Hamburgische Abhandlungen 16 (1949)

Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen

Herrn E. ARTIN zum 50. Geburtstage gewidmet

Von HANS MAASS in Heidelberg

Es hat sich gezeigt[1]), daß die von E. HECKE mit Hilfe der automorphen Funktionen begründete Theorie der DIRICHLETreihen mit EULERscher Produktentwicklung[2]) in einer neuen Richtung wesentlich erweitert werden kann, wenn man gewisse nichtanalytische automorphe Funktionen in die Theorie mit einbezieht. Dabei handelt es sich um Lösungen der Wellengleichung

$$\left[y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda^2\right]f(\tau)=0 \qquad (\tau=x+iy)\,. \tag{1}$$

λ stellt einen Parameter dar, über den in geeigneter Weise verfügt werden kann. Unter allen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y ist die Wellengleichung ausgezeichnet durch ihre Invarianz gegenüber der Gruppe der Transformationen

$$\tau\to\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \quad (\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta \text{ reell},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1)\,,$$

die sich als Bewegungen der hyperbolischen Ebene $y>0$ mit der metrischen Grundform

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

deuten lassen.

Eine sinngemäße Verallgemeinerung dieses Funktionsbegriffs auf mehrere Veränderliche ist naheliegend. Sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger $(k+1)$-dimensionaler zweimal stetig differenzierbarer RIEMANNscher Raum. $x^0, x^1, \ldots, x^k$ bezeichne ein lokales Koordinatensystem und

$$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$$

die metrische Grundform von $\mathfrak{R}$ (Bezeichnung und Summationsvorschrift wie im Tensorkalkül). An Stelle von (1) tritt dann die verallgemeinerte Wellengleichung

---

[1]) H. MAASS, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Annalen 121 (1949), S. 141–183.

[2]) E. HECKE, Über die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen 112 (1936), S. 664–699; Über Modulfunktionen und DIRICHLETsche Reihen mit EULERscher Produktentwicklung, Teil I und II, Math. Annalen 114 (1937), S. 1–28, 316–351.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)+\lambda^2\right]f=0 \qquad (g=|g_{\mu\nu}|)$$

und es erhebt sich die Frage, ob sie Lösungen besitzt, die gegenüber einer vorgelegten diskontinuierlichen Gruppe von Bewegungen des RIEMANNschen Raumes $\mathfrak{R}$ invariant sind.

In der vorliegenden Arbeit interessieren automorphe Funktionen nur insofern, als sie mit der Theorie der DIRICHLETreihen in Verbindung stehen. Wir werden uns daher auf die Betrachtung des $(k+1)$-dimensionalen hyperbolischen Raumes beschränken, der sich im $(k+1)$-dimensionalen euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_k$ als Teilraum $x_k > 0$ zur Grundform

$$ds^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_k^2}{x_k^2} \tag{2}$$

repräsentiert. Die Punktkoordinaten werden künftig, so wie es hier bereits geschehen ist, durch untere Indices bezeichnet. Die Wellengleichung nimmt nunmehr die Gestalt

$$\left[x_k^{k+1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_k^{1-k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+r^2+\frac{k^2}{4}\right]f=0 \tag{3}$$

$x_k^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + (1-k)\, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

an; dabei ist λ^2 durch $r^2+\frac{k^2}{4}$ ersetzt worden. r ist ebenso wie λ ein willkürlicher Parameter, den wir im folgenden der Einfachheit halber reell annehmen.

Die Bewegungen des hyperbolischen Raumes lassen sich, wie K. Th. VAHLEN[1]) gezeigt hat, mit Hilfe CLIFFORDscher Zahlsysteme in übersichtlicher Weise darstellen. Sei $\mathfrak{C}_k$ das von den hyperkomplexen Einheiten $i_1, i_2, \ldots, i_k$ mit den Relationen

$$i_p^2 + 1 = 0,\; i_p i_q + i_q i_p = 0 \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, k;\; p \neq q) \tag{4}$$

über dem Körper der reellen Zahlen erzeugte CLIFFORDsche System vom Rang 2^{k+1}. $\mathfrak{B}_k$ bezeichne die Menge der Vektoren

$$u = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_k i_k \quad (u_p \text{ reell})$$

in $\mathfrak{C}_k$. Jedem Punkt $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ des hyperbolischen Raumes entspricht umkehrbar eindeutig ein Vektor

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_k \cancel{i_k} \; i_k \tag{5}$$

mit positiver $(k+1)$-ter Komponente. Die eigentlichen Bewegungen des hyperbolischen Raumes stellen sich dann als linear gebrochene Vektortransformationen

$$x \to (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \tag{6}$$

[1]) K. Th. VAHLEN, Über Bewegungen und komplexe Zahlen, Math. Annalen 55 (1902), S. 585—593.

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta < \mathfrak{C}_{k-1}$ dar. Der Vorteil dieser Darstellung liegt in der Möglichkeit, diskontinuierliche Bewegungsgruppen durch arithmetische Forderungen auf einfache Art zu definieren.

Es folgt nun ein zusammenfassender Bericht über die in der vorliegenden Arbeit erzielten Ergebnisse.

In § 1 werden die Bedingungen präzisiert, unter denen Transformationen der Art (6) Bewegungen des hyperbolischen Raumes ergeben. Außerdem wird eine Reihe von Transformationsformeln bereitgestellt, die für die Theorie der automorphen Funktionen von Bedeutung sind. Dabei wird es sich im wesentlichen um ein Referat über Untersuchungen von K. Th. VAHLEN[1]) handeln, aus denen sich alles weitere sehr leicht ergibt.

In § 2 wird ein allgemeiner Zusammenhang zwischen automorphen Lösungen $f = f(x)$ der Wellengleichung (3) und DIRICHLETschen Reihen behandelt, über den ich an anderer Stelle[2]) bereits berichtet habe. Wir schicken voraus, daß die Vektortransformationen

$$x \to x + \alpha \text{ für } \alpha < \mathfrak{V}_{k-1}, \quad x \to -x^{-1}$$

hyperbolische Bewegungen darstellen. Sei $\mathfrak{t}$ ein fest gegebenes k-dimensionales Gitter von Vektoren aus $\mathfrak{V}_{k-1}$. Wir betrachten die Klasse der Funktionen $f(x)$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. $f(x)$ befriedigt die Wellengleichung (3) und ist in jedem Punkt des Teilraumes $x_k > 0$ regulär, d.h. zweimal stetig differenzierbar.
2. Gleichmäßig in $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ist

(I) $f(x) = O(x_k^{\varkappa_1})$ für $x_k \to \infty$, $f(x) = O(x_k^{-\varkappa_2})$ für $x_k \to 0$

   mit gewissen positiven Konstanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$.
3. Es ist $f(x + \alpha) = f(x)$ für $\alpha < \mathfrak{t}$.
4. Es gilt die Transformationsformel $f(-x^{-1}) = f(x)$.

Die drei ersten Forderungen ziehen für $f(x)$ eine FOURIERentwicklung der Art

$$f(x) = u(x_k) + \sum_{\substack{\beta < \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)\, x_k^{\frac{k}{2}} K_{i\nu}(2\pi|\beta|x_k)\, e^{2\pi i \,\Re e(\beta x)} \tag{7}$$

nach sich. Hierin wird über alle von 0 verschiedenen Vektoren β eines k-dimensionalen Gitters $\mathfrak{s} < \mathfrak{V}_{k-1}$ summiert, welches durch $\mathfrak{t}$ eindeutig bestimmt ist. Ferner bezeichnet $|\beta|$ die Länge des Vektors β, $\Re e\, a$ all-

[1]) Siehe S. 73 Anm. 1.

[2]) H. MAASS, Über automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von DIRICHLETschen Reihen durch Funktionalgleichungen, Bericht über die Math.-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. Sept. 1946 (herausgeg. v. Math. Inst. d. Univ. Tübingen), S. 100—102.

gemein den Realteil des Elements $a < \mathfrak{C}_k$ und $K_\nu(z)$ die BESSELsche Funktion zu „rein imaginärem Argument", die der Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0$$

genügt und für $z \to \infty$ das asymptotische Verhalten

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}$$

zeigt. Zur Abkürzung ist schließlich

$$(8) \qquad u(x_k) = \begin{cases} a_1 x_k^{\frac{k}{2}+ir} + a_2 x_k^{\frac{k}{2}-ir} & \text{für } r \neq 0, \\ a_1 x_k^{\frac{k}{2}} + a_2 x_k^{\frac{k}{2}} \log x_k & \text{für } r = 0 \end{cases}$$

mit konstanten a_1, a_2 gesetzt worden.

Die Fälle $k = 1$ und $k > 1$ sind unterschiedlich zu behandeln. Da der erstere in [1]) vollständig diskutiert worden ist, kann nunmehr $k > 1$ vorausgesetzt werden. Allgemein bezeichne $\beta' = b_0 - b_1 i_1 - \cdots - b_{k-1} i_{k-1}$ den zu $\beta = b_0 + b_1 i_1 + \cdots + b_{k-1} i_{k-1}$ konjugierten Vektor und $P_n(\beta) = P_n(b_0, b_1, \ldots, b_{k-1})$ eine beliebige Kugelfunktion n-ter Ordnung in k Veränderlichen[2]); außerdem setzen wir $P_0(\beta) = 1$. Die zu $P_n(\beta)$ konjugierte Kugelfunktion $P_n'(\beta)$ erklären wir durch $P_n'(\beta) = P_n(\beta')$. Ferner sei für $y > 0$

$$(9) \quad F_n(y, P_n) = u_n(y) + \sum_{\substack{\beta < \mathfrak{I} \\ \beta \neq 0}} a(\beta) P_n(\beta)\, y^{\frac{k}{2}+n} K_{ir}(2\pi |\beta| y) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit

$$(10) \qquad u_n(y) = \begin{cases} u(y) & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Es bestehen dann die mit $f(-x^{-1}) = f(x)$ gleichwertigen Funktionalgleichungen

$$(11) \qquad F_n\left(\frac{1}{y}, P_n\right) = (-1)^n F_n(y, P_n')$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und alle Kugelfunktionen P_n in k Veränderlichen. Die Äquivalenz dieser Aussagen beruht auf einem Identitätssatz über Wellenfunktionen, der folgendes besagt: Eine für $x_k > 0$ reguläre Lösung $g(x)$ der Wellengleichung (3) verschwindet genau dann identisch, wenn sie auf der komplexen Mannigfaltigkeit $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2 = 0$ verschwindet, wobei zu berücksichtigen ist, daß $g(x)$ als Lösung der

---

[1]) Siehe S. 72 Anm. 1.

[2]) Siehe etwa E. HECKE, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Dansk. Vidensk. Selsk. Mathem.-fys. Meddel. XVII, 12 (Köbenhavn 1940), § 5.

elliptischen Differentialgleichung (3) analytischen Charakter hat, also ins Komplexe fortgesetzt werden kann.

