Maass, Hans, 1950

Math. Annalen, Bd. 122, S. 90—108 (1950).

15

Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen.

Von

HANS MAASS in Heidelberg.

Der vorliegende Aufsatz enthält erste Ansätze, um die von C. L. SIEGEL[1]) eingeführten Modulformen höheren Grades in die HECKEsche Theorie[2]) der DIRICHLETschen Reihen, die gewissen Funktionalgleichungen genügen, einzubeziehen. Da es mir zweckmäßig erscheint, zunächst einmal den einfachsten nicht-trivialen Fall gesondert darzustellen, beschränke ich mich hier auf die Betrachtung der Modulformen zweiten Grades. Es zeigt sich, daß jeder solchen Modulform mit Hilfe der MELLINschen Integraltransformation ein System von Dirichletreihen zugeordnet werden kann. Diese lassen sich in die ganze komplexe Ebene analytisch fortsetzen und genügen erwartungsgemäß gewissen Funktionalgleichungen. Die Art des Vorgehens wird durch zahlreiche Analogien zwischen den HILBERTschen und SIEGELschen Modulformen nahegelegt; d. h. man braucht nur die Methode, mit der E. HECKE[3]) aus den Thetareihen der reellen quadratischen Zahlkörper die zugehörigen Zetafunktionen mit Größencharakteren abgeleitet hat, auf die Modulformen zweiten Grades sinngemäß zu übertragen. An Stelle der Größencharaktere treten jetzt Funktionen, die sich aus gewissen automorphen Wellenfunktionen der hyperbolischen Ebene in ähnlicher Weise ableiten lassen wie die Größencharaktere aus der Exponentialfunktion. Die Frage, ob die einer Modulform zweiten Grades zugeordneten Reihen diese eindeutig bestimmen, bleibt offen. Hierzu bedarf es noch einiger Hilfsmittel aus der Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen, die offenbar nicht ganz billig zu haben sind.

Wir bringen die wichtigsten Schritte, die zur Aufstellung der Zetafunktionen mit Größencharakteren führen, in Erinnerung, um die Analogie mit den folgenden Entwicklungen sinnfällig vor Augen zu haben.

Es sei K ein reeller quadratischer Zahlkörper mit der Grundeinheit $\varepsilon > 1$ und $\mu \to \mu'$ der von der Identität verschiedene Automorphismus des Körpers K. Bekanntlich stellt die Thetareihe

$$\vartheta(\tau, \tau') = \sum_{\mu} e^{i c (\mu^2 \tau + \mu'^2 \tau')}, \tag{1}$$

in der c eine gewisse von K abhängige Konstante bezeichnet und μ gewisse ganze Zahlen in K durchläuft, eine Modulform zu einer Untergruppe der HILBERTschen Modulgruppe des Körpers K dar. An Stelle von $y = \mathfrak{Im}\, \tau$, $y' = \mathfrak{Im}\, \tau'$ führt HECKE die Variablen u, v durch die Gleichungen

$$y = u\, e^{2 v \log \varepsilon}, \quad y' = u\, e^{-2 v \log \varepsilon} \tag{2}$$

ein, um eine Invarianz gegenüber der Transformation $(y, y') \to (y \varepsilon^2, y' \varepsilon'^2)$ mit dem Prinzip der Fourierentwicklung in Verbindung bringen zu können.

---

[1]) SIEGEL, C. L.: Math. Ann. **116**, 617 (1939).

[2]) HECKE, E.: Math. Ann. **112**, 664 (1936).

[3]) HECKE, E.: 1. Mitt. Math. Z. **1**, 357 (1918); 2. Mitt. Math. Z. **6**, 11 (1920).

Alsdann liefert die Mellintransformation die in v periodische Funktion

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \xi(s, v) &= \int_0^\infty [\vartheta(i y, i y') - a_0]\, u^{s-1}\, du \\
&= e^{-s}\, \Gamma(s) \sum_{\mu} (\mu^2 e^{2 v \log \varepsilon} + \mu'^2 e^{-2 v \log \varepsilon})^{-s}.
\end{aligned}
$$

Hierin ist a_0 das konstante Glied der Thetareihe. $\xi(s, v)$ hat die Periode 1:

$$\xi(s, v+1) = \xi(s, v)$$

und stellt eine EPSTEINsche Zetafunktion dar, wenn man vom Faktor $e^{-s}\, \Gamma(s)$ absieht. Die Fourierkoeffizienten $\xi_n(s)$ der Funktion $\xi(s, v)$ bestimmen diese, also auch $\vartheta(\tau, \tau')$ umkehrbar eindeutig; denn es ist

$$\vartheta(i y, i y') - a_0 = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \xi(s, v)\, u^{-s}\, ds .$$

Man erhält explizit

$$(4) \qquad \xi_n(s) = \int_0^1 \xi(s, v)\, e^{-2 \pi i n v}\, dv = A^s\, \Gamma(s, n) \sum_{(\mu)} \frac{\lambda^n(\mu)}{|N \mu|^s}$$

mit

$$(5) \qquad \lambda(\mu) = \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|^{\frac{\pi i}{\log \varepsilon}}$$

und einem gewissen elementaren Faktor $A^s\, \Gamma(s, n)$. Die Summation ist über gewisse Hauptideale (μ) zu erstrecken. Die Reihe

$$(6) \qquad \sum_{(\mu)} \frac{\lambda^n(\mu)}{|N \mu|^s}$$

stellt eine Zetafunktion von K einfachster Art zum Größencharakter λ^n dar.

Bei der Durchführung der entsprechenden Theorie für die Modulformen zweiten Grades ist ein Umstand von entscheidender Bedeutung, der in der HECKEschen Theorie[3]) kein Analogon besitzt: Um zu einer gegebenen Modulform zweiten Grades Dirichletreihen mit Hilfe der Mellintransformation konstruieren zu können, genügt es nicht, wenn man aus der Fourierentwicklung der Modulform das konstante Glied (entsprechend a_0 in (3)) herausnimmt, sondern es sind auch alle diejenigen Glieder auszusondern, die zu Exponentenmatrizen vom Rang 1 gehören. Die ausgeschlossenen Koeffizienten haben auf die Bildung der Dirichletreihen einen erkennbaren Einfluß insofern, als sie die Residuen in den endlich vielen möglichen Polen erster Ordnung eindeutig bestimmen. Um die Art dieser Abhängigkeit festzustellen, ist von den Ergebnissen der HECKEschen Theorie[2]) weitgehend Gebrauch zu machen. Das ist nicht sonderlich überraschend, wenn man bedenkt, daß jeder Modulform zweiten Grades eine solche ersten Grades durch einen einfachen Grenzprozeß eindeutig zugeordnet werden kann, und wenn man ferner beachtet, daß die Fourierkoeffizienten dieser Modulform ersten Grades mit den Entwicklungskoeffizienten der Form zweiten Grades übereinstimmen, die bei der Aufstellung der Dirichletreihen auszulassen sind. Allgemein kann jetzt schon gesagt werden, daß die Theorie für die Modulformen $(n-1)$-ten Grades vollständig durchgebildet sein muß, wenn man zu Modulformen n-ten Grades übergehen will. D. h. man wird das Prinzip der vollständigen Induktion nach n in wesentlichen Punkten anwenden müssen.

Im Raum der positiven symmetrischen Matrizen zweiten Grades erweist sich die Parameterdarstellung[4])

$$Y = \begin{pmatrix} u\,(x^2+y^2)\,y^{-1} & u\,x\,y^{-1} \\ u\,x\,y^{-1} & u\,y^{-1} \end{pmatrix} \qquad (u > 0,\ \ y > 0) \tag{7}$$

als geeignet, um zu einfachen analytischen Ausdrücken zu gelangen, mit denen die im Verlauf der Untersuchung notwendigen Operationen durchgeführt werden können. Die metrische Fundamentalform

$$ds^2 = \tfrac{1}{2}\,Sp\,(Y^{-1}\,d\,Y)^2 \tag{8}$$

die gegenüber den Transformationen

$$Y \to U\,Y\,U' \qquad (U \text{ reell},\ |U| \neq 0)$$

bekanntlich invariant ist, nimmt hier die Gestalt

$$ds^2 = \frac{d\,u^2}{u^2} + \frac{d\,x^2 + d\,y^2}{y^2} \tag{9}$$

an. Mithin kann die Fläche $|Y| \equiv u^2 = 1$ als ein Modell der hyperbolischen Ebene angesehen werden. U bezeichne eine reelle Matrix zweiten Grades mit der Determinante $+1$; ferner sei $\tau = x + i\,y$. Dann sind $Y \to U\,Y\,U'$ und $\tau \to U\,(\tau)$ verschiedene Darstellungen ein und derselben hyperbolischen Bewegung.

