegangen am 22. August 1950.)