Wir vollziehen den Übergang zu den DIRICHLETreihen mit Hilfe der MELLINtransformation. Es zeigt sich dann, daß die durch

$$4\int_0^\infty \Big(F_n(y,P_n)-u_n(y)\Big)y^{2s-n-\frac{k}{2}-1}\,dy = \pi^{-2s}\,\Gamma\Big(s+\frac{ir}{2}\Big)\Gamma\Big(s-\frac{ir}{2}\Big)\varphi(s,P_n) \tag{12}$$

erklärten analytischen Funktionen $\varphi(s, P_n)$ folgenden Bedingungen genügen:

1. $\left(s-\frac{k+ir}{2}\right)\left(s-\frac{k-ir}{2}\right)\varphi(s,P_0)$ und $\varphi(s,P_n)$ für $n>0$ sind ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.

2. Es gelten die Funktionalgleichungen

(II) (13) $$\xi\Big(\frac{k}{2}+n-s,P_n\Big)=(-1)^n\xi(s,P_n') \quad \text{für } n\geqq 0,$$

wenn

$$\xi(s,P_n)=\pi^{-2s}\,\Gamma\Big(s+\frac{ir}{2}\Big)\Gamma\Big(s-\frac{ir}{2}\Big)\varphi(s,P_n) \tag{14}$$

gesetzt wird.

3. Die Funktionen $\varphi(s, P_n)$ sind in DIRICHLETreihen der Art

$$\varphi(s,P_n)=\sum_{\substack{\beta\subset\mathfrak{s}\\ \beta\neq 0}}\frac{a(\beta)P_n(\beta)}{|\beta|^{2s}} \tag{15}$$

entwickelbar. Für eine hinreichend große Konstante $\varkappa$ ist

$$a(\beta)=O(|\beta|^{\varkappa}) \quad \text{für} \quad |\beta|\to\infty.$$

Umgekehrt entspricht aber auch jedem derartigen System von Funktionen $\varphi(s, P_n)$ eindeutig eine automorphe Funktion $f(x)$ der oben beschriebenen Klasse. Die Koeffizienten a_1, a_2 in $u(y)$ sind so zu bestimmen, daß für $r\neq 0$ bzw. $r=0$

$$\varphi(s,P_0)-\frac{2a_1}{M_r\left(s-\frac{k+ir}{2}\right)}-\frac{2a_2}{M_{-r}\left(s-\frac{k-ir}{2}\right)} \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi(s,P_0)-\left[\frac{2a_1}{M_0}-\frac{2a_2}{M_0}\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}-\log\pi\right)\right]\frac{1}{s-\frac{k}{2}}-\frac{a_2}{M_0\left(s-\frac{k}{2}\right)^2} \tag{16}$$

eine ganze Funktion von s wird. Dabei ist allgemein

$$M_r=\pi^{-k-ir}\,\Gamma\Big(\frac{k}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}+ir\Big)$$

gesetzt worden.

Eine Verallgemeinerung dieses Resultats auf Systeme von automorphen Funktionen, die sich bezüglich der Transformationen $x \to -x^{-1}$ und $x \to x + \alpha$ ($\alpha < \mathfrak{t}$) untereinander umsetzen, ist ähnlich wie in [1]) möglich. Ich begnüge mich (in § 3) mit der Durchrechnung eines Beispiels zu $k = 2$. Es handelt sich dabei um Zetafunktionen gewisser biquadratischer Zahlkörper im Zusammenhang mit Wellenfunktionen zu diskontinuierlichen Bewegungsgruppen vom PICARDschen Typus.

Zunächst legen wir eine Reihe von Bezeichnungen fest. Es sei:

$R(\sqrt{d})$ ein imaginärer quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante d,

K ein relativquadratischer Körper über $R(\sqrt{d})$ mit der Relativdifferente $\mathfrak{D}$ und der Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$,

$M \to M'$ der von der Identität verschiedene Automorphismus von K, der $R(\sqrt{d})$ festläßt,

$n(\mu)$ die Absolutnorm und $s(\mu)$ die Absolutspur von $\mu < R(\sqrt{d})$,

$N(M)$ die Absolutnorm und $S(M)$ die Absolutspur von $M < K$,

$\mathfrak{A}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal aus K,

A eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal aus $R(\sqrt{d})$,

m eine ganze rationale Zahl,

$\mathfrak{F}$ ein durch $\mathfrak{b}\mathfrak{D}$ teilbares Hilfsideal $< K$ mit folgender Eigenschaft: Die Gruppe der im Zahlstrahl mod $\mathfrak{F}$ liegenden Einheiten $E < K$ ist zyklisch und besitzt eine Erzeugende $E_{\mathfrak{F}}$ mit

$$E_{\mathfrak{F}} E'_{\mathfrak{F}} = 1, \qquad |E_{\mathfrak{F}}| > 1.$$

Ferner setzen wir voraus, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ ein Hauptideal wird:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \left(\frac{\omega}{\sqrt{d}}\right), \qquad \omega < R(\sqrt{d}). \tag{17}$$

Die in § 3 durchgeführten Rechnungen beziehen sich auf das System der Zetafunktionen

$$\begin{aligned}\zeta_m(s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) &= \sum_{\substack{M \equiv A (\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \\ M \neq 0,\ (M)_{\mathfrak{F}}}} \left(\frac{M M'}{\omega}\right)^m n\left(\frac{M M'}{\omega}\right)^{-s} \text{ für } m \geqq 0, \\ \zeta_{-m}(s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) &= \sum_{\substack{M \equiv A (\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \\ M \neq 0,\ (M)_{\mathfrak{F}}}} \left(\frac{\overline{M M'}}{\overline{\omega}}\right)^m n\left(\frac{M M'}{\omega}\right)^{-s} \text{ für } m \geqq 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Der Zusatz $(M)_{\mathfrak{F}}$ bedeutet hierin, daß aus jeder auftretenden Schar mod $\mathfrak{F}$ assoziierter Zahlen jeweils nur eine Zahl in die Summe eingeht. Mit Hilfe von Thetareihen wird bewiesen, daß die durch (18) definierten Funktionen ganze Funktionen von s sind, wenn nicht zugleich $m = 0$ und $A \equiv 0 (\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})$ ist. $\zeta_0(s, 0,; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ ist überall regulär bis auf einen

[1]) Siehe S. 72 Anm. 1.

Pol erster Ordnung in $s = 1$. Außerdem ergeben sich die Funktionalgleichungen

(19)
$$\xi_m(1 + |m| - s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0(\mathfrak{A})}} e^{2\pi i S \frac{AB'}{\omega}} \xi_{-m}(s, B; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$

für alle m, wenn

(20) $$\xi_m(s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = (2\pi)^{-2s}(\Gamma(s))^2 \zeta_m(s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$

gesetzt wird.

Das bei der Darstellung der Bewegungen des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes zu verwendende CLIFFORDsche System $\mathfrak{C}_2$ besteht aus den Quaternionen über dem Körper der reellen Zahlen. Wir übernehmen die übliche Bezeichnung, indem wir

$$i_1 = i, \quad i_2 = j, \quad i_1 i_2 = k$$

setzen. Eine Transformation

$$x \to (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \qquad (x = x_0 + x_1 i + x_2 j)$$

mit komplexen Koeffizienten α, β, γ, δ stellt immer dann eine hyperbolische Bewegung dar, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Sei nun

(21) $$f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) =$$
$$\delta\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) x_2 \log|E_{\mathfrak{F}}| + \sum_{\substack{M \equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \\ M \neq 0,\ (M)_{\mathfrak{F}}}} x_2 K_0\left(4\pi\left|\frac{MM'}{\omega}\right| x_2\right) e^{2\pi i s\left(\frac{MM'}{\omega}(x_0 + i x_1)\right)}$$

und hierin

(22) $$\delta\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) = \begin{cases} 1 \text{ für } A \equiv 0(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}), \\ 0 \text{ für } A \equiv 0(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}). \end{cases}$$

Die Spur $s\left(\frac{MM'}{\omega}(x_0 + i x_1)\right)$ ist sinnvoll erklärt, indem wir die Definition $s(\mu) = \mu + \bar{\mu}\,(\mu < R(\sqrt{d}))$ auf beliebige komplexe Zahlen μ erweitern. Auf Grund der allgemeinen Theorie erweisen sich die Funktionalgleichungen (19) als gleichwertig mit den Transformationsformeln

(23) $$f(-x^{-1}, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0(\mathfrak{A})}} e^{2\pi i S \frac{AB'}{\omega}} f(x, B; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}).$$

Eine formale Rechnung, die völlig in den von E. HECKE[1]) vorgezeichneten Bahnen verläuft, ergibt schließlich die Invarianz der Wellenfunktionen (21) gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ zur Idealstufe $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$:

[1]) E. HECKE, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1927), S. 210—242. — S. auch M. SUGAWARA, On the theory of modular functions of two variables, Japan. J. Math. 12, S. 133—150.

$$f((\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)^{-1}, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$
$$\text{für } \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathfrak{b}\mathfrak{d}), \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1\,. \tag{24}$$

Das vorliegende Resultat hat eine vorwiegend funktionentheoretische Bedeutung: Wir erhalten automorphe Funktionen zu diskontinuierlichen Bewegungsgruppen vom PICARDschen Typus, die sich auf einfache Art, nämlich als Lösungen einer partiellen Differentialgleichung (Wellengleichung) charakterisieren lassen.

Reihen vom Typus

$$\sum_{\mu_1,\,\mu_2} \frac{x_2}{|\mu_1 x+\mu_2|^{2s}},$$

die ein den EISENSTEINreihen analoges Bildungsgesetz aufweisen und die sich in die Theorie der Wellenfunktionen auf natürliche Art einordnen lassen (vgl.[1]), sind zum erstenmal von R. FUETER[2]) betrachtet worden.

Zum Schluß möchte ich noch auf einige Begriffsbildungen hinweisen, die sich aus der Theorie der harmonischen Differentialformen auf RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten für die automorphen hyperkomplexen Funktionen ergeben.

Über einer $(k+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$ mit den Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_k$ und gegebener Metrik betrachten wir hyperkomplexe Funktionen

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x)i_1 + u_2(x)i_2 + \cdots + u_k(x)i_k \qquad (u_p(x) \text{ reell})$$

der hyperkomplexen Variablen

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_k i_k.$$

Jede homogene lineare Differentialform Θ über $\mathfrak{R}$ gestattet eine Darstellung der Art

$$\Theta = \mathfrak{Re}(f(x)\,dx).$$

Seien $\tilde{\Theta}$ und $\widetilde{dx}$ die den Formen Θ und dx adjungierten alternierenden Differentialformen k-ten Grades, so daß

$$\tilde{\Theta} = \mathfrak{Re}(f(x)\,\widetilde{dx})$$

wird. Sind $\tilde{\Theta}$ und Θ integrabel:

$$d\Theta = d\tilde{\Theta} = 0, \tag{25}$$

so heißt Θ harmonisch[3]).

[1]) Siehe S. 72 Anm. 1.

[2]) R. FUETER, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind, Crelle Journal 157 (1927), S. 66—78.

[3]) S. etwa G. de RHAM, Über mehrfache Integrale, Hamburger Abh. 12 (1938), S. 313—339, und die [illegible] zitierte Literatur.