§ 1. Aufstellung der Dirichletreihen.

Wir bezeichnen mit großen lateinischen Buchstaben zweireihige quadratische Matrizen; insbesondere sei E die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix. Genügen die ganzzahligen Matrizen A, B, C, D den Beziehungen

$$A\,B' = B\,A', \quad C\,D' = D\,C', \quad A\,D' - B\,C' = E,$$

dann stellt

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

eine Modulsubstitution zweiten Grades dar. Die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe M_2, die SIEGELsche Modulgruppe zweiten Grades. Der Raum $\mathfrak{H}$ der symmetrischen komplexen Matrizen zweiten Grades mit positivem Imaginärteil:

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = X + i\,Y, \quad X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} > 0 \tag{10}$$

wird durch die Substitutionen $\sigma \subset \mathsf{M}_2$ vermöge

$$\sigma\,(Z) = (A\,Z + B)\,(C\,Z + D)^{-1} \tag{11}$$

in sich übergeführt. Sei allgemein

$$R\,[Q] = Q'\,R\,Q = [Q']\,R \text{ und } \operatorname{abs}(R) = \text{Betrag der Determinante } |R|.$$

Offenbar haben die Matrizen $(T\,[U])\,Y$ und $T\,([U]\,Y)$ dieselbe Spur; denn sie gehen durch zyklische Vertauschung der Faktoren auseinander hervor.

[4]) s. auch C. L. SIEGEL: Amer. J. Math. **65**, 1 (1943), insbesondere Lemma 6.

$Sp(T[U]Y)$ ist also unabhängig davon, ob $[U]$ als Rechtsoperator von T oder Linksoperator von Y aufgefaßt wird.

Ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_2$ von M_2 in $\mathfrak{H}$ wird nach SIEGEL[1]) durch folgende Ungleichungen beschrieben:

1. $\operatorname{abs}(CZ+D) \geqq 1$ für alle zweiten „Matrizenzeilen" C, D von Modulsubstitutionen zweiten Grades.

2. $0 \leqq 2\,y_1 \leqq y_2 \leqq y_0$ (MINKOWSKIsche Reduktionsbedingungen).

3. $-\frac{1}{2} \leqq x_\nu \leqq \frac{1}{2}$ für $\nu = 0, 1, 2$.

Es sei k eine natürliche Zahl und $v(\sigma)$ ein abelscher Charakter von M_2. Unter einer Modulform (zweiten Grades) der Dimension $-k$ zum Multiplikatorsystem $v(\sigma)$ verstehen wir eine Funktion $g(Z)$, die in $\mathfrak{H}$ eine reguläre Funktion von z_0, z_1, z_2 darstellt, in $\mathfrak{F}_2$ beschränkt ist und der Transformationsformel

$$g(\sigma(Z)) = v(\sigma)\,|CZ+D|^k\,g(Z) \qquad \text{für } \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_2 \tag{12}$$

genügt. Wenn $g(Z)$ nicht identisch verschwindet, dann ist notwendig

$$v\begin{pmatrix} -E & O \\ O & -E \end{pmatrix} = 1.$$

Wir beschränken uns auf solche Charaktere und fordern überdies noch

$$v\begin{pmatrix} E & S \\ O & E \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix} = 1$$

für ganzzahlige S, U mit $S = S'$ und $|U| = 1$. Aus den Relationen

$$\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -E & O \\ O & -E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & U \\ O & E \end{pmatrix}\right\}^3 = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad U^2 = E$$

ist

$$v\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}^2 = 1 \quad \text{und} \quad v\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix}$$

für ganzzahlige U mit $U = U' = U^{-1}$ zu entnehmen. Setzen wir speziell $U = E$ und $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich

$$v\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} U_0' & O \\ O & U_0^{-1} \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit } U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Modulsubstitutionen

$$\begin{pmatrix} E & S \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U' & O \\ O & U^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \qquad (S' = S,\ |U| = \pm 1)$$

nach E. WITT[5]) die Gruppe M_2 erzeugen, so ist offenbar $v(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \subset \mathsf{M}_2$. Es erweist sich also als unnötig, Multiplikatorsysteme einzuführen.

Jeder Modulform $g(Z)$ läßt sich eine Modulform ersten Grades $g^*(z_0)$ eindeutig zuordnen. Man erklärt sie als Grenzfunktion:

$$g^*(z_0) = \lim_{\lambda \to \infty} g\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} \tag{13}$$

und beweist mit Hilfe von (12) die Transformationsformel

$$g^*(U(z_0)) = (c\,z_0 + d)^k\,g^*(z_0) \tag{14}$$

---

[5]) WITT, E.: Hamburger Abh. 14, 323 (1941).

für beliebige Modulsubstitutionen ersten Grades $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Für $k \equiv 1$ (2) verschwindet $g^*(z_0)$ notwendig identisch.

Aus der Invarianz von $g(Z)$ gegenüber den Modulsubstitutionen $Z \to Z + S$ und der Beschränktheit in $\mathfrak{F}_2$ folgt die Möglichkeit einer FOURIERschen Reihenentwicklung

$$g(Z) = \sum_T a(T)\, e^{2\pi i Sp(TZ)}, \tag{15}$$

in der über alle halbganzen nicht-negativen symmetrischen T summiert wird. Für ganzzahlige U mit $|U| = 1$ gilt

$$a(T[U]) = a(T). \tag{16}$$

T und T^* sollen eigentlich assoziiert heißen, wenn es eine ganzzahlige Matrix U mit der Determinante 1 gibt, so daß $T^* = T[U]$ wird. $\{T\}$ bezeichne einen Repräsentanten in der Schar der zu T eigentlich assoziierten Matrizen.

Hat T den Rang 1, so gibt es einen Repräsentanten $\{T\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $(t > 0)$. Wir setzen $a_t = a(T)$ für $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $t \geqq 0$. Die Koeffizienten a_t bestimmen $g^*(z_0)$ eindeutig:

$$g^*(z_0) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t\, e^{2\pi i t z_0}. \tag{17}$$

Ist der Rang von T gleich 2, so gibt es nur endlich viele ganzzahlige U mit $|U| = 1$ und $T[U] = T$; ihre Anzahl sei $\varepsilon(T)$. Offenbar ist $\varepsilon(T) = \varepsilon(\{T\})$.

Wir führen nun die Parameterdarstellung

$$Y = u\, Y_1, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2)\, y^{-1} & x\, y^{-1} \\ x\, y^{-1} & y^{-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

ein und setzen $\tau = x + i y$. Der Raum der positiven Y wird durch die Ungleichungen $u > 0$, $y > 0$ beschrieben. Besteht zwischen Y und u, τ die angegebene umkehrbar eindeutige Beziehung, was wir kurz durch $Y \leftrightarrow (u, \tau)$ zum Ausdruck bringen, so folgt auch

$$[U]\, Y \leftrightarrow (u, U(\tau)) \quad \text{und} \quad Y^{-1} \leftrightarrow \left(\frac{1}{u}, -\frac{1}{\tau}\right), \tag{19}$$

was mühelos bestätigt werden kann. Dabei ist U eine beliebige ganzzahlige Matrix mit der Determinante 1. Für die Gruppe der Transformationen

$$Y \to [U]\, Y \qquad (U \text{ ganzzahlig}, |U| = 1)$$

stellt der Bereich

$$\mathfrak{F}: \begin{cases} 0 \leqq |2\, y_1| \leqq y_2 \leqq y_0, \quad 1 \leqq u \quad \text{oder} \\ 0 \leqq |2\, y_1| \leqq y_0 \leqq y_2, \quad 0 < u \leqq 1 \end{cases} \tag{20}$$

einen Fundamentalbereich im Raum der positiven Y dar. Als Fundamentalbereich der Modulgruppe ersten Grades wählen wir in der oberen τ-Halbebene die Modulfigur

$$\mathfrak{F}_1: \ |2\, x| \leqq 1, \quad x^2 + y^2 \geqq 1, \quad y > 0. \tag{21}$$

Man erkennt sofort die Gleichwertigkeit der Aussagen:

(22) $$Y \subset \mathfrak{F} \rightleftarrows \tau \subset \mathfrak{F}_1\,,\ 1 \leqq u \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{\tau} \subset \mathfrak{F}_1\,,\ 0 < u \leqq 1\,.$$

Die Abbildung $Y \to Y^{-1}$ führt $\mathfrak{F}$ in sich über.