Für den euklidischen Raum mit der metrischen Grundform

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_k^2$$

ergeben sich aus (25) für die Komponenten von $f(x)$ die Bedingungen

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_0} = \frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0 \text{ für } 0 < p,\ q \leqq k \\ &\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \cdots - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0\,. \end{aligned}$$

Der Fall $k = 3$ führt also auf die Quaternionenfunktionen, die nach R. Fueter[1]) als links- und rechtsregulär zu bezeichnen sind.

Legen wir den hyperbolischen Raum mit der Grundform (2) zugrunde, dann erhalten wir an Stelle von (26) das System

$$(27) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_0} = \frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0 \text{ für } 0 < p,\ q \leqq k \\ &\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{u_0}{x_k^{k-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_1}{x_k^{k-1}}\right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{u_k}{x_k^{k-1}}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Wir wollen $f(x)$ kurz analytisch nennen, wenn die Komponenten von $f(x)$ den Differentialgleichungen (27) genügen. Sei nun Θ bezüglich einer gegebenen diskontinuierlichen Gruppe von Bewegungen der Art (6) invariant:

$$\mathfrak{Re}(f(y)\,dy) = \mathfrak{Re}(f(x)\,dx) \text{ für } y = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1}.$$

Beachtet man, daß $dy = (x\gamma^* + \delta^*)^{-1}\,dx(\gamma x + \delta)^{-1}$ ist ($\mu \to \mu^*$ bezeichnet eine in §1 angegebene invers-isomorphe Abbildung von $\mathfrak{C}_{k-1}$ auf sich.) und allgemein $\mathfrak{Re}(ab) = \mathfrak{Re}(ba)$ für $a, b < \mathfrak{C}_k$ gilt, so folgt

$$\mathfrak{Re}((\gamma x + \delta)^{-1} f(y)(x\gamma^* + \delta^*)^{-1}\,dx) = \mathfrak{Re}(f(x)\,dx)$$

und daher $(\gamma x + \delta)^{-1} f(y)(x\gamma^* + \delta^*)^{-1} = f(x)$ oder

$$f(y) = (\gamma x + \delta) f(x)(x\gamma^* + \delta^*)\,.$$

Offenbar liegt hier eine Verallgemeinerung des Begriffs der (komplexwertigen analytischen) automorphen Form von der Dimension -2 auf den hyperkomplexen Fall vor. Aus der Theorie der harmonischen Differentialformen ergibt sich somit ein sinnvoller Ansatz zur Bildung von hyperkomplexen analytischen automorphen Formen.

§ 1. Bewegungen des hyperbolischen Raumes

Sei $\mathfrak{C}_k$ das von den hyperkomplexen Einheiten $i_1, i_2, \ldots, i_k$ über dem Körper der reellen Zahlen erzeugte Cliffordsche System. Es besteht aus den Elementen

$$a = a_0 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq k} a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}\, i_{\nu_1} i_{\nu_2} \ldots i_{\nu_p}\,.$$

[1]) R. Fueter, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen, Commentarii mathematici Helvetici 7 (1934), S. 307—330.

Die Koeffizienten $a_0, a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}$ sind reell und durch a eindeutig bestimmt.

$$a' = a_0 + \sum_{p=1}^{k} (-1)^p \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq k} a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p} i_{\nu_1} i_{\nu_2} \cdots i_{\nu_p}$$

heißt das zu a konjugierte Element. Offenbar ist

$$(a + b)' = a' + b', \ (a b)' = a' \cdot b',$$

d.h. $a \to a'$ stellt einen Automorphismus von $\mathfrak{C}_k$ dar. Eine inversisomorphe Abbildung wird durch die Zuordnung

$$a \to \bar{a} = a_0 + \sum_{p=1}^{k} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq k} a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p} i_{\nu_1} i_{\nu_2} \cdots i_{\nu_p}$$

definiert; d.h. es ist

$$\overline{(a + b)} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{(a b)} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

Unter dem Betrag von a verstehen wir die reelle, nicht negative Zahl

$$|a| = \left(a_0^2 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq k} a^2_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein von 0 verschiedenes Element a aus $\mathfrak{C}_k$ heißt ein Transformator, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung $x \to y$ der in $\mathfrak{C}_k$ gelegenen Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{V}_k$ auf sich gibt, sodaß

$$a x = y a' \text{ für alle } x < \mathfrak{V}_k$$

gilt. Die nun folgenden Sätze, die hier ohne Beweis mitgeteilt werden, sind der zitierten Arbeit[1]) von K. Th. VAHLEN entnommen.

Die Transformationen in $\mathfrak{C}_k$ bilden eine multiplikative Gruppe, welche die von 0 verschiedenen Vektoren aus $\mathfrak{C}_k$ enthält und von diesen erzeugt wird. Das Element $a = \alpha + \beta i_k$ mit $\alpha, \beta < \mathfrak{C}_{k-1}$ stellt dann und nur dann einen Transformator dar, wenn α, β Transformatoren aus $\mathfrak{C}_{k-1}$ sind (sofern sie nicht verschwinden), $\bar{\beta}\alpha$ in $\mathfrak{V}_{k-1}$ liegt und α, β nicht gleichzeitig verschwinden. Für Transformatoren a gilt $a\bar{a} = |a|^2$, also $a^{-1} = \bar{a}|a|^{-2}$.

Sei G die Menge der Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} a & b' \\ b & a' \end{pmatrix}, \tag{28}$$

die folgenden Bedingungen genügen:

(29)
1. a ist ein Transformator aus $\mathfrak{C}_k$, desgleichen b, falls $b \neq 0$ ist,
2. $b\bar{a} < \mathfrak{V}_k$,
3. $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$.

G stellt eine Gruppe dar. Man bestätigt sofort, daß

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$$

---

[1]) Siehe S. 73 Anm. 1.

ist und in G liegt. Es bleibt also noch zu beweisen, daß G mit S_1, S_2 auch $S_3 = S_1 S_2$ enthält. Die Eigenschaften 1. und 2. übertragen sich von S_1, S_2 auf S_3, wie in [1]) festgestellt wurde. Schließlich wird, wenn wir

$$S_p = \begin{pmatrix} a_p & b_p' \\ b_p & a_p' \end{pmatrix} \qquad (p = 1, 2, 3)$$

setzen, woraus $a_3 = a_1 a_2 + b_1' b_2$, $\quad b_3 = b_1 a_2 + a_1' b_2$ folgt,

$$\begin{aligned} a_3 \bar{a}_3 - b_3 \bar{b}_3 &= (a_1 a_2 + b_1' b_2)(\bar{a}_2 \bar{a}_1 + \bar{b}_2 \bar{b}_1') - (b_1 a_2 + a_1' b_2)(\bar{a}_2 \bar{b}_1 + \bar{b}_2 \bar{a}_1') \\ &= (|a_1|^2 - |b_1|^2)(|a_2|^2 - |b_2|^2) + a_1 a_2 \bar{b}_2 \bar{b}_1' + b_1' b_2 \bar{a}_2 \bar{a}_1 - b_1 a_2 \bar{b}_2 \bar{a}_1' \\ &\qquad - a_1' b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_1 = 1; \end{aligned}$$

denn wegen $b_1 \bar{a}_1$, $b_2 \bar{a}_2 < \mathfrak{V}_k$ ist

$$c = a_1' b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_1 = (a_1' b_2 \bar{a}_2 a_1^{-1}) a_1 \bar{b}_1$$

ein Produkt von zwei Vektoren, also

$$a_1 a_2 \bar{b}_2 \bar{b}_1' + b_1' b_2 \bar{a}_2 \bar{a}_1 - b_1 a_2 \bar{b}_2 \bar{a}_1' - a_1' b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_1 = c' + \bar{c}' - \bar{c} - c = 0.$$

Den Matrizen (28) aus G entsprechen Vektortransformationen

$$(30) \qquad v = (a u + b')(b u + a')^{-1} \qquad (u, v < \mathfrak{V}_k),$$

die das Innere der $(k+1)$-dimensionalen Einheitskugel $|u| < 1$ in sich überführen. Diese Transformationen bilden eine Gruppe G_0, die der Faktorgruppe von G nach der Untergruppe, bestehend aus den Matrizen $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, isomorph ist. G_0 ist die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen.

Die Einheitskugel $|u| < 1$ wird durch die Vektortransformation

$$\begin{aligned} x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_k i_k &= (u + i_k)(i_k u + 1)^{-1} \\ &= \frac{(u + i_k)\overline{(i_k u + 1)}}{|i_k u + 1|^2} = \frac{(1 - |u|^2) i_k + u - i_k \bar{u} i_k}{|u - i_k|^2} \end{aligned}$$

auf den Halbraum $x_k > 0$ abgebildet; denn offenbar ist

$$x_k = \frac{1 - |u|^2}{|u - i_k|^2}.$$

Man stellt sofort fest, daß auch $x = (u i_k + 1)^{-1}(u + i_k)$ gilt, und gewinnt hieraus die inverse Transformation

$$u = (x - i_k)(-i_k x + 1)^{-1}.$$

Für die auf den Halbraum $x_k > 0$ bezogenen hyperbolischen Bewegungen ergibt sich also die Darstellung

$$(32) \qquad y = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1}$$

mit

$$(33) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i_k \\ i_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b' \\ b & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i_k \\ -i_k & 1 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Siehe S. 73 Anm. 1.

Die Elemente a, b genügen den Bedingungen (29). Der Normierungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist für die Transformation (32) natürlich unerheblich. Gleichwertig mit (33) ist

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i_k \\ i_k & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & i_k \\ i_k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b' \\ b & a'\end{pmatrix}$$

oder

$$\text{(34)} \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta i_k &= a + i_k b, & \gamma + \delta i_k &= i_k a + b, \\ \alpha - \beta i_k &= i_k a' i_k + b' i_k, & \gamma - \delta i_k &= a' i_k + i_k b' i_k, \end{aligned}$$

woraus zu ersehen ist, daß α, β, γ, δ in $\mathfrak{C}_{k-1}$ liegen. Wir beweisen nun die Äquivalenz der Bedingungen (29) mit den folgenden:

1. Die von 0 verschiedenen unter den Elementen α, β, γ, δ sind Transformatoren in $\mathfrak{C}_{k-1}$,

(35) 2. $\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\gamma}\delta < \mathfrak{B}_{k-1}$,

3. $\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma} = 1$.

Sei a, b ein Elementepaar, welches den Bedingungen (29) genügt. Aus

$$\alpha + \beta i_k = i_k(-i_k + b a^{-1}) a, \quad \gamma + \delta i_k = (i_k + b a^{-1}) a$$

folgt dann, daß auch $\alpha + \beta i_k$, $\gamma + \delta i_k$ Transformatoren sind. Die ersten beiden Bedingungen von (35) ergeben sich nun aus einem allgemeinen oben zitierten Satz über Transformatoren. Ferner ist nach (34)

$$(\alpha + \beta i_k)\overline{(\gamma + \delta i_k)} = (a + i_k b)\overline{(i_k a + b)},$$

also

$$\text{(36)} \qquad \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} - i_k(\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma}) = a\bar{b} - i_k b \bar{a} i_k + i_k b \bar{b} - a\bar{a} i_k,$$

woraus

$$\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma} = a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

erhellt; denn $a\bar{b} - i_k b\bar{a} i_k$ liegt in $\mathfrak{B}_{k-1}$.

Sei umgekehrt α, β, γ, δ ein Elementesystem, welches den Bedingungen (35) genügt. Ersichtlich ist

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'\delta &= \bar{\beta}'(\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma})\delta = (\bar{\beta}'\alpha')(\bar{\delta}\delta) - (\bar{\beta}'\beta')(\bar{\gamma}\delta) < \mathfrak{B}_{k-1}, \\ \bar{\alpha}'\gamma &= \bar{\alpha}'(\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma})\gamma = (\bar{\alpha}'\alpha')(\bar{\delta}\gamma) - (\bar{\alpha}'\beta')(\bar{\gamma}\gamma) < \mathfrak{B}_{k-1}, \end{aligned}$$

d. h. $\beta\bar{\delta}$ und $\alpha\bar{\gamma}$ liegen in $\mathfrak{B}_{k-1}$. Demnach ist

$$\text{(37)} \qquad (\alpha + \beta i_k)\overline{(\gamma + \delta i_k)} = \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} - i_k(\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma}) < \mathfrak{B}_k.$$

Wir lösen (34) nach a, b auf:

$$\begin{aligned} 2a &= (\alpha + \beta i_k) - i_k(\gamma + \delta i_k) = [(\alpha + \beta i_k)(\gamma + \delta i_k)^{-1} - i_k](\gamma + \delta i_k), \\ 2b &= -i_k(\alpha + \beta i_k) + (\gamma + \delta i_k) = [-i_k + (\gamma + \delta i_k)(\alpha + \beta i_k)^{-1}](\alpha + \beta i_k). \end{aligned}$$

Die vorgenommene Umformung ist erlaubt, da $\alpha + \beta i_k$, $\gamma + \delta i_k$ Transformatoren sind, also inverse Elemente besitzen. Nunmehr sind auch die Elemente a, b als Transformatoren erkennbar, sofern sie nicht verschwinden. Die zweite der Bedingungen (29) ergibt sich aus

$$4b\bar{a} = -i_k(\alpha+\beta i_k)\overline{(\alpha+\beta i_k)} + (\gamma+\delta i_k)\overline{(\gamma+\delta i_k)}i_k - i_k(\alpha+\beta i_k)\overline{(\gamma+\delta i_k)}i_k + (\gamma+\delta i_k)\overline{(\alpha+\beta i_k)}$$

und (37). Aus (36) ist damit auch $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ zu schließen, q. e. d.

Gleichwertig mit $\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\gamma}\delta < \mathfrak{V}_{k-1}$, $\alpha'\bar{\delta} - \beta'\bar{\gamma} = 1$ sind die Bedingungen $\beta\alpha^*$, $\delta\gamma^* < \mathfrak{V}_{k-1}$, $\alpha\delta^* - \beta\gamma^* = 1$, wenn wir allgemein

$$\mu^* = \bar{\mu}' \text{ für } \mu < \mathfrak{C}_{k-1}$$

setzen. Die Zuordnung $\mu \to \mu^*$ definiert eine invers-isomorphe Abbildung, d. h. es gilt

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*, \; (\mu\nu)^* = \nu^*\mu^*.$$

Für jeden Vektor μ ist $\mu^* = \mu$; insbesondere wird daher

$$\beta\alpha^* = \alpha\beta^*, \; \gamma\delta^* = \delta\gamma^*, \; \alpha^*\gamma = \gamma^*\alpha, \; \beta^*\delta = \delta^*\beta.$$

Außerdem gilt

$$\alpha\delta^* - \beta\gamma^* = \delta^*\alpha - \beta^*\gamma = 1;$$

denn es ist

$$|\delta|^2 = \delta^*(\alpha\delta^* - \beta\gamma^*)\bar{\delta}^* = (\delta^*\alpha)\,|\delta|^2 - (\beta^*\delta)(\bar{\delta}\gamma) = (\delta^*\alpha - \beta^*\gamma)\,|\delta|^2,$$

woraus in der Tat $\delta^*\alpha - \beta^*\gamma = 1$ folgt.

Eine gegebene hyperbolische Bewegung

$$y = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1},$$

die sich auch auf die Form

$$y = (x\gamma^* + \delta^*)^{-1}(x\alpha^* + \beta^*)$$

bringen läßt, wenden wir auf zwei beliebige Punkte (Vektoren) x_1 und x_2 an. y_1 und y_2 seien die entsprechenden Bildpunkte. Für die Differenz $y_2 - y_1$ ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (x_2\gamma^* + \delta^*)^{-1}(x_2\alpha^* + \beta^*) - (\alpha x_1 + \beta)(\gamma x_1 + \delta)^{-1} \\ &= (x_2\gamma^* + \delta^*)^{-1}[(x_2\alpha^* + \beta^*)(\gamma x_1 + \delta) - (x_2\gamma^* + \delta^*)(\alpha x_1 \\ &\qquad + \beta)](\gamma x_1 + \delta)^{-1} \\ &= (x_2\gamma^* + \delta^*)^{-1}(x_2 - x_1)(\gamma x_1 + \delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Speziell für

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_{k-1}i_{k-1} + x_k i_k, \\ x_2 &= x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_{k-1}i_{k-1} - x_k i_k \end{aligned}$$

entnehmen wir hieraus

$$y_k = \frac{x_k}{|\gamma x + \delta|^2}, \tag{38}$$

wenn wir mit y_k die $(k+1)$-te Komponente von y bezeichnen. Außerdem erhalten wir noch

$$dy = (x\gamma^* + \delta^*)^{-1}\,dx(\gamma x + \delta)^{-1} \text{ sowie } |dy| = \frac{|dx|}{|\gamma x + \delta|^2}. \tag{39}$$

Offenbar ist $\frac{|dx|}{x_k} = \frac{|dy|}{y_k}$, also

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{x_k^2} \tag{40}$$

die metrische Grundform des hyperbolischen Raumes.

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 1. *Die Transformationen*

$$x \to (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \quad (x < \mathfrak{B}_k)$$

bilden den Halbraum $x_k > 0$ auf sich ab und lassen

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{x_k^2}$$

invariant, wenn

1. *die von 0 verschiedenen unter den Elementen α, β, γ, δ Transformatoren in $\mathfrak{C}_{k-1}$ sind,*
2. *$\beta\alpha^*$ und $\delta\gamma^*$ in $\mathfrak{B}_{k-1}$ liegen und*
3. *$\alpha\delta^* - \beta\gamma^* = 1$ ist.*

Die Gesamtheit dieser Transformationen stellt eine Gruppe dar.

Für $k \leqq 4$ ist $\mu^* = \mu$, $\mu < \mathfrak{C}_{k-1}$ mit $\mu < \mathfrak{B}_{k-1}$ gleichwertig, so daß in diesen Fällen die Forderungen 2. und 3. von Satz 1 durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

ersetzt werden können. Diese Matrizenbedingung charakterisiert die hyperbolischen Bewegungen vollständig, sobald $k \leqq 3$ ist; denn alle Elemente in $\mathfrak{C}_{k-1}$ $(k \leqq 3)$ außer 0 sind Transformatoren.

Die Bewegungen des vierdimensionalen hyperbolischen Raumes lassen sich bekanntlich als linear gebrochene Transformationen einer Quaternionenvariablen $\xi < \mathfrak{C}_2$ darstellen. Ein Zusammenhang mit der in Satz 1 beschriebenen Darstellung kann in folgender Weise hergestellt werden: Mit Hilfe der idempotenten Zentrumselemente

$$e_1 = \frac{1 - i_1 i_2 i_3}{2}, \qquad e_2 = \frac{1 + i_1 i_2 i_3}{2}$$

zerlegen wir $\mathfrak{C}_3$ in die direkte Summe

$$\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_2 e_1 + \mathfrak{C}_2 e_2.$$

$\mathfrak{C}_3$ besteht also aus den Elementen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 < \mathfrak{C}_2.$$

Das Quaternionenpaar α_1, α_2 ist durch a eindeutig bestimmt. Auf Grund der Relationen

$$e_1^2 = e_1, \; e_2^2 = e_2, \; e_1 e_2 = 0, \; 1 = e_1 + e_2$$

erweist sich die Abbildung $a \to \alpha_1$ als ein Homomorphismus von $\mathfrak{C}_3$ auf $\mathfrak{C}_2$, der die Einheiten i_1, i_2, i_3 in i_1, i_2, $i_1 i_2$ überführt und das Teilsystem

$\mathfrak{C}_2$ in $\mathfrak{C}_3$ elementweise festläßt. Wir bezeichnen ihn mit σ. Ein zu a inverses Element existiert dann und nur dann, wenn α_1 und α_2 nicht verschwinden. Auf die Gleichung

$$y = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta < \mathfrak{C}_2;\ y,\ x < \mathfrak{B}_3),$$

die eine hyperbolische Bewegung von der in Satz 1 angegebenen Art darstellen möge, wenden wir den Homomorphismus σ an. Es ergibt sich

$$\eta = (\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta)^{-1}$$

mit

$$\xi = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_1 i_2, \qquad \eta = y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_1 i_2,$$

wenn

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3, \qquad y = y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3$$

gesetzt wird; denn α, β, γ, δ bleiben bezüglich σ fest. Damit ist der gewünschte Zusammenhang gewonnen.

Im folgenden Paragraphen nehmen wir gelegentlich eine Erweiterung von $\mathfrak{C}_k$ vor, indem wir auch (gewöhnliche) komplexe Zahlen als Koeffizienten zulassen. Wir setzen fest, daß die 2^{k+1} Elemente

$$1,\ i_1,\ \ldots,\ i_1 i_2,\ \ldots,\ i_1 i_2 i_3 \cdots i_k$$

auch in dem so erweiterten System unabhängig sind und eine Basis bilden.

§ 2. Automorphe Funktionen und Dirichletreihen

Sei $\mathfrak{t}$ ein gegebenes k-dimensionales Gitter von Vektoren aus $\mathfrak{B}_{k-1}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{t}$. Die durch

$$\mathfrak{Re}(\alpha_\mu \beta_\nu) = \delta_{\mu\nu} \text{ (KRONECKERsymbol) für } \mu, \nu = 1, 2, \ldots, k$$

bestimmten Vektoren $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ erzeugen ein k-dimensionales Gitter $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{B}_{k-1}$. $\mathfrak{s}$ besteht offenbar aus allen Vektoren $\beta < \mathfrak{B}_{k-1}$, für welche $\mathfrak{Re}(\alpha\beta) \equiv 0$ (1) ist, wie auch immer $\alpha < \mathfrak{t}$ gewählt wird. Analog läßt sich $\mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{s}$ charakterisieren, so daß auch $\mathfrak{s}$ vorgegeben werden kann.