Wir setzen in der Fourierreihe (15) $X = O$ und nehmen eine Aufspaltung in Teilreihen vor:

(23) $$f(Y) = g(i\,Y) = a_0 + f_1(Y) + f_2(Y)\,,$$

(24) $$f_\nu(Y) = \sum_{\text{Rang } T = \nu}{}' a(T)\, e^{-2\pi\, Sp(TY)} \qquad (\nu = 1, 2)\,.$$

Hat T den Rang 1, so gibt es eine natürliche Zahl t und eine ganzzahlige Matrix U mit $|U| = 1$, so daß $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} [U]$ wird. Eine einfache Rechung ergibt dann

$$Sp(T\,Y) = t\,u\,\frac{|c\,\tau + d|^2}{y}\,,$$

wenn $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ angenommen wird. Damit erhält man schließlich

(25) $$f_1(Y) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_{(c,d)=1}{}' e^{-2\pi t u \frac{|c\tau + d|^2}{y}}\,,$$

(26) $$f_2(Y) = \sum_{\{T\} > 0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \sum_{|U| = 1} e^{-2\pi\, Sp(T[U]\,Y)}\,.$$

Summiert wird hier über alle Paare von teilerfremden ganzen Zahlen c, d bzw. über alle ganzzahligen U mit $|U| = 1$.

In analoger Weise behandeln wir die Fourierreihe (17):

(27) $$f^*(y_0) = g^*(i\,y_0) = a_0 + f_1^*(y_0)\,,$$

(28) $$f_1^*(y_0) = \sum_{t=1}^{\infty}{}' a_t\, e^{-2\pi t y_0}\,.$$

Auf Grund der angegebenen Reihenentwicklung kann

(29) $$f_1(Y) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1}{}' f_1^*\left(u\,\frac{|c\,\tau + d|^2}{y}\right)$$

festgestellt werden. Ferner ist

(30) $$f_\nu(Y) = f_\nu(u\,Y_1) = f_\nu(u\,Y_1^{-1}) \qquad (\nu = 1, 2)\,.$$

Das folgt sofort aus (24). Ersetzt man nämlich T durch $T\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$, so ändert sich $a(T)$ nicht, während

$$Sp(T\,Y) \quad \text{in} \quad Sp\left(T\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] Y\right) = u\,Sp\left(T\,Y_1^{-1}\right)$$

übergeht. Schließlich vermerken wir noch die sich aus den Transformationsformeln

$$g(-Z^{-1}) = |Z|^k\, g(Z) \quad \text{und} \quad g^*(-z_0^{-1}) = z_0^k\, g^*(z_0)$$

ergebenden Beziehungen

(31) $$f_2(Y^{-1}) = \gamma\,|Y|^k f_2(Y) + \{\gamma\,|Y|^k f_1(Y) - f_1(Y^{-1})\} + \{\gamma\,|Y|^k a_0 - a_0\}\,,$$

$$f_1^*(y_0^{-1}) = \gamma^* y_0^k f_1^*(y_0) + \{\gamma^* y_0^k a_0 - a_0\}. \tag{32}$$

Zur Abkürzung ist hier $\gamma = (-1)^k$ und $\gamma^* = i^k$ gesetzt worden.

Bevor wir den Übergang zu den DIRICHLETschen Reihen vollziehen, wollen wir noch zur Sicherung ihrer Konvergenz die Fourierkoeffizienten $a(T)$ von $g(Z)$ geeignet abschätzen. Im folgenden seien c_1, c_2, c_3, c_4 feste nur von $g(Z)$ abhängige positive Konstanten. Wir erklären die Diskriminante von T durch

$$D(T) = \begin{cases} |T| & \text{für} \quad T > 0, \\ t & \text{für} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}[U] \quad (U \text{ ganzzahlig}, |U| = 1) \end{cases} \tag{33}$$

und beweisen, daß bei geeigneter Wahl von c_1

$$|a(T)| < c_1 (D(T))^k \quad \text{für} \quad T \neq O \tag{34}$$

gilt. Hat T den Rang 1, so ist $a(T)$ Fourierkoeffizient einer Modulform ersten Grades. Koeffizienten dieser Art lassen sich bekanntlich in der gewünschten Weise abschätzen, so daß wir nur noch den Fall $T > 0$ zu betrachten brauchen. Ferner dürfen wir voraussetzen, daß $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$ die MINKOWSKIschen Reduktionsbedingungen

$$0 \leqq |2\, t_1| \leqq t_2 \leqq t_0$$

erfüllt; denn weder $a(T)$ noch $|T|$ ändert sich, wenn man T durch eine zu T eigentlich assoziierte Matrix ersetzt. Es ist dann $t_0 t_2 \leqq \frac{4}{3}|T|$, $1 \leqq t_0$, $1 \leqq t_2$, also

$$t_0 \leqq \tfrac{4}{3}|T|, \quad t_2 \leqq \tfrac{4}{3}|T|. \tag{35}$$

Zunächst schätzen wir $g(Z)$ ab. Dabei verwenden wir eine von H. BRAUN[6]) angegebene Schlußweise. Zu vorgegebenem Z bestimmen wir $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_2$ so, daß $Z_1 = \sigma(Z)$ in den SIEGELschen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_2$ fällt. Es ist dann $|g(Z_1)| \leqq c_2$. Wir wählen $\varrho = \begin{pmatrix} S & -E \\ E & O \end{pmatrix} \subset \mathsf{M}_2$, behalten uns eine nähere Bestimmung von S vor und setzen $Z_0 = \varrho^{-1}(Z) = (-Z + S)^{-1}$. Damit wird $Z_1 = \sigma\varrho(Z_0)$ und $\sigma\varrho = \begin{pmatrix} * & * \\ CS + D & -C \end{pmatrix}$, also nach (12)

$$g(Z_0) = |-Z + S|^k g(Z), \; g(Z_1) = |(CS + D)Z_0 - C|^k g(Z_0).$$

Die Koeffizienten der Matrix $S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ lassen sich im Bereich $|s_\nu - x_\nu| < 2$ $(\nu = 0, 1, 2)$ ganzzahlig so bestimmen, daß $|CS + D| \neq 0$, also dem Betrag nach mindestens gleich 1 wird; denn $|CS + D|$ ist ein nicht identisch verschwindendes Polynom in s_0, s_1, s_2 vom Grad 2. Bezeichnen wir den Imaginärteil von Z_0 mit Y_0, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |g(Z)| &= \operatorname{abs}(-Z + S)^{-k} \operatorname{abs}((CS + D)Z_0 - C)^{-k} |g(Z_1)| \\ &\leqq \operatorname{abs}(-Z + S)^{-k} \operatorname{abs}(Z_0 - (CS + D)^{-1} C)^{-k} c_2 \\ &\leqq \operatorname{abs}(-Z + S)^{-k} |Y_0|^{-k} c_2 = \operatorname{abs}(-Z + S)^{k} |Y|^{-k} c_2. \end{aligned}$$

[6]) BRAUN, H.: Math. Z. **44**, 387 (1939).

Da die Koeffizienten der Matrix $-X+S$ beschränkt sind, kann offenbar

(36) $$|g(Z)| \leqq c_3 |Y|^{-k} (1 + Sp\, Y)^{2k}$$

geschlossen werden. Setzt man hierin $Y = T^{-1}$, so folgt unter Berücksichtigung von (35)

$$|g(X + i\,T^{-1})| \leqq c_4 |T|^k .$$

Aus der FOURIERschen Koeffizientenformel

$$a(T) = \int\int\limits_0^1\int g(Z)\, e^{-2\pi i Sp(TZ)}\, d x_0\, d x_1\, d x_2$$

ergibt sich somit

$$|a(T)| \leqq c_4 |T|^k e^{4\pi} = c_1 |T|^k, \text{ q. e. d.}$$

Wir wenden nun die Mellintransformation auf $f_\nu(Y)$ an, bilden also

(37) $$\xi_\nu(s, \tau; g) = \int\limits_0^\infty f_\nu(u\, Y_1)\, u^{2s-1}\, du \qquad (\nu = 1, 2) .$$

Trägt man die Entwicklung (24) hier ein, so ergibt gliedweise Integration

(38) $$\xi_\nu(s, \tau; g) = (2\pi)^{-2s}\, \Gamma(2s)\, \varphi_\nu(s, \tau; g)$$

mit

(39) $$\varphi_\nu(s, \tau; g) = \sum_{\text{Rang}\, T = \nu}{}' a(T)\,(Sp(T\, Y_1))^{-2s} = \sum_{\text{Rang}\, T = \nu}{}' a(T) \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)\, t_0 + 2\, x\, t_1 + t_2}\right)^{2s} .$$

Dabei ist $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$ angenommen worden. Diese Reihen sind in gewissem Sinne Analoga zu der EPSTEINschen Zetafunktion, die in (3) vorkommt. Das Hauptaugenmerk ist auf φ_2 zu richten. φ_1 kann von unserm Standpunkt aus als elementar angesehen werden. Zufolge

$$Sp(T\, Y_1) = t\, \frac{|c\tau + d|^2}{y} \qquad \text{für} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

wird nämlich

(40) $$\varphi_1(s, \tau; g) = G(\tau, 2s)\, \varphi^*(2s, g^*) ,$$

wenn

(41) $$G(\tau, s) = \frac{1}{2} \sum_{(c, d) = 1}{}' \frac{y^s}{|c\tau + d|^{2s}} \qquad \text{und} \qquad \varphi^*(s, g^*) = \sum_{t=1}^{\infty}{}' \frac{a_t}{t^s}$$

gesetzt wird. φ^* stellt die der Modulform g^* im Sinne der HECKEschen Theorie zugeordnete Dirichletreihe dar.

Ersetzt man in (39) T durch $T[U]$ (U ganzzahlig, $|U| = 1$), so ändert sich φ_ν offenbar nicht; gleichwertig damit ist aber auch die Transformation $Y_1 \to [U]\, Y_1$, woraus

(42) $$\varphi_\nu(s, U(\tau); g) = \varphi_\nu(s, \tau; g)$$

für ganzzahlige U mit $|U| = 1$ erhellt. Wir zeigen noch, daß $\varphi_2(s, \tau; g)$ für hinreichend große Werte von $\Re s$ gleichmäßig in τ konvergiert, wenn τ in $\mathfrak{F}_1$ variiert. Unter der Voraussetzung $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} > 0$, $\tau \subset \mathfrak{F}_1$ gilt die Abschätzung

$$Sp\,(T\,Y_1) = \frac{x^2+y^2}{y}\,t_0 + 2\,\frac{x}{y}\,t_1 + \frac{1}{y}\,t_2 \geqq \frac{x^2+y^2}{y}\,t_0 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\,\sqrt{t_0\,t_2} + \frac{1}{y}\,t_2$$
$$\geqq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{y}\,t_0 + \frac{1}{y}\,t_2\right) \geqq \frac{1}{2}\left(y\,t_0 + \frac{t_2}{y}\right) \geqq \sqrt{t_0\,t_2}\,.$$

Mit Hilfe von (34) ergibt sich somit in der Tat

$$|\varphi_2\,(s,\tau;g)| \leqq c_1 \sum_{\substack{0 < t_0, t_2 \\ |t_1| < \sqrt{t_0 t_2}}}' |T|^k\,(t_0\,t_2)^{-s} \leqq 3\,c_1 \sum_{t_0, t_2 = 1}^{\infty} (t_0\,t_2)^{k+\frac{1}{2}-s}$$
$$= 3\,c_1\,\zeta\,(s-k-\tfrac{1}{2})^2; \quad \text{dabei ist} \quad \zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Die Reihe $\varphi_2\,(s,\tau;g)$ ist bei festem s nicht nur in $\mathfrak{F}_1$, sondern wegen (42) auch in der Halbebene $y > 0$ beschränkt. Ferner gilt $\lim\limits_{y\to\infty} \varphi_2\,(s,\tau;g) = 0$; denn jedes Glied der Reihe konvergiert für $y \to \infty$ gegen 0.

Es liegt nun nahe, die Funktion φ_2 oder ξ_2 einer Fourieranalyse betreffs der Funktionen $e\,(\tau)$ zu unterziehen, die folgenden Bedingungen genügen:

1. $e\,(\tau)$ ist in der Halbebene $y > 0$ zweimal stetig differenzierbar und beschränkt.

2. $e\,(\tau)$ genügt der Wellengleichung

$$\left[y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \tfrac{1}{4} + r^2\right] e\,(\tau) = 0\,. \tag{43}$$

3. Für alle Substitutionen U der Modulgruppe ersten Grades ist

$$e\,(U\,(\tau)) = e\,(\tau)\,. \tag{44}$$

Automorphe Eigenfunktionen dieser Art werden künftig der Normierung

$$\frac{3}{\pi}\iint_{\mathfrak{F}_1} e\,(\tau)\,\overline{e\,(\tau)}\,\frac{dx\,dy}{y^2} = 1\,, \tag{45}$$

unterworfen. Ist $e\,(\tau)$ konstant, also $r = \pm\dfrac{i}{2}$, so ist $|e\,(\tau)| = 1$; denn der hyperbolische Inhalt von $\mathfrak{F}_1$ ist gerade $\dfrac{\pi}{3}$. Es soll dann $e\,(\tau) = 1$ angenommen werden. Wir bestimmen zunächst einige einfache Eigenschaften der $e\,(\tau)$.

Aus den aufgeführten Bedingungen folgt, daß $e\,(\tau)$ in eine Fourierreihe der Art

$$e\,(\tau) = u\,(y) + \sum_{n \neq 0} b_n\,y^{\frac{1}{2}}\,K_{ir}\,(2\,\pi\,|n|\,y)\,e^{2\pi i n x} \tag{46}$$

entwickelt werden kann. Dabei ist

$$u\,(y) = \begin{cases} b_0\,y^{\frac{1}{2}+ir} + c_0\,y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für} \quad r \neq 0\,, \\ b_0\,y^{\frac{1}{2}}\log y + c_0\,y^{\frac{1}{2}} & \text{für} \quad r = 0\,. \end{cases} \tag{47}$$

Wir wenden den GREENschen Satz

$$\iint_{\mathfrak{B}} (V\,(\tau)\,\Delta\,U\,(\tau) - U\,(\tau)\,\Delta\,V\,(\tau))\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{R}} \left(V\,(\tau)\,\frac{\partial\,U\,(\tau)}{\partial n} - U\,(\tau)\,\frac{\partial\,V\,(\tau)}{\partial n}\right) ds\,, \tag{48}$$

wobei $\mathfrak{R}$ den Rand eines Bereiches $\mathfrak{B}$, n die nach außen weisende Normale und s die Bogenlänge auf $\mathfrak{R}$ bedeutet, auf $U(\tau) = e(\tau)$ und $V(\tau) = \overline{e(\tau)}$ an. $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_q$ sei speziell der Bereich $0 < y \leqq q$, $2|x| \leqq 1$, $x^2 + y^2 \geqq 1$. Für $q \to \infty$ geht $\mathfrak{B}_q$ offenbar in $\mathfrak{F}_1$ über. Zufolge (43) wird

$$(-r^2 + \bar{r}^2) \iint\limits_{\mathfrak{B}_q} e(\tau)\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\, dy}{y^2} = -2\, i\, \mathfrak{Im} \int\limits_0^1 e(\tau)\, \frac{\partial\, \overline{e(\tau)}}{\partial y}\, dx \Big|_{y=q};$$

denn die Beiträge des Randintegrals zu äquivalenten Randstücken heben sich auf. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\int\limits_0^1 e(\tau)\, \frac{\partial\, \overline{e(\tau)}}{\partial y}\, dx = u(y)\, \overline{u'(y)} + \sum_{n \neq 0}{}' a_n \bar{a}_n\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}(2\pi |n| y)\, \frac{d}{dy} \left(y^{\frac{1}{2}} K_{i\bar{r}}(2\pi |n| y)\right)$$

ist. Aus bekannten Eigenschaften der Besselschen Funktion $K_\nu(z)$ geht hervor, daß die unendliche Reihe $\sum\limits_{n \neq 0}{}'$ für $y \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Mithin liefert der Grenzübergang $q \to \infty$:

$$\frac{\pi}{3}(-r^2 + \bar{r}^2) = -2\, i \lim_{y \to \infty} \mathfrak{Im}\, u(y)\, \overline{u'(y)}.$$