Eine im Halbraum $x_k > 0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x) = f(x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_k i_k)$, die gegenüber den Schiebungen $x \to x + \alpha$ ($\alpha < \mathfrak{t}$) invariant ist, gestattet in $x_k > 0$ eine FOURIERentwicklung der Art

$$f(x) = \sum_{\beta < \mathfrak{s}} u(\beta, x_k) e^{2\pi i \mathfrak{Re}(\beta x)}.$$

Die noch von x_k abhängigen FOURIERkoeffizienten $u(\beta, x_k)$ berechnen sich nach der Formel

$$(42) \qquad u(\beta, x_k) = \frac{1}{V} \int\int_{\mathfrak{G}}\cdots\int f(x) e^{-2\pi i \mathfrak{Re}(\beta x)} dx_0 dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

Hierin wird über einen beliebigen Fundamentalbereich $\mathfrak{G}$ der Gruppe der Schiebungen $\beta < \mathfrak{s}$ integriert; V bezeichnet d[illegible]uklidischen Inhalt von $\mathfrak{G}$. Genügt $f(x)$ der Wellengleichung (3), dann ergeben sich für die Funktionen $u(\beta, x_k)$ Differentialgleichungen, die auf BESSELsche Funktionen führen. Man erhält mit konstanten $a(\beta)$, $b(\beta)$, a_1, a_2:

$$(43)\quad \begin{aligned} u(\beta, x_k) &= a(\beta)\, x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi|\beta|x_k) + b(\beta)\, I_{ir}(2\pi|\beta|x_k) \quad \text{für } \beta \neq 0, \\ u(0, x_k) = u(x_k) &= \begin{cases} a_1 x_k^{\frac{k}{2}+ir} + a_2 x_k^{\frac{k}{2}-ir} & \text{für } r \neq 0, \\ a_1 x_k^{\frac{k}{2}} + a_2 x_k^{\frac{k}{2}} \log x_k & \text{für } r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktionen $K_\nu(z)$ und $I_\nu(z)$ (in der Bezeichnung von G. N. WATSON[1])) stellen ein System von unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0$$

dar. Für $z \to \infty$ geht $K_\nu(z)$ exponentiell gegen 0 und $I_\nu(z)$ exponentiell gegen ∞. Sei nun gleichmäßig in $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ für eine hinreichend große Konstante $\varkappa_1$

$$(44)\qquad f(x) = O(x_k^{\varkappa_1}) \quad \text{für } x_k \to \infty;$$

dann ist aus (42) zu ersehen, daß I_{ir} in $u(\beta, x_k)$ nicht vorkommen kann. Demnach ist $b(\beta) = 0$ für $\beta \neq 0$; es liegt also eine Entwicklung von der Art (7) vor.

Eine Abschätzung der gewünschten Art ergibt sich für die Koeffizienten $a(\beta)$, wenn auch noch

$$(45)\qquad f(x) = O(x_k^{-\varkappa_2}) \text{ für } x_k \to 0$$

gleichmäßig in $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ für eine hinreichend große Konstante $\varkappa_2$ gefordert wird. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus

$$a(\beta)\, x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi|\beta|x_k) = \frac{1}{V}\int\!\!\int_{\mathfrak{G}}\cdots\int f(x)\, e^{-2\pi i\,\Re e(\beta x)}\, dx_0\, dx_1 \cdots dx_{k-1},$$

wenn wir hierin $x_k = \frac{c}{|\beta|}$ eintragen und die Konstante $c > 0$ so wählen, daß $K_{ir}(2\pi c) \neq 0$ ist,

$$(46)\qquad a(\beta) = O\left(|\beta|^{\varkappa_2 + \frac{k}{2}}\right) \quad \text{für } |\beta| \to \infty.$$

Wir benötigen nun den folgenden Identitätssatz über Wellenfunktionen:

Satz 2. *Sei $g(x)$ eine im reellen Halbraum $x_k > 0$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wellengleichung* (3). *Da die Differentialgleichung* (3) *von elliptischem Typus ist, kann $g(x)$ bekanntlich in eine volle komplexe Umgebung $\mathfrak{U}$ eines jeden Punktes des reellen Halbraumes $x_k > 0$ fortgesetzt werden, so daß $g(x)$ in $\mathfrak{U}$ eine reguläre analytische Funktion der komplexen Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ darstellt. $g(x)$ verschwindet*

---

[1]) G. N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922.

dann und nur dann identisch im reellen Halbraum $x_k > 0$, wenn für beliebige komplexe Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ mit verschwindender Quadratsumme ($a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 = 0$) und beliebiges reelles $x_k > 0$ die Bedingungen

$$(47) \quad \left[\frac{d^p}{dt^p}\, g\big((a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k\big)\right]_{t=0} = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind.

Um unter der Voraussetzung (47) zu beweisen, daß $g(x)$ bei vorgegebenem reellen $x_k > 0$ für alle reellen $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ verschwindet, genügt es, ein positives ε nachzuweisen, so daß $g(x)$ für alle komplexen $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ des Bereichs $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ verschwindet; denn zu den Funktionswerten $g(x)$ in den übrigen Punkten des reellen Halbraumes $x_k > 0$ gelangt man durch den Prozeß der analytischen Fortsetzung.

Wir wählen die positive Zahl ε so klein, daß sich $g(x)$ in dem komplexen Bereich $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ in eine Potenzreihe der Art

$$g(x) = \sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_{k-1} \geqq 0} A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{k-1}}(x_k)\, x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \cdots x_{k-1}^{\nu_{k-1}}$$

entwickeln läßt. Hierin fassen wir die Potenzprodukte p-ten Grades zu einem homogenen Polynom p-ten Grades zusammen; wir bezeichnen dieses mit $g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$, so daß

$$g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \quad \text{für } |x_i| < \varepsilon \ (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

wird. Sei $|t| < 1$. Aus

$$g\big((x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k\big) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) t^p$$

und (47) ersehen wir, daß alle Polynome $g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ für $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2 = 0$ verschwinden. Mithin sind alle $g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ durch $s = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2$ teilbar.

Wir führen den Beweis, daß $g(x)$ in dem komplexen Bereich $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ identisch verschwindet, indirekt, nehmen also an, daß nicht alle Polynome $g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = 0$ sind identisch in $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Sei s^q die größte Potenz von s, die sich aus allen Polynomen $g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ herausziehen läßt:

$$g_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = s^q h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \ (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen $g(x) = s^q h(x)$. Die Wellengleichung ergibt für $h(x)$ die Differentialgleichung

$$(4q(q-1)+2qk)h + 4q\sum_{i=0}^{k-1} x_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$$
$$+ s\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} - \frac{k-1}{x_k}\frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{r^2 + \frac{k^2}{4}}{x_k^2} h\right) = 0,$$

woraus erhellt, daß

$$(4q(q-1)+2qk)h + 4q\sum_{i=0}^{k-1} x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{48}$$

für $s = 0$ verschwindet. Aus der Homogenität der Polynome $h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ und der Zerlegung

$$h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$$

folgt

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{p=0}^{\infty} p h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Der Ausdruck (48) geht damit in die unendliche Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty} (4q(q-1) + 2qk + 4pq) h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$$

über. Die Tatsache, daß diese für $s = 0$ verschwindet, zieht die Teilbarkeit aller $h_p(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ durch s nach sich; denn es ist $q \geqq 1$ und daher der Koeffizient von h_p von 0 verschieden. Der Exponent q wäre demnach nicht maximal entgegen unserer Hypothese. Um den Widerspruch zu beheben, müssen wir annehmen, daß $g(x)$ für $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ identisch verschwindet. Satz 2 ist damit bewiesen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann die Reihe

$$f(x) = u(x_k) + \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta) x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi|\beta| x_k) e^{2\pi i \Re e(\beta x)} \tag{49}$$

der Transformationsformel $f(-x^{-1}) = f(x)$ genügt, d. h. wann $g(x) = f(-x^{-1}) - f(x)$ identisch verschwindet. Aus der Invarianz der Wellengleichung (3) gegenüber den hyperbolischen Bewegungen geht hervor, daß mit $f(x)$ auch $f(-x^{-1})$ und daher auch $g(x)$ eine Lösung von (3) darstellt. Sei nun $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ein System von komplexen Zahlen mit verschwindender Quadratsumme: $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 = 0$. Es wird dann für komplexe t mit hinreichend kleinem Betrag

$$g\big((a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k\big)$$
$$= f\left(\frac{(-a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k}{x_k^2}\right) - f\big((a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k\big),$$

also

$$(50) \quad \left[\frac{d^n}{dt^n} g\big((a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{k-1} i_{k-1})t + x_k i_k\big)\right]_{t=0}$$
$$= (-2\pi)^n \Big\{u_n\Big(\frac{1}{x_k}\Big) + \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)(\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{k-1} a_{k-1})^n x^{-\frac{k}{2} - 2n} K_{ir}\Big(2\pi|\beta|\frac{1}{x_k}\Big)\Big\}$$
$$- (2\pi)^n \Big\{u_n(x_k) + \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)(\beta_0 a_0 - \beta_1 a_1 - \cdots - \beta_{k-1} a_{k-1})^n x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi|\beta| x_k)\Big\}.$$

Hierin ist $\beta = \beta_0 + \beta_1 i_1 + \cdots + \beta_{k-1} i_{k-1}$ und

$$u_n(x_k) = \begin{cases} u(x_k) & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir noch, daß die Potenzen

$$(\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{k-1} a_{k-1})^n \qquad \text{mit } a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 = 0$$

eine Basis für die Kugelfunktionen n-ter Ordnung in k Veränderlichen bilden[1]), so ergibt sich nach Satz 2 für die Reihen (9) das mit $f(-x^{-1}) = f(x)$ äquivalente System der Funktionalgleichungen (11).

Um die Existenz des Integrals

$$(51) \qquad \xi(s, P_n) = 4\int_0^\infty \big(F_n(y, P_n) - u_n(y)\big) y^{2s - \frac{k}{2} - n - 1} dy$$

für hinreichend große Werte von $\Re s$ zu beweisen, müssen wir uns vergewissern, daß

$$F_n(y, P_n) - u_n(y) = O\big(y^{-\varkappa_2 - k}\big) \quad \text{für } y \to 0$$

ist. Aus der Darstellung

$$K_{ir}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + ir)} \int_0^\infty e^{-s} s^{ir - \frac{1}{2}} \Big(1 + \frac{s}{2z}\Big)^{ir - \frac{1}{2}} ds$$

erhalten wir durch eine rohe Abschätzung für reelles r und $z > 0$ die Ungleichung

$$|K_{ir}(z)| \leq C z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} \qquad \text{mit } C = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,|\Gamma(\frac{1}{2} + ir)|}.$$

Offenbar ist $P_n(\beta) = O(|\beta|^n)$ für $|\beta| \to \infty$. Ferner ist zu beachten, daß die Anzahl der Gittervektoren $\beta \subset \mathfrak{s}$ mit $p - 1 < |\beta| \leq p$ von der Größenordnung $O(p^{k-1})$ ist. Mit Hilfe von (46) kann dann in der Tat

---

[1]) Siehe S. 75 Anm. 2.