Setzt man $r = \alpha + i\beta$ (α, β reell), so ergibt eine elementare Umformung

$$\frac{2\pi}{3}\alpha\beta = \lim_{y \to \infty} \mathfrak{Im}\, u(y)\, \overline{u'(y)}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \begin{cases} (c_0 \bar{c}_0\, y^{2\beta} - b_0 \bar{b}_0\, y^{-2\beta})\, \alpha + (-i\, b_0 \bar{c}_0\, y^{2i\alpha} + i\, c_0 \bar{b}_0\, y^{-2i\alpha})\, \beta & \text{für } r \neq 0, \\ \mathfrak{Im}\, c_0 \bar{b}_0 & \text{für } r = 0. \end{cases}$$

Dieser Limes kann im Falle $\alpha\beta \neq 0$ nur dann existieren, wenn entweder b_0 oder c_0 gleich 0 ist. Dann ist der Limes selber gleich 0, was aber mit $\alpha\beta \neq 0$ im Widerspruch steht. Allgemein gilt also $\alpha\beta = 0$; d. h. r^2 ist reell. Nach der Fourierschen Koeffizientenformel ist ferner

$$\int\limits_0^1 e(\tau)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = b_n\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}(2\pi |n| y) \quad \text{für} \quad n \neq 0.$$

Dieser Ausdruck ist beschränkt. Sei $\beta \neq \pm \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{4} + r^2 \neq 0$; dann verschwinden nicht alle b_n; mithin ist auch

$$y^{\frac{1}{2}} K_{ir}(y) \quad \text{für } y \to 0 \text{ beschränkt.}$$

Berücksichtigt man

$$\lim_{y \to 0+0} y^\nu K_{\pm\nu}(y) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \quad \text{für} \quad \mathfrak{Re}\, \nu > 0,$$

so ergibt sich offenbar $|\beta| < \frac{1}{2}$, mithin $\frac{1}{4} + r^2 > 0$. Der Fall $\beta = \pm\frac{1}{2}$ führt auf eine Potentialfunktion, die in jedem Punkt einer geschlossenen Fläche regulär ist. Eine solche Funktion ist notwendig konstant. Es ist also allgemein

$$\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0, \ |\beta| \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{49}$$

Da auch

$$\int\limits_0^1 e(\tau)\, dx = u(y)$$

beschränkt ist, so folgt nunmehr (für $y \to \infty$) $b_0 = c_0 = 0$, d. h. $u(y) = 0$, sofern $e(\tau)$ nicht konstant, also $|\beta| < \frac{1}{2}$ ist. Setzen wir generell

$$(50) \qquad \delta(e) = \begin{cases} 1 & \text{für } e(\tau) = \text{konstant}, \\ 0 & \text{für } e(\tau) \neq \text{konstant}, \end{cases}$$

dann ist also

$$(51) \qquad u(y) = \delta(e).$$

Wir wenden (48) auf $U(\tau) = e(\tau)$ und $V(\tau) = 1$ an und erhalten

$$-\left(\tfrac{1}{4} + r^2\right) \iint_{\mathfrak{F}_q} e(\tau) \frac{dx\,dy}{y^2} - \int_0^1 \frac{\partial e(\tau)}{\partial y}\, dx \Big/_{y=q} = 0.$$

Hieraus ist schließlich

$$(52) \qquad \frac{3}{\pi} \iint_{\mathfrak{F}_1} e(\tau) \frac{dx\,dy}{y^2} = \delta(e)$$

zu entnehmen.

Wir wenden uns nun der Untersuchung von

$$(53) \qquad R(s; e, g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{F}_1} \xi_2(s, \tau; g)\, \overline{e(\tau)} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

zu. Hierin tragen wir die in $\mathfrak{F}_1$ gleichmäßig konvergente Entwicklung (39) für $\nu = 2$ ein und erhalten nach gliedweiser Integration

$$(54) \qquad \begin{aligned} R(s; e, g) &= \frac{\Gamma(2s)}{\sqrt{\pi}\,(2\pi)^{2s}} \sum_{(T)>0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \sum_{|U|=1} \iint_{\mathfrak{F}_1} \left\{Sp\,(T[U]\,Y_1)\right\}^{-2s} \overline{e(\tau)} \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \frac{2\,\Gamma(2s)}{\sqrt{\pi}\,(2\pi)^{2s}} \sum_{(T)>0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{Sp\,(T\,Y_1)\right\}^{-2s} \overline{e(\tau)} \frac{dx\,dy}{y^2}. \end{aligned}$$

U durchläuft in der ersten Summe alle ganzzahligen Matrizen mit der Determinante 1. Es bleibt noch

$$(55) \qquad \Omega(s, T) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{Sp\,(T\,Y_1)\right\}^{-2s} \overline{e(\tau)} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

zu berechnen. Setzt man

$$\tau_1 = x_1 + i\,y_1 = |T|^{-\frac{1}{2}}(t_0\,\tau + t_1),$$

so wird

$$Sp\,(T\,Y_1) = |T|^{\frac{1}{2}} \frac{x_1^2 + y_1^2 + 1}{y_1}, \quad \tau = \frac{|T|^{\frac{1}{2}}\tau_1 - t_1}{t_0}.$$

Die Variablentransformation $\tau \to \tau_1$ liefert also

$$(56) \qquad \Omega(s, T) = |T|^{-s} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{y}{x^2 + y^2 + 1}\right)^{2s} \omega(\tau, T) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

mit

$$(57) \qquad \omega(\tau, T) = \overline{e\left(\frac{|T|^{\frac{1}{2}}\,\tau - t_1}{t_0}\right)},$$

nachdem an Stelle von τ_1 wieder τ geschrieben ist. Wir führen in (56) hyperbolische Polarkoordinaten ϱ, ϑ zum Mittelpunkt $\tau = i$ an Stelle von x, y ein. Es gelten die Beziehungen:

$$\frac{\tau - i}{\tau + i} = \xi + i\eta\,(\xi, \eta \text{ reell}), \quad \xi = \varkappa \cos\vartheta, \quad \eta = \varkappa \sin\vartheta \qquad (\varkappa \geq 0),$$

$$\varkappa = \mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2}, \quad \frac{x^2 + y^2 + 1}{y} = 2\,\mathfrak{Cof}\,\varrho, \quad \frac{dx\,dy}{y^2} = \mathfrak{Sin}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Die Wellengleichung (43), der $\omega = \omega(\tau, T)$ genügt, transformiert sich in

$$\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\mathfrak{Sin}\,\varrho\,\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\varrho}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\vartheta^2}\right] + \left(\tfrac{1}{4} + r^2\right)\omega = 0 \tag{58}$$

und (56) geht über in

$$\Omega(s, T) = 4^{-s}\,|T|^{-s}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\mathfrak{Cof}\,\varrho)^{-2s}\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta. \tag{59}$$

Wir entwickeln ω in eine Fourierreihe:

$$\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n(\varrho)\,e^{2\pi i n\vartheta}. \tag{60}$$

Die Koeffizienten $\omega_n(\varrho)$ genügen gewissen Differentialgleichungen, die aus (58) zu gewinnen sind. $\omega_0(\varrho)$ insbesondere ist Lösung der LEGENDREschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\left[(1 - z^2)\,\frac{d\omega_0}{dz}\right] - \left(\tfrac{1}{4} + r^2\right)\omega_0 = 0,$$

wenn $z = \mathfrak{Cof}\,\varrho$ gesetzt wird. Da ω_0 für $\varrho = 0$ noch regulär ist, so ergibt sich nach [7]) Kap. IV, § 4, (6a)

$$\omega_0(\varrho) = c\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+ir}(\mathfrak{Cof}\,\varrho).$$

Die Konstante c hat den Wert $\omega_0(0)$. Damit wird

$$\omega(i, T) = \omega_{\varrho=0} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\,d\vartheta = \lim_{\varrho\to 0}\omega_0(\varrho) = c.$$

Wir tragen die Entwicklung (60) in (59) ein und führen die Integration über ϑ gliedweise aus. Offenbar liefert nur ω_0 einen von 0 verschiedenen Beitrag zum Integral. Nach der Substitution $z = \mathfrak{Cof}\,\varrho$ erhält man

$$\Omega(s, T) = 2\pi\,\omega(i, T)\,4^{-s}\,|T|^{-s}\int_1^{\infty}z^{-2s}\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,dz. \tag{61}$$

Trägt man die Darstellung

$$K_{ir}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}\int_1^{\infty}e^{-tz}\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,dz \qquad \text{(s. [7]) Kap. IV, § 5, Abschnitt f)}$$

in

$$2^{2s-\frac{5}{2}}\,\Gamma\left(s - \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s + \frac{ir}{2} - \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\infty}K_{ir}(t)\,t^{2s-\frac{3}{2}}\,dt \quad \text{(s. [8]) 13·21, (8))}$$

ein und vertauscht die Reihenfolge der Integrationen, so erhält man

[7]) MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1948.

[8]) WATSON, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.

$$\int_1^\infty z^{-2s}\,\mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,dz = \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2s)}\,.$$

Die Berechnung von Ω ist damit durchgeführt:

$$\Omega(s, T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\omega(i, T)\,|T|^{-s}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2s)}\,. \tag{62}$$

Es erweist sich als zweckmäßig, $\overline{e(\tau)}$ als Funktion von Y darzustellen:

$$e^*(Y) = \overline{e(\tau)}\,. \tag{63}$$

Alsdann wird

$$\omega(i, T) = \overline{e\left(\frac{T^{-\frac{1}{2}}\,i - t_1}{t_0}\right)} = e^*(T^{-1})\,.$$

Die zu bestimmenden Funktionen (54) erscheinen nunmehr in ihrer endgültigen Gestalt:

$$R(s; e, g) = (2\pi)^{-2s}\,\Gamma\left(s-\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{ir}{2}-\frac{1}{4}\right)\varphi(s; e, g)\,. \tag{64}$$

Dabei sind

$$\varphi(s; e, g) = \sum_{|T|>0}{}' \frac{a(T)\,e^*(T^{-1})}{\varepsilon(T)\,|T|^s} \tag{65}$$

die der Modulform g in natürlicher Weise zugeordneten DIRICHLETschen Reihen.

§ 2. Bestimmung der Funktionalgleichungen.

Eine Funktionalgleichung für $\varphi_1(s, \tau; g) + \varphi_2(s, \tau; g)$ läßt sich leicht bestimmen. Setzt man

$$\xi(s, \tau; g) = \xi_1(s, \tau; g) + \xi_2(s, \tau; g) = (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(2s)\,[\varphi_1(s, \tau; g) + \varphi_2(s, \tau; g)]\,, \tag{66}$$

so ergibt sich in der üblichen Weise (s. [2])) mit Hilfe von (30) und (31)

$$\begin{aligned} \xi(s, \tau; g) &= \int_0^\infty (f(u\,Y_1) - a_0)\,u^{2s-1}\,du \\ &= \int_1^\infty (f(u\,Y_1) - a_0)\,u^{2s-1}\,du + (-1)^k \int_1^\infty (f(u\,Y_1) - a_0)\,u^{2(k-s)-1}\,du \\ &\quad - \frac{a_0}{2s} - \frac{(-1)^k\,a_0}{2(k-s)}\,, \end{aligned} \tag{67}$$

woraus

$$\xi(k-s, \tau; g) = (-1)^k\,\xi(s, \tau; g) \tag{68}$$

erhellt. Aus (67) kann der analytische Charakter von $\varphi_2(s, \tau; g)$ bestimmt werden; denn $\varphi_1(s, \tau, g)$ setzt sich aus den Faktoren $\varphi^*(2s, g^*)$ und $G(\tau, 2s)$ zusammen, von denen der erste durch die HECKEsche Theorie [2]) beherrscht wird, während für den zweiten in [9]) eine geeignete Reihenentwicklung angegeben worden ist. Der Vollständigkeit halber fügen wir noch die Formeln an:

[9]) MAASS, H.: Math. Ann. **121**, 141 (1949).

$$\begin{aligned}\xi^*(s, g^*) &= (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\varphi^*(s, g^*)\\ &= \int_1^\infty f_1^*(u)\,u^{s-1}\,du + i^k\int_1^\infty f_1^*(u)\,u^{k-s-1}\,du - \frac{a_0}{s} - \frac{i^k a_0}{k-s},\end{aligned}\tag{69}$$

$$\xi^*(k-s, g^*) = i^k\,\xi^*(s, g^*),\tag{70}$$

$$\eta(s, \tau) = \pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(2s)\,G(\tau, s),\tag{71}$$

$$\eta(1-s, \tau) = \eta(s, \tau).\tag{72}$$

Diese Funktionalgleichung ist evident auf Grund der Entwicklung

$$\begin{aligned}\eta(s, \tau) &= 2\,\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(2s)\,y^s + 2\,\pi^{\frac12 - s}\,\Gamma(s-\tfrac12)\,\zeta(2s-1)\,y^{1-s}\\ &+ 2\sum_{n\neq 0}\Big\{\sum_{d_1 d_2 = n}|d_1|^{\frac12 - s}\,|d_2|^{s-\frac12}\Big\}\,y^{\frac12}\,K_{s-\frac12}(2\pi|n|y)\,e^{2\pi i n x},\end{aligned}\tag{73}$$

wenn hier noch die Funktionalgleichung der RIEMANNschen Zetafunktion $\zeta(s)$ berücksichtigt wird.

Unser eigentliches Ziel ist jedoch, Funktionalgleichungen für die Funktionen $\varphi(s; e, g)$ zu finden. Zu dem Zweck wird

$$R(s; e, g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint_{\mathfrak{F}_1}\xi_2(s, \tau; g)\,\overline{e(\tau)}\,\frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\iint_{\mathfrak{F}_1} f_2(u\,Y_1)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}$$

umgeformt. Die Integration über u unterbrechen wir an der Stelle $u = 1$. Das endliche Integral über u von 0 bis 1 wird mit Hilfe der Substitution $u \to \frac{1}{u}$ in ein solches von 1 bis ∞ verwandelt. Beachtet man die Transformationsformeln (30), (31) und die Mittelwertgleichung (52), so ergibt sich für R die Zerlegung

$$\begin{aligned}R(s; e, g) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty\iint_{\mathfrak{F}_1} f_2(Y)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}\\ &+ \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty\iint_{\mathfrak{F}_1} f_2(Y)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2(k-s)-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2} - \Big(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^k}{k-s}\Big)\frac{\sqrt{\pi}\,a_0\,\delta(e)}{6}\\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty\iint_{\mathfrak{F}_1}\big[(-1)^k\,|Y|^k\,f_1(Y) - f_1(Y^{-1})\big]\,\overline{e(\tau)}\,u^{-2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}.\end{aligned}\tag{74}$$

Um hier eine Invarianz gegenüber der Substitution $s \to k - s$ zu erkennen, müssen wir das letzte Integral geeignet umformen. Zugleich ist damit die Frage der analytischen Fortsetzung von $\varphi(s; e, g)$ zu klären. Ist doch die vorgenommene Umformung von R nur für s-Werte mit hinreichend großem Realteil erlaubt! Wir können das letzte Integral offenbar als Grenzwert des Ausdrucks

$$J(p, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^p\iint_{\mathfrak{B}_q}\big[(-1)^k\,u^{2k}\,f_1(Y) - f_1(Y^{-1})\big]\,\overline{e(\tau)}\,u^{-2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}\tag{75}$$

für $p, q \to \infty$ darstellen. Dabei bezeichnet wie bisher $\mathfrak{B}_q$ den Bereich $0 < y \leqq q$, $|2x| \leqq 1$, $x^2 + y^2 \geqq 1$. Sei

$$(76)\qquad \begin{aligned} J_1(p,q) &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \int_1^p \iint_{\mathfrak{B}_q} f_1(Y)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2(k-s)-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}, \\ J_2(p,q) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^p \iint_{\mathfrak{B}_q} f_1(Y^{-1})\,\overline{e(\tau)}\,u^{-2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Dann wird