$$\begin{aligned} F_n(y, P_n) - u_n(y) &= \sum_{\substack{\beta \neq \mathfrak{s} \\ \beta \subset 0}} a(\beta)\, P_n(\beta)\, y^{\frac{k}{2}+n} K_{ir}(2\pi|\beta|y) \\ &= O\left(y^{\frac{k-1}{2}+n} \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} |\beta|^{\varkappa_2 + \frac{k-1}{2}+n} e^{-2\pi|\beta|y}\right) \\ &= O\left(y^{\frac{k-1}{2}+n} \sum_{p=1}^{\infty} p^{\varkappa_2 + 3\frac{k-1}{2}+n} e^{-2\pi p y}\right) = O\left(y^{-\varkappa_2 - k}\right) \text{ für } y \to 0 \end{aligned}$$

geschlossen werden. Damit ist die Existenz des Integrals (51) für $\Re s \geqq \frac{n+1+\varkappa_2}{2} + \frac{3k}{4}$ gesichert. Gliedweise Integration, die, wie man sich leicht überlegt, im vorliegenden Fall zulässig ist, ergibt für diese s

$$\begin{aligned} \xi(s, P_n) &= 4\int_0^\infty \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta) P_n(\beta) y^{\frac{k}{2}+n} K_{ir}(2\pi|\beta|y) \;\; y^{2s - \frac{k}{2} - n - 1}\, dy \\ &= \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta) P_n(\beta)\; 4\int_0^\infty K_{ir}(2\pi|\beta|y)\, y^{2s-1}\, dy \\ &= \pi^{-2s}\, \Gamma\left(s + \frac{ir}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{ir}{2}\right) \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} \frac{a(\beta) P_n(\beta)}{|\beta|^{2s}}. \end{aligned}$$

Die Dirichletreihen

$$\varphi(s, P_n) = \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} \frac{a(\beta) P_n(\beta)}{|\beta|^{2s}} \tag{52}$$

sind für $\Re s > \frac{n + \varkappa_2}{2} + \frac{3k}{4}$ absolut konvergent, definieren also analytische Funktionen von s. Diese lassen sich nach dem üblichen Verfahren in die ganze s-Ebene analytisch fortsetzen: Man zerlegt das Integral (51) an der Stelle $s = 1$, transformiert das endliche Integral von 0 bis 1 mit Hilfe der Substitution $y \to \frac{1}{y}$ in ein Integral über 1 bis ∞ und ersetzt hierin $F_n\left(\frac{1}{y}, P_n\right)$ durch $(-1)^n F_n(y, P_n')$. Das Resultat dieser Umformungen ist die für alle s gültige Darstellung

$$\begin{aligned} \xi(s, P_n) &= 4\int_1^\infty (F_n(y, P_n) - u_n(y))\, y^{2s - \frac{k}{2} - n - 1}\, dy \\ &\quad + (-1)^n 4 \int_1^\infty (F_n(y, P_n') - u_n(y))\, y^{-2s + \frac{k}{2} + n - 1}\, dy \\ &\quad - 4\delta_n \begin{Bmatrix} \frac{a_1}{2s+ir} + \frac{a_2}{2s-ir} + \frac{a_1}{k-2s+ir} + \frac{a_2}{k-2s-ir} \\ \frac{a_1}{2s} - \frac{a_2}{4s^2} + \frac{a_1}{k-2s} - \frac{a_2}{(k-2s)^2} \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{cases} r \neq 0, \\ r = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{53}$$

Hierin ist $\delta_0 = 1$ und $\delta_n = 0$ für $n > 0$. Man stellt nun unmittelbar fest, daß $\left(s - \frac{k+ir}{2}\right)\left(s - \frac{k-ir}{2}\right)\varphi(s, P_0)$ und $\varphi(s, P_n)$ $(n > 0)$ ganze Funktionen von endlichem Geschlecht sind und daß die Funktionalgleichungen

$$\xi\left(\frac{k}{2} + n - s,\ P_n\right) = (-1)^n \xi(s,\ P_n') \text{ für } n \geqq 0$$

bestehen.

Sei umgekehrt $\varphi(s,\ P_n)$ ein System von Funktionen mit diesen Eigenschaften. Jede der Funktionen $\varphi(s, P_n)$ gestatte überdies eine DIRICHLETsche Reihenentwicklung der Art (52). Ferner sei für eine geeignete positive Konstante $\varkappa$

$$a(\beta) = (O|\beta|^{\varkappa}) \text{ für } |\beta| \to \infty. \tag{54}$$

Die zur MELLINtransformation inverse Integraltransformation führt dann wieder zu einer automorphen Funktion $f(x)$ der eingangs beschriebenen Klasse zurück.

Bei vorgegebenem n sei $\sigma > \frac{n+k+\varkappa}{2}$ fest gewählt. Die Gerade $\Re s = \sigma$ liegt dann in der Halbebene absoluter Konvergenz der Reihe (52). Das Integral

$$F_n^*(y, P_n) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\xi(s, P_n)}{y^{2s - \frac{k}{2} - n}}\, ds \tag{55}$$
$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)\, P_n(\beta)\, y^{\frac{k}{2}+n} \frac{\Gamma\left(s + \frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s - \frac{ir}{2}\right)}{(\pi\,|\beta|\,y)^{2s}}\, ds$$

kann dann durch gliedweise Integration der unendlichen Reihe berechnet werden. Man erhält

$$F_n^*(y, P_n) = \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)\, P_n(\beta)\, y^{\frac{k}{2}+n}\, \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Gamma\left(s + \frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s - \frac{ir}{2}\right)}{(\pi\,|\beta|\,y)^{2s}}\, ds$$
$$= \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{s} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)\, P_n(\beta)\, y^{\frac{k}{2}+n}\, K_{ir}(2\pi\,|\beta|\,y).$$

In (55) ersetzen wir $\xi(s, P_n)$ durch $(-1)^n \xi\left(\frac{k}{2} + n - s,\ P_n'\right)$ und führen anschließend die Substitution $s \to \frac{k}{2} + n - s$ aus. Die Integrationsgerade $\Re s = \sigma$ geht dabei in die Gerade $\Re s = \frac{k}{2} + n - \sigma$ über. Diese kann in die ursprüngliche Lage verschoben werden, ohne daß sich das Integral ändert, wenn der Integrand keine Residuen aufweist. Das ist für $n > 0$ der Fall. Für $n = 0$ ergibt sich bei diesem Prozeß eine

Reihe von Zusatzgliedern, die von den Residuen des Integranden herrühren. Schließlich erkennt man, daß die Funktionen

$$F_n(y, P_n) = u_n(y) + F_n^*(y, P_n)$$

den Funktionalgleichungen

$$F_n\left(\frac{1}{y}, P_n\right) = (-1)^n F_n(y, P_n') \tag{56}$$

genügen. Dabei ist $u_n(y)$ von der Gestalt (10), (8). Die Koeffizienten von $u_0(y)$ berechnen sich aus den Residuen von $\varphi(s, P_0)$ nach der eingangs erlassenen Vorschrift. Wie wir oben bereits festgestellt haben, besagen die Funktionalgleichungen (56), daß die Wellenfunktion

$$f(x) = u(x_k) + \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{d} \\ \beta \neq 0}} a(\beta)\, x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi\,|\beta|\,x_k)\, e^{2\pi i \,\Re e(\beta x)} \tag{57}$$

die Transformationsformel $f(-x^{-1}) = f(x)$ befriedigt. Da $a(\beta)$ für $|\beta| \to \infty$ voraussetzungsgemäß nur wie eine feste Potenz von $|\beta|$ wächst, so kann leicht gezeigt werden, das sämtliche partiellen Ableitungen der Reihe (57) im Bereich $x_k > 0$ existieren und durch gliedweise Differentiation bestimmt werden können. $f(x)$ ist daher regulär. Außerdem ergibt sich für $x_k \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - u(x_k) &= O\left(x_k^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{\beta \subset \mathfrak{d} \\ \beta \neq 0}} |\beta|^{\varkappa - \frac{1}{2}} e^{-2\pi |\beta| x_k}\right) \\ &= O\left(x_k^{\frac{k-1}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{\varkappa + k - \frac{3}{2}} e^{-2\pi p x_k}\right) = O\left(x_k^{-\varkappa - \frac{k}{2}}\right), \end{aligned}$$

also

$$f(x) = O(x_k^{-\varkappa_2}) \qquad (x_k \to 0)$$

mit $\varkappa_2 = \varkappa + \frac{k}{2}$. Aus der Entwicklung (57) ist unmittelbar zu ersehen, daß

$$f(x) = O(x_k^{\varkappa_1}) \qquad (x_k \to \infty)$$

für $\varkappa_1 \geqq \frac{k}{2}$ gilt.

Wir formulieren den bewiesenen Sachverhalt in

Satz 3. *Zwischen der linearen Schar der Funktionen $f(x)$ und der linearen Schar der Funktionensysteme $\varphi(s, P_n)$, die den eingangs formulierten Bedingungen* (I) *bzw.* (II) *genügen, besteht eine eineindeutige lineare Beziehung, die durch die* MELLIN*transformation vermittelt wird. Dabei ist $k > 1$ vorauszusetzen.*

Es liegt hier ein Analogon zu der von E. Hecke[1]) festgestellten Tatsache vor, daß die Funktionalgleichungen unendlich vieler Zetafunk-

[1]) E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 357—376.

tionen mit Größencharakteren mit der Transformationsformel einer Thetareihe in mehreren Variablen äquivalent sind.

§ 3. Automorphe Funktionen zu Gruppen vom Picardschen Typus

Die allgemeine Theorie des vorangehenden Paragraphen gestattet eine interessante Anwendung auf die Zetafunktionen der biquadratischen Zahlkörper K, die einen imaginären quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{d})$ enthalten. Dabei sind umfangreiche formale Rechnungen auszuführen, die hier in großen Zügen mitgeteilt werden sollen. Eine Reihe von ständig auftretenden Hilfsgrößen und Funktionszeichen möge die in der Einleitung festgelegte Bedeutung haben.

Da K total komplex ist, gibt es nach Dirichlet in K genau eine Grundeinheit. Die Einheitswurzeln in K bilden eine Gruppe der Ordnung $2h$; für h ist jeder Wert von 1 bis 6 möglich. Wenn das ganze Ideal $\mathfrak{F}$ kein Teiler von $2h$ ist, dann kann wegen

$$-2h = (\zeta - 1)(\zeta^2 - 1) \cdots (\zeta^{2h-1} - 1) \qquad (\zeta^{2h} = 1,\ \zeta \text{ primitiv})$$

unter den Einheiten des Zahlstrahls mod $\mathfrak{F}$ keine von 1 verschiedene Einheitswurzel des Körpers K vorkommen; infolgedessen bilden die Einheiten des Zahlstrahls mod $\mathfrak{F}$ eine zyklische Gruppe. Wenn außerdem $\mathfrak{F}$ mit dem konjugierten Ideal $\mathfrak{F}'$ übereinstimmt, dann hat jede Einheit E des Zahlstrahls mod $\mathfrak{F}$ die Relativnorm $EE' = 1$. Aus $E \equiv 1(\mathfrak{F})$ folgt nämlich $E' \equiv 1(\mathfrak{F})$ und damit $EE' \equiv 1(\mathfrak{F})$, also $EE' = 1$; denn EE' ist eine Einheit des imaginären quadratischen Körpers $R(\sqrt{d})$, folglich eine Einheitswurzel. Z.B. stellt $\mathfrak{F} = (7)\mathfrak{d}\mathfrak{D}$ eine zulässige Wahl von $\mathfrak{F}$ dar. Jedenfalls ist damit die Existenz eines Hilfsideals $\mathfrak{F}$ mit den eingangs formulierten Eigenschaften bewiesen.