$$(77)\qquad J(p,q) = J_1(p,q) - J_2(p,q).$$

Die Integrale (76) werden nun mit Hilfe der Entwicklung (29) berechnet. Zunächst bestimmen wir zu jedem Paar teilerfremder ganzer Zahlen c, d eine Modulsubstitution $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die den Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_1$ in den Streifen $|2x| \leqq 1$ abbildet. U ist durch c, d eindeutig bestimmt. Wir setzen

$$(78)\qquad \mathfrak{S}_q = \sum_U{}' U(\mathfrak{B}_q),$$

wobei U ein volles System von Modulsubstitutionen der angegebenen Art durchlaufen möge, so daß die zweiten Zeilen zweier Substitutionen U sich nicht nur um einen Faktor ± 1 unterscheiden. Damit ergibt sich

$$(79)\qquad \begin{aligned} J_1(p,q) &= \frac{(-1)^k}{2\sqrt{\pi}} \sum_{(c,d)=1} \int_1^p \iint_{\mathfrak{B}_q} f_1^*\left(u\,\frac{|c\tau+d|^2}{y}\right) \overline{e(\tau)}\,u^{2(k-s)-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \int_1^p \iint_{\mathfrak{S}_q} f_1^*\left(\frac{u}{y}\right) \overline{e(\tau)}\,u^{2(k-s)-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Sind τ und τ_1 Punkte des Streifens $|2x| \leqq 1$, $y > 0$, die bezüglich der Modulgruppe äquivalent sind, so stimmen $y = \mathfrak{Im}\,\tau$ und $y_1 = \mathfrak{Im}\,\tau_1$ überein oder es ist $y\,y_1 \leqq 1$. Sei nun $\frac{1}{q} \leqq y \leqq q$, $\tau_1 \subset \mathfrak{F}_1$. Dann ist entweder $y_1 = y \leqq q$ oder $y_1 \leqq \frac{1}{y} \leqq q$, jedenfalls also $\tau_1 \subset \mathfrak{B}_q$, mithin $\tau \subset \mathfrak{S}_q$. Der Bereich

$$\frac{1}{q} \leqq y \leqq q, \quad |2x| \leqq 1$$

ist also in $\mathfrak{S}_q$ enthalten. Es sei M eine Schranke für $e(\tau)$:

$$|e(\tau)| \leqq M \quad \text{für} \quad y > 0.$$

Wir entwickeln die Eigenfunktion in eine Fourierreihe. Nach (51) kann

$$e(\tau) = \delta(e) + \sum_{n \neq 0} c_n(y)\,e^{2\pi i n x}$$

gesetzt werden. Sodann ergibt sich mit einer gewissen Funktion $C_q(v)$, die der Abschätzung $|C_q(v)| \leqq M$ genügt,

$$(80)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}_q} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}$$

$$= \iint\limits_{\substack{\frac{1}{q} \leqq y \leqq q \\ |2x| \leqq 1}} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2} + \iint\limits_{\substack{\mathfrak{S}_q \\ qy \leqq 1}} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}$$

$$= \delta(e) \int\limits_{\frac{1}{q}}^{q} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \frac{dy}{y^2} + \iint\limits_{\substack{\mathfrak{S}_q \\ qy \leqq 1}} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}$$

$$= \delta(e) \left.\frac{e^{-2\pi t \frac{u}{y}}}{2\pi t u}\right|_{y=\frac{1}{q}}^{y=q} + C_q(tu) \left.\frac{e^{-2\pi t \frac{u}{y}}}{2\pi t u}\right|_{y\to 0}^{y=\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{2\pi t u} \left\{\delta(e)\, e^{-2\pi t \frac{u}{q}} - C_q^*(tu)\, e^{-2\pi t u q}\right\}.$$

Dabei ist $C_q^*(v) = \delta(e) - C_q(v)$ gesetzt worden. Man erkennt sofort, daß $|C_q^*(v)| \leqq M$ ist. Wir wenden die abgeleitete Formel an, um $J_1(p, q)$ zu berechnen:

$$(81)\qquad \begin{aligned} J_1(p,q) &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} a_t \int\limits_1^p \iint\limits_{\mathfrak{S}_q} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}\, u^{2(k-s)-1}\, du \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{2\pi t} \int\limits_1^p \left\{\delta(e)\, e^{-2\pi t \frac{u}{q}} - C_q^*(tu)\, e^{-2\pi t u q}\right\} u^{2(k-s-1)}\, du. \end{aligned}$$

Analog verläuft die Rechnung für das zweite der Integrale (76):

$$(82)\qquad \begin{aligned} J_2(p,q) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{(c,d)=1} \int\limits_{\frac{1}{p}}^{1} \iint\limits_{\mathfrak{F}_q} f_1^*\left(u \frac{|c\tau + d|^2}{y}\right) \overline{e(\tau)}\, u^{2s-1}\, du\, \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{1}{p}}^{1} \iint\limits_{\mathfrak{S}_q} f_1^*\left(\frac{u}{y}\right) \overline{e(\tau)}\, u^{2s-1}\, du\, \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} a_t \int\limits_{\frac{1}{p}}^{1} \iint\limits_{\mathfrak{S}_q} e^{-2\pi t \frac{u}{y}}\, \overline{e(\tau)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}\, u^{2s-1}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{2\pi t} \int\limits_{\frac{1}{p}}^{1} \left\{\delta(e)\, e^{-2\pi t \frac{u}{q}} - C_q^*(tu)\, e^{-2\pi t u q}\right\} u^{2(s-1)}\, du. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(83)\qquad h(y) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{2\pi t}\, e^{-2\pi t y}.$$

Dann wird

$$h'(y) = -f_1^*(y) \tag{84}$$

und

$$J(p, q) = \frac{(-1)^k \delta(e)}{\sqrt{\pi}} \int_1^p h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(k-s-1)} du - \frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{p}}^1 h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(s-1)} du \tag{85}$$

$$- \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{2\pi t} \int_1^p C_q^*(tu) e^{-2\pi tuq} u^{2(k-s-1)} du$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{2\pi t} \int_{\frac{1}{p}}^1 C_q^*(tu) e^{-2\pi tuq} u^{2(s-1)} du.$$

Der Beitrag der letzten beiden Summen zum Integral $J(p, q)$ wird unter der Voraussetzung $\sigma = \Re s > k$ abgeschätzt durch

$$\frac{M}{2\pi\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|a_t|}{t} \left\{ \int_1^{\infty} e^{-2\pi tuq} du + \int_0^1 e^{-2\pi tuq} u^{2(\sigma-1)} du \right\}$$

$$\leqq \frac{M}{2\pi\sqrt{\pi}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|a_t|}{t} \int_0^{\infty} e^{-2\pi tuq} u^{2(\sigma-1)} du = \frac{M\,\Gamma(2\sigma-1)}{(2\pi)^{2\sigma}\sqrt{\pi}\, q^{2\sigma-1}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|a_t|}{t^{2\sigma}}$$

$$= O\left(\frac{1}{q}\right) \quad \text{für } q \to \infty \text{ gleichmäßig in } p.$$

Demnach ist

$$\lim_{p, q \to \infty} J(p, q) = \lim_{p, q \to \infty} J^*(p, q), \tag{86}$$

wenn wir

$$J^*(p, q) = \frac{(-1)^k \delta(e)}{\sqrt{\pi}} \int_1^p h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(k-s-1)} du - \frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{p}}^1 h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(s-1)} du \tag{87}$$

setzen. Partielle Integration führt auf

$$J^*(p, q) = \frac{(-1)^k \delta(e)}{\sqrt{\pi}} \left. \frac{h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(k-s)-1}}{2(k-s)-1} \right|_{u=1}^{u=p} - \frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}} \left. \frac{h\left(\frac{u}{q}\right) u^{2s-1}}{2s-1} \right|_{u=\frac{1}{p}}^{u=1} \tag{88}$$

$$+ \frac{(-1)^k \delta(e)}{\sqrt{\pi}\, q(2k-2s-1)} \int_1^p f_1^*\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(k-s)-1} du - \frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}\, q(2s-1)} \int_{\frac{1}{p}}^1 f_1^*\left(\frac{u}{q}\right) u^{2s-1} du.$$