Die durch (18) definierten Zetafunktionen $\zeta_m(s, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ sind unabhängig davon, wie die Repräsentanten in den auftretenden Scharen mod $\mathfrak{F}$ assoziierter Zahlen ausgewählt werden; denn das allgemeine Summenglied ändert sich nicht, wenn man M mit einer Einheit des Zahlstrahls mod $\mathfrak{F}$ multipliziert.

Die Funktionalgleichungen (19) lassen sich mit der klassischen Methode von E. Hecke beweisen. Diese basiert auf der Verwendung der Thetareihen

$$(58) \qquad \begin{aligned} \vartheta_m(t_1, t_2;\ A, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}) &= \sum_{M \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})} \left(\frac{MM'}{\omega}\right)^m e^{-2\pi \frac{t_1|M|^2 + t_2|M'|^2}{|\omega|}} \\ \vartheta_{-m}(t_1, t_2;\ A, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}) &= \sum_{M \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})} \left(\frac{\overline{MM'}}{\overline{\omega}}\right)^m e^{-2\pi \frac{t_1|M|^2 + t_2|M'|^2}{|\omega|}} \end{aligned} \qquad (m \geqq 0)$$

die den Transformationsformeln

$$(59)\quad \vartheta_m(t_1, t_2;\, A, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = \frac{(-1)^m}{(t_1 t_2)^{|m|+1}\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}\\ B\equiv 0(\mathfrak{A})}} e^{2\pi i S\cdot\frac{AB'}{\omega}}\, \vartheta_{-m}\left(\frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_1};\, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}\right)$$

genügen. Insbesondere stellt sich dabei heraus, daß

$$s(s-1)\xi_m(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = s(s-1)(2\pi)^{-2s}\quad (\Gamma(s))^2 \zeta_m(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$

eine ganze Funktion von s ist. Die Residuen von $\xi_m(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ lauten

$$\delta_m\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) 2\log|E_{\mathfrak{F}}| \ \text{ in } s=0 \ \text{ und } \ \delta_m(0)\,\frac{2\log|E_{\mathfrak{F}}|}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \ \text{ in } s=1\,.$$

Hierin ist

$$\delta_m\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) = \begin{cases} 1 \ \text{ für } A\equiv 0(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}),\ m=0\,, \\ 0 \ \text{ für } A\not\equiv 0(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \ \text{ oder } m\neq 0\,. \end{cases}$$

Wir wählen die positive Zahl σ so groß, daß die Gerade $\Re s = \sigma$ in den Bereich absoluter Konvergenz der Zetareihen $\zeta_m(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ und $\zeta_{-m}(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ (m, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{F}$ fest; A variabel) fällt. Sei

$$(60)\quad F_m^*(y, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\xi_m(s, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})}{y^{2s-|m|-1}}\, ds \quad \text{für alle } m.$$

Alsdann wird

$$F_m^*(y, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \sum_{\substack{M\equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})\\ M\neq 0,\,(M)_{\mathfrak{F}}}} \left(\frac{MM'}{\omega}\right)^m \frac{1}{4\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(\Gamma(s))^2\, ds}{\left(2\pi\left|\frac{MM'}{\omega}\right| y\right)^{2s}}\cdot y^{m+1}$$

$$= \sum_{\substack{M\equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})\\ M\neq 0,\,(M)_{\mathfrak{F}}}} \left(\frac{MM'}{\omega}\right)^m y^{m+1} K_0\left(4\pi\left|\frac{MM'}{\omega}\right| y\right) \quad \text{für } m\geqq 0$$

und analog

$$F_{-m}^*(y, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \sum_{\substack{M\equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})\\ M\neq 0,\,(M)_{\mathfrak{F}}}} \left(\overline{\frac{MM'}{\omega}}\right)^m y^{m+1} K_0\left(4\pi\left|\frac{MM'}{\omega}\right| y\right) \ \text{für } m\geqq 0\,.$$

Auf dem üblichen Wege beweist man mit Hilfe der Funktionalgleichungen (19) für die Funktionen

$$(61)\quad F_m(y, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \delta_m\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) y\log|E_{\mathfrak{F}}| + F_m^*(y, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$

die Transformationsformeln

$$(62)\quad F_m\left(\frac{1}{y}, A;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}\right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}\\ B\equiv 0(\mathfrak{A})}} e^{2\pi i S\frac{AB'}{\omega}} F_{-m}(y, B;\, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})\,.$$

Nach dem in § 2 entwickelten Verfahren ist nun zu schließen, daß die Wellenfunktionen

$$(63)\quad f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$
$$= \delta\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) x_2 \log|E_{\mathfrak{F}}| + \sum_{\substack{M \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \\ M \neq 0,\ (M)_{\mathfrak{F}}}} x_2 K_0\left(4\pi \left|\frac{MM'}{\omega}\right| x_2\right) e^{2\pi i s\left(\frac{MM'}{\omega}(x_0 + i x_1)\right)}$$

den Transformationsformeln

$$(64)\quad f(-x^{-1}, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0(\mathfrak{A})}} e^{2\pi i S \frac{AB'}{\omega}} f(x, B; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$

genügen; denn die Potenzen μ^m und $\bar{\mu}^m (\mu = \mu_0 + i\mu_1;\ \mu_0, \mu_1$ reell; $m > 0)$ bilden eine Basis für die Kugelfunktionen $P_m(\mu)$ m-ter Ordnung in zwei Variabeln.

Sei $M \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})$, $\beta \equiv 0(1)$, $\beta < R(\sqrt{d})$, dann ist

$$\frac{(M-A)(M'-A')}{\omega} < \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}}{(\omega)} < \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right), \quad \frac{(M-A)A'}{\omega} < \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{b}\mathfrak{D}}{(\omega)} = \mathfrak{D}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Die Relativspur von $\frac{(M-A)A'}{\omega}$ liegt demnach in dem Ideal $\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$, so daß sich

$$\frac{(MM'-AA')\beta}{\omega} = \frac{(M-A)(M'-A')\beta}{\omega} + \frac{[(M-A)A' + (M'-A')A]\beta}{\omega} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$$

und damit $s\left(\frac{MM'\beta}{\omega}\right) \equiv s\left(\frac{AA'\beta}{\omega}\right)$ (1) ergibt. Aus (63) folgt also

$$(65)\qquad f(x+\beta, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = e^{2\pi i s\left(\frac{AA'\beta}{\omega}\right)} f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$
$$\text{für } \beta \equiv 0(1),\ \beta < R(\sqrt{d}).$$

Sei $\mathfrak{C}$ ein beliebiges ganzes Ideal $< K$ und $E_{\mathfrak{F}\mathfrak{C}}$ die Erzeugende der Gruppe der Einheiten im Zahlstrahl mod $\mathfrak{F}\mathfrak{C}$ mit $|E_{\mathfrak{F}\mathfrak{C}}| > 1$. Zur Abkürzung setzen wir $\log|E_{\mathfrak{F}\mathfrak{C}}| = l(\mathfrak{F}\mathfrak{C})$. Die folgenden Identitäten ergeben sich durch formales Umordnen der die Funktionen darstellenden Fourierreihen. Sie können daher ohne Beweis mitgeteilt werden:

$$(66)\quad f(\gamma x \gamma, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{l(\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F})} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ B \equiv A\gamma(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\mathfrak{D})}} f(|\gamma|^2 x, B; \mathfrak{A}, \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{b}, \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F}) \quad \text{für } \gamma \equiv 0(1),\ \gamma < R(\sqrt{d}).$$

$$(67)\quad f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$
$$= \frac{l(\mathfrak{F})}{|\gamma|^2\, l(\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F})} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ B \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} f(|\gamma|^2 x, B; \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{b}, \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F}) \quad \text{für } \gamma \equiv 0(1),\ \gamma < R(\sqrt{d}).$$

$$(68)\quad f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{l(\mu^2\mathfrak{F})} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mu\mathfrak{D} \\ B \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} f(x, \mu B; \mathfrak{A}, \mu^2\mathfrak{b}, \mu^2\mathfrak{F}) \quad \text{für } \mu \equiv 0(1),\ \mu < R(\sqrt{d}).$$

Wir verfügen nunmehr über die Hilfsmittel, mit denen das Verhalten der Wellenfunktionen $f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ gegenüber beliebigen Substitutionen der Art

$y = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganz algebraisch $< R(\sqrt{d})$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) untersucht werden kann.

Sei $\gamma \neq 0$; dann läßt sich y auf die Form $y = \alpha\gamma^{-1} - (\gamma x \gamma + \gamma\delta)^{-1}$ bringen. Wir nehmen eine Reduktion von y in folgenden Schritten vor:

$$y \to \alpha\overline{\gamma} - \left(\frac{\gamma x \gamma}{|\gamma|^2} + \frac{\delta}{\overline{\gamma}}\right)^{-1} \to -\left(\frac{\gamma x \gamma}{|\gamma|^2} + \frac{\delta}{\overline{\gamma}}\right)^{-1} \to \left(\frac{\gamma x \gamma}{|\gamma|^2} + \frac{\delta}{\overline{\gamma}}\right) \to \gamma x \gamma + \gamma\delta \to \gamma x \gamma.$$

Das bedeutet, daß wir auf $f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$ und die jeweils neu auftretenden Wellenfunktionen nacheinander die Transformationsformeln (67), (65), (64), (67), (65) anwenden. Nach dem letzten Schritt erhalten wir

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{(l\mathfrak{F})}{|\gamma|^8 l((\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{F})\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\overline{\gamma}\mathfrak{D} \\ B \equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{\Gamma \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\overline{\gamma}\mathfrak{D} \\ \Gamma \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} \sum_{\substack{\Delta \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{D} \\ \Delta \equiv \Gamma(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\overline{\gamma}\mathfrak{D})}}$$
$$e^{\frac{2\pi i}{\gamma\overline{\gamma}}\left(s\frac{BB'\alpha^-}{\omega} + S\frac{B\Gamma'}{\omega} + s\frac{\Delta\Delta'\delta}{\omega\overline{\gamma}}\right)} f(\gamma x\gamma, \Delta; \mathfrak{A}, (\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{b}, (\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{F}).$$

Hierin darf $S\frac{B\Gamma'}{\omega}$ durch $S\frac{B\Delta'}{\omega}$ ersetzt werden. Die Summation über Γ und Δ kann dann zusammengefaßt werden in: $\Delta \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{D}$, $\Delta \equiv 0\,(\mathfrak{A})$. Mit Hilfe von (66) nehmen wir die Reduktion $\gamma x \gamma \to |\gamma|^2 x$ vor. Es ergibt sich

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{|\gamma|^8 l((\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{F})\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\overline{\gamma}\mathfrak{D} \\ B \equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{\Delta \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{D} \\ \Delta \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} \sum_{\substack{\Lambda \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{D} \\ \Lambda \equiv \Delta\gamma(\mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\gamma\mathfrak{D})}}$$
$$e^{\frac{2\pi i}{\gamma\overline{\gamma}}\left(s\frac{BB'\alpha\overline{\gamma}}{\omega} + S\frac{B\Delta'}{\omega} + s\frac{\Delta\Delta'\delta}{\omega\overline{\gamma}}\right)} f(|\gamma|^2 x, \Lambda; \mathfrak{A}, (\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{b}, (\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{F}).$$

Sei $\Lambda = M\gamma$. Anstatt über Λ summieren wir über $M \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\overline{\gamma}\mathfrak{D}$, $M \equiv \Delta(\mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\mathfrak{D})$. Im Exponenten dürfen wir $S\frac{B\Delta'}{\omega} + s\frac{\Delta\Delta'\delta}{\omega\overline{\gamma}}$ durch $S\frac{BM'}{\omega} + s\frac{MM'\delta}{\omega\overline{\gamma}}$ ersetzen. Die Summation über Δ erübrigt sich nunmehr, wenn man $M \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\overline{\gamma}\mathfrak{D}$, $M \equiv 0(\mathfrak{A})$ variieren läßt. Wir erhalten damit

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{|\gamma|^8 l((\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{F})\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{M \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\overline{\gamma})^2\overline{\gamma}\mathfrak{D} \\ M \equiv 0\,(\mathfrak{A})}}$$
$$f(|\gamma|^2 x, \gamma M; \mathfrak{A}, (\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{b}, (\gamma\overline{\gamma})^3\mathfrak{F}) \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\overline{\gamma}\mathfrak{D} \\ B \equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} e^{\frac{2\pi i}{\gamma\overline{\gamma}}\left(s\frac{BB'\alpha\overline{\gamma}}{\omega} + S\frac{BM'}{\omega} + s\frac{MM'\delta}{\omega\overline{\gamma}}\right)}.$$

Es zeigt sich nun, daß die innere Summe $\sum_B$ nur für $M \equiv 0(\mathfrak{A}\overline{\gamma})$ von 0 verschieden ist. Setzt man nämlich $B = \Gamma + \Delta\gamma$, so wird

$$\sum_{B} = e^{\frac{2\pi i}{\gamma\bar{\gamma}} s \frac{M M' \delta}{\omega \bar{\gamma}}} \sum_{\substack{\Gamma \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\mathfrak{D} \\ \Gamma \equiv A\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} e^{\frac{2\pi i}{\gamma\bar{\gamma}} s \left(\frac{\Gamma\Gamma'\alpha\bar{\gamma} + \Gamma M' + M\Gamma'}{\omega}\right)} \sum_{\substack{\Delta \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ \Delta \equiv 0\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} e^{\frac{2\pi i}{\gamma\gamma} S \frac{\Delta(M'\gamma + \Gamma'\alpha\gamma\bar{\gamma})}{\omega}}.$$

Hierin ist $\sum\limits_{\Delta} = 0$ für $M \not\equiv 0(\mathfrak{A}\bar{\gamma})$, so daß $M \equiv 0(\mathfrak{A}\bar{\gamma})$ angenommen werden darf. Für diese M ist $\sum\limits_{\Delta} = |\gamma|^4$. Wir setzen $M = \Lambda\bar{\gamma}$ und zerlegen die Summation über Λ (an Stelle von M) in zwei Schritte:

$$\left.\begin{array}{c} \Lambda \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\bar{\gamma})^2\mathfrak{D} \\ \Lambda \equiv \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\gamma\mathfrak{D}) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} \Phi \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ \Phi \equiv 0(\mathfrak{A}) \end{array}\right\}$$

Es wird dann

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{|\gamma|^4\, l((\gamma\bar{\gamma})^3\mathfrak{F})\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{\Phi \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ \Phi \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} \varphi(A, \Phi) \sum_{\substack{\Lambda \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}(\gamma\bar{\gamma})^2\mathfrak{D} \\ \Lambda \equiv \Phi\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D})}} f(|\gamma|^2 x, \gamma\bar{\gamma}\Lambda; \mathfrak{A}, (\gamma\bar{\gamma})^3\mathfrak{b}, (\gamma\bar{\gamma})^3\mathfrak{F})$$

mit

$$\varphi(A, \Phi) = \sum_{\substack{\Gamma \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\mathfrak{D} \\ \Gamma \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} e^{\frac{2\pi i}{\gamma\bar{\gamma}} s \left(\frac{\Gamma\Gamma'\alpha\bar{\gamma} + (\Gamma\Phi' + \Phi\Gamma')\bar{\gamma} + \Phi\Phi'\bar{\gamma}\delta}{\omega}\right)}.$$

Aus der leicht beweisbaren Formel

$$\varphi(A, \Phi) = e^{-2\pi i s\left(\frac{\Phi\Phi'\beta\delta + (\Phi A' + A\Phi')\beta}{\omega}\right)} \varphi(A + \delta\Phi, 0)$$

ist zu ersehen, daß $\varphi(A, \Phi)$ nur von der Restklasse $\Phi \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}$ abhängt. Berücksichtigen wir noch (68) und (67), so ergibt sich schließlich

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{l(\mathfrak{F})}{|\gamma|^4\, l(\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F})\sqrt{N(\mathfrak{b}\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} \varphi(A, B) \sum_{\substack{\Phi \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\gamma\bar{\gamma}\mathfrak{D} \\ \Phi \equiv B\,(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D})}}$$

$$f(|\gamma|^2 x, \Phi; \mathfrak{A}, \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{b}, \gamma\bar{\gamma}\mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\gamma\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} \varphi(A, B)\, f(x, B; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}).$$

Unter der Voraussetzung

(69) $$\delta \equiv 0(\mathfrak{b}\mathfrak{d})$$

nehmen die Transformationsformeln eine einfache Gestalt an. Zunächst wird

$$\varphi(A, B) = \varphi(A, 0)\, e^{-2\pi i S \frac{A B' \beta}{\omega}}$$

also

$$f(y, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{\varphi(A, 0)}{\sqrt{N(\mathfrak{b}\gamma\mathfrak{D})}} \sum_{\substack{B \bmod \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D} \\ B \equiv 0\,(\mathfrak{A})}} e^{-2\pi i S \frac{A B' \gamma}{\omega}} f(x, B; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}).$$

Diese Summe kann aber nach (64) sofort angegeben werden. Man erhält

$$f((\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)^{-1},\ A;\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{F}) = \frac{\varphi(A,0)}{\gamma\bar{\gamma}} f(-x^{-1},\ -A\beta;\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{F}).$$

Hierin ersetzen wir x durch $-x^{-1}$. Ferner beachten wir, daß sich die Wellenfunktion auf der rechten Seite nicht ändert, wenn man das Argument $-A\beta$ durch $A\beta$ ersetzt. Wir stellen somit fest, daß

$$(70)\quad f((\beta x-\alpha)(\delta x-\gamma)^{-1}, A;\ \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) = \frac{\varphi(A,0)}{\gamma\bar{\gamma}} f(x,\ A\beta;\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{F}) \qquad \text{für } \delta \equiv 0(\mathfrak{b}\mathfrak{d})$$

gilt. Die Berechnung von $\varphi(A, 0)$ ist eine rein arithmetische Aufgabe und kann nach bekannten Methoden[1]) durchgeführt werden. Es ergibt sich

$$\varphi(A,0) = \gamma\bar{\gamma}\, e^{-2\pi i s \frac{AA'\alpha\beta}{\omega}} \left\{\frac{K}{\gamma}\right\}.$$

Dabei ist allgemein $\left\{\frac{K}{\mathfrak{a}}\right\}$ für ein beliebiges ganzes zur Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{a} < R(\sqrt{d})$ nach folgender Vorschrift zu berechnen

$$\left\{\frac{K}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{für } \mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \\ -1 & \text{für } \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l} \mathfrak{p} = \text{Primideal in } R(\sqrt{d}),\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{d} \\ \mathfrak{P} = \text{Primideal in } K \end{array}\right),$$

$$\left\{\frac{K}{\mathfrak{a}}\right\} = \left\{\frac{K}{\mathfrak{p}_1}\right\}^{r_1} \left\{\frac{K}{\mathfrak{p}^2}\right\}^{r_2} \cdots \left\{\frac{K}{\mathfrak{p}_l}\right\}^{r_l} \quad \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{r_1}\mathfrak{p}_2^{r_2}\cdots\mathfrak{p}_l^{r_l}\ (\mathfrak{p}_l \text{ Primideal}).$$

Aus (70) folgt nun nach einer Bezeichnungsänderung

$$(71)\quad f\left((\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)^{-1}, A;\ \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}\right) = \left\{\frac{K}{\delta}\right\} e^{2\pi i s \frac{AA'\alpha\beta}{\omega}} f(x, A\alpha; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) \qquad \text{für } \gamma \equiv 0(\mathfrak{b}\mathfrak{d}).$$

Bekanntlich ist K Klassenkörper über $R(\sqrt{d})$ zu einer gewissen Idealgruppe in $R(\sqrt{d})$ mit dem Führer $\mathfrak{d}$. Nach dem Reziprozitätsgesetz ist also $\left\{\frac{K}{\delta}\right\} = 1$ für $\delta \equiv 1(\mathfrak{d})$.

Wir bezeichnen mit $P(\mathfrak{n})$ die Hauptkongruenzgruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ zur Idealstufe $\mathfrak{n}$; sie besteht aus den Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathfrak{n}) \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta < R(\sqrt{d}),\ \alpha\delta-\beta\gamma = 1).$$

Hierbei stellt $\mathfrak{n}$ ein beliebiges ganzes Ideal $< R(\sqrt{d})$ dar.

Auf Grund der letzten Bemerkungen können wir nun folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *Die Wellenfunktionen*

[1]) Siehe S. 78 Anm. 1.

$$f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F})$$
$$= \delta\left(\frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}}\right) x_2 \log|E_{\mathfrak{F}}| + \sum_{\substack{M \equiv A(\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}) \\ M \neq 0,\, (M)_{\mathfrak{F}}}} x_2 K_0\left(4\pi \left|\frac{MM'}{\omega}\right| x_2\right) e^{2\pi i s\left(\frac{MM'}{\omega}(x_0 + i x_1)\right)}$$

sind gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ *zur Idealstufe* $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ *invariant; d. h. es gilt*

$$f\left((\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1}, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}\right) = f(x, A; \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \mathfrak{F}) \text{ für } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} < P(\mathfrak{b}\mathfrak{d}).$$

Sei nun $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}^{-1}$, $\mathfrak{b} = (1)$. Diese Spezialisierung ist mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \left(\frac{\omega}{\sqrt{d}}\right)$ verträglich; wir brauchen nur $\omega = \sqrt{d}$ zu wählen. Es ergeben sich damit automorphe Funktionen zur Idealstufe $\mathfrak{d}$. Existiert über $R(\sqrt{d})$ ein relativquadratischer unverzweigter Körper K, so daß $\mathfrak{d} = (1)$ angenommen werden kann, dann erhält man automorphe Wellenfunktionen zur PICARDschen Gruppe $P(1)$ des Körpers $R(\sqrt{d})$.