Wir vollziehen den Grenzübergang $p \to \infty$ und erhalten

$$J^*(q) = \lim_{p \to \infty} J^*(p, q) = -\frac{(-1)^k \delta(e)\, h\left(\frac{1}{q}\right)}{\sqrt{\pi}\,(2k-2s-1)} - \frac{\delta(e)\, h\left(\frac{1}{q}\right)}{\sqrt{\pi}\,(2s-1)} \tag{89}$$

$$+ \frac{(-1)^k \delta(e)}{\sqrt{\pi}\, q(2k-2s-1)} \int_1^{\infty} f_1^*\left(\frac{u}{q}\right) u^{2(k-s)-1} du - \frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}\, q(2s-1)} \int_0^1 f_1^*\left(\frac{u}{q}\right) u^{2s-1} du.$$

Nach (32) ist

$$f_1^*\left(\frac{u}{q}\right) = i^k \left(\frac{q}{u}\right)^k f_1^*\left(\frac{q}{u}\right) + \left(i^k \left(\frac{q}{u}\right)^k - 1\right) a_0.$$

Damit wird

$$
\begin{aligned}
J^*(q) = &-\frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}}\, h\left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2s-1}+\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right)\\
&+\frac{(-i)^k\,\delta(e)\,q^{k-1}}{\sqrt{\pi}\,(2k-2s-1)}\int_1^\infty f_1^*\left(\frac{q}{u}\right)u^{k-2s-1}\,du-\frac{i^k\,\delta(e)\,q^{k-1}}{\sqrt{\pi}\,(2s-1)}\int_0^1 f_1^*\left(\frac{q}{u}\right)u^{-k+2s-1}\,du\\
&-\frac{(-i)^k\,\delta(e)\,q^{k-1}\,a_0}{\sqrt{\pi}\,(2k-2s-1)(k-2s)}+\frac{(-1)^k\,\delta(e)\,a_0}{2q\sqrt{\pi}\,(2k-2s-1)(k-s)}\\
&-\frac{i^k\,\delta(e)\,q^{k-1}\,a_0}{\sqrt{\pi}\,(2s-1)(2s-k)}+\frac{\delta(e)\,a_0}{2q\sqrt{\pi}\,(2s-1)\,s}\\
= &-\frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}}\, h\left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2s-1}+\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right)\\
&+\frac{(-i)^k\,\delta(e)\,q^{2(k-s)-1}}{\sqrt{\pi}\,(2k-2s-1)}\int_0^q f_1^*(u)\,u^{2s-k-1}\,du-\frac{i^k\,\delta(e)\,q^{2s-1}}{\sqrt{\pi}\,(2s-1)}\int_q^\infty f_1^*(u)\,u^{k-2s-1}\,du\\
&+\frac{i^k\,\delta(e)\,q^{k-1}\,a_0}{\sqrt{\pi}\,(2s-k)}\left(\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}-\frac{1}{2s-1}\right)+\frac{\delta(e)\,a_0}{2q\sqrt{\pi}}\left(\frac{(-1)^k}{(2k-2s-1)(k-s)}+\frac{1}{(2s-1)\,s}\right).
\end{aligned}
$$

Wir ziehen die für $q \to \infty$ ersichtlich gegen 0 gehenden Glieder heraus, bilden also

$$
\begin{aligned}
(90)\qquad J(q) = &-\frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}}\, h\left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{2s-1}+\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right)\\
&+\frac{i^k\,\delta(e)\,q^{k-1}\,a_0}{\sqrt{\pi}\,(2s-k)}\left(\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}-\frac{1}{2s-1}\right).
\end{aligned}
$$

Es ist dann

$$
(91)\qquad \lim_{p,q\to\infty} J(p,q) = \lim_{q\to\infty} J^*(q) = \lim_{q\to\infty} J(q).
$$

Berücksichtigen wir die Identität

$$
\frac{1}{2s-k}\left(\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}-\frac{1}{2s-1}\right)=\frac{1}{k-1}\left(\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}+\frac{1}{2s-1}\right)+\frac{(-1)^k-1}{k-1}\,\frac{1}{2s-k}
$$

für $k > 1$, so folgt wegen $a_0\left((-1)^k-1\right)=0$, daß

$$
(92)\qquad J(q)=\frac{\delta(e)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2s-1}+\frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right)\left(-h\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{i^k\,a_0\,q^{k-1}}{k-1}\right)
$$

ist. Es bleibt der Grenzwert der letzten Klammer zu bestimmen. Ausgehend von der Formel

$$
e^{-2\pi t y}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\,(2\pi t y)^{-s}\,ds
$$

finden wir

$$
h(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a_t\,\Gamma(s)}{2\pi t\,(2\pi t y)^s}\,ds=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(s+1,g^*)\,\Gamma(s)}{(2\pi y)^s}\,ds,
$$

wenn wir σ hinreichend groß wählen. Wir verschieben die Integrationsgerade parallel bis zum Punkt $s=-\frac{1}{2}$. Da $\Gamma(s)$ in $s=0$ und $\varphi^*(s+1,g^*)$

in $s = k - 1$ je einen Pol erster Ordnung haben[2]), so wird nach dem Residuensatz

$$(93)\quad h(y) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\varphi^*(s+1, g^*)\,\Gamma(s)}{(2\pi y)^s}\,ds + \varphi^*(1, g^*) + \frac{\alpha\,\Gamma(k-1)}{(2\pi y)^{k-1}}\right\}.$$

Dabei bezeichnet α das Residuum von $\varphi^*(s, g^*)$ in $s = k$. Man stellt leicht fest, daß das letzte Integral mit y gegen 0 konvergiert. Infolgedessen ist

$$(94)\qquad -\frac{1}{2\pi}\,\varphi^*(1, g^*) = \lim_{q\to\infty}\left(-h\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{\alpha\,\Gamma(k-1)\,q^{k-1}}{(2\pi)^k}\right).$$

Aus der Heckeschen Theorie[2]) entnehmen wir noch die Beziehung

$$(95)\qquad a_0 = (-1)^k a_0 = i^k (2\pi)^{-k}\,\Gamma(k)\,\alpha\,.$$

Alsdann wird

$$\lim_{q\to\infty}\left(-h\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{i^k a_0 q^{k-1}}{k-1}\right) = -\frac{1}{2\pi}\,\varphi^*(1, g^*)$$

und

$$(96)\qquad \lim_{q\to\infty} J(q) = -\frac{\delta(e)\,\varphi^*(1, g^*)}{2\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2s-1} + \frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right).$$

Diese Beziehung gilt nicht nur für $k > 1$, sondern auch für $k = 1$, weil dann beide Seiten der Gleichung verschwinden. Aus (74) ergibt sich damit die gewünschte Darstellung

$$(97)\qquad \begin{aligned} R(s; e, g) = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty \iint_{\mathfrak{F}_1} f_2(Y)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2s-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2} \\ & + \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty \iint_{\mathfrak{F}_1} f_2(Y)\,\overline{e(\tau)}\,u^{2(k-s)-1}\,du\,\frac{dx\,dy}{y^2} \\ & - \frac{\sqrt{\pi}\,a_0\,\delta(e)}{6}\left(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^k}{k-s}\right) - \frac{\delta(e)\,\varphi^*(1, g^*)}{2\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2s-1} + \frac{(-1)^k}{2(k-s)-1}\right). \end{aligned}$$

Sie ist gültig für alle s und liefert die analytische Fortsetzung von $\varphi(s; e, g)$ in die ganze s-Ebene. $\varphi(s; e, g)$ ist abgesehen von endlich vielen Polen erster Ordnung überall regulär und genügt offenbar der Funktionalgleichung

$$(98)\qquad R(k-s; e, g) = (-1)^k R(s; e, g)\,.$$

Anwenden lassen sich die vorstehenden Untersuchungen auf die Eisensteinreihen. Die Fourierkoeffizienten dieser Reihen haben, wie Siegel[1]) gezeigt hat, multiplikative Eigenschaften. Es wäre von Interesse, festzustellen, ob es sich hier um eine Besonderheit der Eisensteinreihen handelt oder ob auch anderen Modulformen zweiten Grades diese Eigenschaft zukommt. Diese Frage ist wegen der Beziehungen der Modulformen zu den Dirichletreihen und wegen möglicher zahlentheoretischer Anwendungen von erhöhter Bedeutung.

(Eingegangen am 21. September 1949.)

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen