Math. Annalen, Bd. 121, S. 141—183 (1949).

Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch Funktionalgleichungen.

Erich Hecke zum Gedächtnis.

Von

Hans Maass in Heidelberg.

Die Zetafunktionen des rationalen und quadratischen Zahlkörpers haben zwei wichtige Eigenschaften. Einerseits genügen sie gewissen Funktionalgleichungen, anderseits setzen sie sich aus speziellen Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung linear zusammen, sofern sie nicht selbst eine solche Entwicklung gestatten. Die Frage, wie weit diese Zetafunktionen durch ihre Funktionalgleichungen festgelegt werden, bildet den Ausgangspunkt zu einer allgemeinen Theorie, die E. Hecke[1]) auf der Grundlage der Mellintransformation

$$\Psi(s) = \int_0^\infty y^{s-1}\,\Phi(y)\,dy \tag{1}$$

und ihrer Umkehrung

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} y^{-s}\,\Psi(s)\,ds \tag{2}$$

entwickelt hat. Durch diese umkehrbare Integraltransformation wird ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den in eine Dirichletreihe entwickelbaren Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung und den automorphen Funktionen hergestellt. Die Anwendbarkeit der Heckeschen Theorie ist an die Voraussetzung gebunden, daß der in den Funktionalgleichungen auftretende Γ-Faktor mit

$$\Gamma(s) \text{ oder } \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

übereinstimmt, so daß die Zetafunktionen des reell-quadratischen Körpers nicht erfaßt werden. Dieser Beschränkung steht die außerordentliche Bedeutung gegenüber, welche die Heckesche Theorie für die Theorie der Funktionalgleichungen der Zetafunktionen des rationalen und imaginär-quadratischen Zahlkörpers erlangt hat und die in einer algebraischen Formulierung des Problems der Eulerschen Produktentwicklung gipfelt. Es erhebt sich nun die Frage, ob die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen des reell-quadratischen Körpers einer ähnlichen Behandlung fähig sind, ob es also eine Funktionenklasse gibt, die für die Zetafunktionen des reell-quadratischen Körpers dasselbe leistet, wie die Modulfunktionen für die Zetafunktionen des rationalen und imaginär-quadratischen Körpers. Das ist in der Tat der Fall, und

[1]) Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112**, 664—699 (1936). Über Modulfunktionen und Dirichletsche Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Teil I und II. Math. Ann. **114**, 1—28, 316—351 (1937), zit. mit T_n I, II.

zwar handelt es sich hierbei um die Klasse der Funktionen g, die der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{y^2} g = 0 \qquad (r = \text{Parameter}) \tag{3}$$

genügen und die gegenüber gewissen nichteuklidischen Bewegungen der hyperbolischen Ebene $y > 0$ (zur metrischen Grundform $y^{-2}\,(dx^2 + dy^2)$) invariant sind. Das verbindende Element zwischen den DIRICHLETschen Reihen und den automorphen Wellenfunktionen ist auch jetzt wieder die Mellintransformation mit ihrer Umkehrung, so daß eine sehr weitgehende Analogie zur HECKEschen Theorie vorliegt, die im folgenden auch formelmäßig ständig zum Ausdruck kommt, wenn man bedenkt, daß die Wellenfunktion g in eine Potentialfunktion übergeht, sobald in einer Reihenentwicklung für g der Parameter r formal durch $\frac{i}{2}$ ersetzt wird. Die Wellenfunktionen erscheinen nicht direkt als Transformierte der entsprechenden DIRICHLETschen Reihen, sondern sind vermöge (2) nur auf der Geraden $x = 0$ bekannt. Zur vollen Kenntnis der Wellenfunktionen gelangen wir erst nach einem dem Prozeß der „analytischen Fortsetzung" analogen Akt, der darin besteht, eine Wellenfunktion g zu konstruieren, die auf der Geraden $x = 0$ mit den gegebenen Werten übereinstimmt. g ist aber erst dann eindeutig bestimmt, wenn außer g auch $\frac{\partial g}{\partial x}$ auf der Geraden $x = 0$ bekannt ist. Dieser Umstand bringt es mit sich, daß jeder Wellenfunktion g ein Paar von DIRICHLETschen Reihen zugeordnet wird. Die Funktionalgleichungen zu diesen Reihen, die eine Invarianz bezüglich der Substitution $s \to 1 - s$ zum Ausdruck bringen, unterscheiden sich wesentlich durch die Γ-Faktoren; diese lauten

$$\Gamma\left(\frac{s + ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s - ir}{2}\right) \text{ bzw. } \Gamma\left(\frac{s + 1 + ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s + 1 - ir}{2}\right). \tag{4}$$

Eine derartige Koppelung von Funktionalgleichungen ist in der Tat bei bekannten Beispielen zu beobachten[2]) und erfährt durch die Beziehung zu den Wellenfunktionen eine inhaltliche Begründung. Als Argument von g wählen wir zweckmäßig die komplexe Verbindung

$$\tau = x + iy,$$

da sich die nichteuklidischen Bewegungen der hyperbolischen Ebene $y > 0$ am einfachsten als gebrochene lineare Funktionen von τ mit reellen Koeffizienten darstellen lassen. Wir werden uns also im folgenden mit komplexwertigen nichtanalytischen automorphen Funktionen $g(\tau)$ befassen, die der Wellengleichung (3) genügen. Von der HECKEschen Theorie[2]) wird gelegentlich der Kürze halber als dem „analytischen Fall" gesprochen.

Nach dieser allgemeinen Orientierung stellen wir die wichtigsten Ergebnisse des vorliegenden Aufsatzes zur Übersicht zusammen.

Zunächst wird ein allgemeiner Satz über Systeme von Funktionalgleichungen bewiesen, den wir an dieser Stelle ausführlich formulieren, da er die wesentlichen Tatsachen zum Ausdruck bringt, auf die sich die ganze Theorie stützt.

---

[2]) Vgl. E. HECKE: Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{\pi i \tau \frac{|m^2 - 2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen. J. reine u. angew. Math. **157**, 159—170 (1927).

Satz 1. *Es seien fest gegeben: reelle Zahlen $\lambda > 0$ und $r \geqq 0$, eine natürliche Zahl q, eine N-reihige quadratische Matrix (c_{kl}), deren Quadrat gleich der Einheitsmatrix ist, und ganz rationale Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$. Wir fragen dann nach sämtlichen Systemen von $2N$ Funktionen*

$$\text{I} \qquad \varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_N(s); \quad \psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_N(s)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *$(s-1-ir)(s-1+ir)\,\varphi_k(s)$ und $\psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ sind ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.*

2. *Es gelten die Funktionalgleichungen*

$$(5) \qquad \xi_k(1-s) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\xi_l(s), \quad \eta_k(1-s) = -\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\eta_l(s), \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

wenn

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s} \Gamma\left(\frac{s-ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+ir}{2}\right)\varphi_k(s), \\ \eta_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s+1-ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1+ir}{2}\right)\psi_k(s) \end{aligned}$$

gesetzt wird.

3. *$\varphi_k(s)$ und $\psi_k(s)$ sind in* DIRICHLETsche *Reihen der Art*

$$(7) \qquad \varphi_k(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} \frac{a_n^{(k)}}{|n|^s}, \quad \psi_k(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} \frac{(\operatorname{sgn} n)\, a_n^{(k)}}{|n|^s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

entwickelbar, die irgendwo konvergieren.

4. *Es ist*

$$(8) \qquad \varrho_k\left(1 - e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right) = \sigma_k\left(1 - e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

wenn

$$(9) \qquad \varrho_k = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\alpha_l, \quad \sigma_k = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\beta_l$$

gesetzt wird und α_k, β_k so bestimmt werden, daß

$$(10) \qquad \varphi_k(s) - \frac{\alpha_k}{s-1-ir} - \frac{\beta_k}{s-1+ir} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_k(s) - \frac{\alpha_k}{s-1} - \frac{\beta_k}{(s-1)^2}$$

für $r > 0$ bzw. $r = 0$ ganze Funktionen von s sind.

Jedem Funktionensystem mit diesen Eigenschaften entspricht, wie mit Hilfe der Integraltransformationen (1) *und* (2) *bewiesen wird, umkehrbar eindeutig ein System von N Funktionen*

$$\text{II} \qquad g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_N(\tau),$$

die folgenden Bedingungen genügen:

1. *Sie befriedigen die Wellengleichung*

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{y^2}\right) g_k(\tau) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

und sind in jedem Punkt der oberen Halbebene als Funktionen der reellen Veränderlichen x, y regulär.

2. *Es ist gleichmäßig in* x

(12) $$g_k(\tau) = O(y^{\varkappa_1}) \text{ für } y \to \infty, \quad g_k(\tau) = O(y^{-\varkappa_2}) \text{ für } y \to 0$$

mit gewissen positiven Konstanten $\varkappa_1$ *und* $\varkappa_2$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

3. *Es ist*

(13) $$g_k\left(\tau + \frac{\lambda}{q}\right) = e^{\frac{2\pi i b_k}{q}} g_k(\tau). \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

4. *Es gelten die Transformationsformeln*

(14) $$g_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(\tau). \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

Ausgehend von den DIRICHLETschen Reihen (7) finden wir für das Funktionensystem II die Darstellung

(15) $$g_k(\tau) = u_k(y) + \sum_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} a_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi |n|}{\lambda}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n}{\lambda} x}$$

mit

(16) $$u_k(y) = \begin{cases} M \varrho_k y^{\frac{1}{2}+ir} + \overline{M} \sigma_k y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für } r > 0, \\ M\left\{\varrho_k + \sigma_k\left(\log\frac{\lambda}{4\pi} - C\right)\right\} y^{\frac{1}{2}} + M \sigma_k y^{\frac{1}{2}} \log y & \text{für } r = 0. \end{cases}$$

Hierin ist C die EULERsche Konstante und

(17) $$M = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}+ir} \Gamma\left(\frac{1}{2} + ir\right).$$

Die in der Entwicklung (15) auftretende BESSELsche Funktion $K_\nu(z)$ zu „rein imaginärem Argument“ genügt der Differentialgleichung

(18) $$z^2 \frac{d^2 w}{d z^2} + z \frac{d w}{d z} - (z^2 + \nu^2) w = 0$$

und zeigt für $z \to \infty$ das asymptotische Verhalten

(19) $$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\ ^{3)}.$$

Unter den diskontinuierlichen Gruppen $G\left(\frac{\lambda}{q}\right)$, die von den beiden Substitutionen

$$\tau \to \tau + \frac{\lambda}{q} \text{ und } \tau \to -\frac{1}{\tau}$$

erzeugt werden, sind $\mathsf{G}(1)$ und $\mathsf{G}(2)$ als Untergruppen der Modulgruppe M ausgezeichnet. Es handelt sich dabei um M selbst bzw. um die sogenannte Thetagruppe T. Allgemein wird durch die Transformationsformeln 3. und 4. des Systems II eine homomorphe Abbildung der Gruppe $\mathsf{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$ auf die von den Matrizen

(20) $$(c_{kl}) \text{ und } \left(\delta_{kl}\, e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right) \qquad (\delta_{kl} = \text{Kroneckersymbol})$$

erzeugte Gruppe definiert, sofern das System der Funktionen II linear unabhängig ist. Die Substitutionen von $\mathsf{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$, die hierbei auf die Einheits-

[3]) Vgl. G. N. WATSON: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922; zit. mit W.

matrix abgebildet werden, bilden einen Normalteiler N von $\mathsf{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$. Offenbar ist für alle Wellenfunktionen des Systems II

$$g_k(S\tau) = g_k(\tau) \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{N}. \tag{21}$$

Diese Invarianz ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn N von endlichem Index in $\mathsf{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$ ist, d. h. wenn die aus den Substitutionen (20) erzeugte Gruppe endlich ist, und wenn überdies $\lambda = q$ oder $2q$ ist. Für diesen Fall beweisen wir mit Hilfe einer SIEGELschen Methode, daß es nur endlich viele linear unabhängige automorphe Wellenfunktionen zur Gruppe N gibt, die in allen parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereiches für N sich so verhalten wie die $g_k(\tau)$ für $y \to \infty$. Damit ergibt sich ein wichtiger Endlichkeitssatz für die Dimension der linear-äquivalenten Scharen von Funktionensystemen I und II. Speziell für die Modulgruppe M und die Thetagruppe T lassen sich alle Wellenfunktionen zu $r = 0$ mit dem oben beschriebenen Verhalten in den parabolischen Spitzen explizit angeben. Diesem Resultat entspricht

Satz 2. *Sämtliche Lösungen $\varphi(s)$ der Funktionalgleichung*

$$\xi(s) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^s \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 \varphi(s) = \xi(1-s), \tag{22}$$

die in eine Dirichletreihe entwickelbar sind und für die $(s-1)^2\varphi(s)$ eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht ist, bilden eine lineare Schar, die im Falle $\lambda = 1$ von $\zeta^2(s)$ und im Falle $\lambda = 2$ von $2^{-s}\zeta^2(s)$ und $(1+2^{1-2s})\zeta^2(s)$ erzeugt wird ($\zeta(s)$ = RIEMANNsche Zetafunktion). Dagegen gibt es weder für $\lambda = 1$ noch $\lambda = 2$ eine nicht identisch verschwindende, in eine DIRICHLETsche Reihe entwickelbare ganze Funktion $\psi(s)$ von endlichem Geschlecht, die der Funktionalgleichung

$$\eta(s) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^2 \psi(s) = -\eta(1-s)$$

genügt.

Ein wichtiges Beispiel für Satz 1 hat man in der Klasse der Zetafunktionen des reell-quadratischen Körpers $R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D, gebildet mit beliebigem Größencharakter λ_1^n:

$$\begin{aligned} \zeta_0\left(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}\right) &= \frac{A^s}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \, (\mathfrak{a} Q \sqrt{D}) \\ \mu \neq 0, \, (\mu) Q \sqrt{D} \, p_\infty}} \frac{\lambda_1^n(\mu)}{|\mathrm{N}\mu|^s}, \\ \zeta_1\left(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}\right) &= \frac{A^s}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \, (\mathfrak{a} Q \sqrt{D}) \\ \mu \neq 0, \, (\mu) Q \sqrt{D} \, p_\infty}} \operatorname{sgn}(\mathrm{N}\mu) \frac{\lambda_1^n(\mu)}{|\mathrm{N}\mu|^s}. \end{aligned} \tag{23}$$

Dabei wird über ein volles System von nicht verschwindenden, mod $Q\sqrt{D}\,p_\infty$ nicht assoziierten Zahlen der Restklasse ϱ mod $\mathfrak{a}Q\sqrt{D}$ summiert. Q bedeutet eine beliebige natürliche Zahl, $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, ϱ eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{a}$; ferner ist $\mathrm{N}\,\mathfrak{a} = A$ gesetzt. Der Größencharakter λ_1 ist durch

$$\lambda_1(\mu) = \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{\frac{\pi i}{\log \varepsilon}}, \qquad \varepsilon = \text{Grundeinheit aus } R(\sqrt{D}), \ \varepsilon > 1 \tag{24}$$

definiert. Die Funktionalgleichungen

$$(25)\qquad \xi_\nu\left(1-s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}\right)=\frac{(-1)^\nu}{Q\sqrt{D}}\sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{a} Q\sqrt{D}\\ \sigma\equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\sigma'}{A Q D}\right)}\,\xi_\nu\left(s,\sigma,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}\right)$$

für $\nu=0,1$ mit

$$(26)\qquad \begin{aligned}\xi_0(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})&=\left(\frac{QD}{\pi}\right)^s\Gamma\left(\frac{s-\frac{\pi n i}{\log\varepsilon}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\frac{\pi n i}{\log\varepsilon}}{2}\right)\zeta_0(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}),\\ \xi_1(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})&=\left(\frac{QD}{\pi}\right)^{s+1}\Gamma\left(\frac{s+1-\frac{\pi n i}{\log\varepsilon}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1+\frac{\pi n i}{\log\varepsilon}}{2}\right)\zeta_1(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})\end{aligned}$$

die für $n=0$ bereits in [2]) bewiesen worden sind, erlauben die Anwendung von Satz 1 auf das System der Zetafunktionen (23) mit

$$(27)\qquad N=Q^2D,\ \lambda=q=QD,\ r=\frac{\pi n}{\log\varepsilon}=c\,n.$$

Man wählt zweckmäßig die Restklasse $\varrho \bmod \mathfrak{a} Q\sqrt{D}$, $\varrho\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ als Index an Stelle von k, so daß die Matrizen (20) im vorliegenden Fall mit

$$(28)\qquad \left(\frac{1}{Q\sqrt{D}}\,e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\sigma'}{AQD}\right)}\right)\quad\text{und}\quad\left(\delta_{\varrho\sigma}\,e^{\frac{2\pi i N\varrho}{AQD}}\right)$$

übereinstimmen. Bei der Abbildung von M auf die von den Matrizen (28) erzeugte Gruppe wird, wie E. HECKE [4]) gezeigt hat, die Hauptkongruenzgruppe $\mathsf{M}(QD)$ zur Stufe QD der Identität zugeordnet, so daß die dem System (23) entsprechenden Wellenfunktionen

$$(29)\qquad \begin{aligned}g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})&=2\,l_Q\,\delta_n\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}Q\sqrt{D}}\right)y^{\frac12}\\&+\frac{1}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})}\sum_{\substack{\mu\equiv\varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})\\ \mu\neq 0,\,(\mu)\,Q\sqrt{D}\,p_\infty}}\lambda_1^n(\mu)\,y^{\frac12}K_{icn}\left(\frac{2\pi|N\mu|}{AQD}\,y\right)e^{\frac{2\pi i N\mu}{AQD}x}\end{aligned}$$

bezüglich der Substitutionen von $\mathsf{M}(QD)$ invariant sind. Hierin ist $l_Q=\frac12\log\varepsilon_Q$, wenn $\varepsilon_Q\,(>1)$ die Gruppe der Einheiten aus $R(\sqrt{D})$ erzeugt, die mod $Q\sqrt{D}\,p_\infty$ der 1 kongruent sind, und

$$\delta_n(\mathfrak{b})=\begin{cases}1 \text{ für } n=0 \text{ und ein ganzes Ideal } \mathfrak{b},\\ 0 \text{ sonst}.\end{cases}$$

Berücksichtigt man die linearen Relationen zwischen den Reihen (29), so verbleiben im Falle

$$D=5,\quad Q=1,\quad \mathfrak{a}=(1)$$

genau drei linear unabhängige Funktionen, die den Werten $\varrho=0,1,2$ entsprechen. Wenn überdies $n=0$ ist, so sind diese Reihen durch die Eigenschaften II, 1 bis 4 (Satz 1) bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor eindeutig bestimmt; damit gleichwertig ist

---

[4]) HECKE, E.: Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **97**, 210—242 (1927).

Satz 3. *Das System der Zetafunktionen*

$$(30)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(s) &= \zeta_0(s, 0, (1), 1, \sqrt{5}), & \psi_1(s) &= \zeta_1(s, 0, (1), 1, \sqrt{5}), \\ \varphi_2(s) &= \zeta_0(s, 1, (1), 1, \sqrt{5}), & \psi_2(s) &= \zeta_1(s, 1, (1), 1, \sqrt{5}), \\ \varphi_3(s) &= \zeta_0(s, 2, (1), 1, \sqrt{5}), & \psi_3(s) &= \zeta_1(s, 2, (1), 1, \sqrt{5}) \end{aligned}$$

ist durch die Forderungen I, 1 bis 4 (Satz 1) mit $N = 3$, $\lambda = q = 5$, $r = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$ *und*

$$(31)\qquad (c_{k\,l}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \zeta^2 + \zeta^{-2} & \zeta + \zeta^{-1} \\ 1 & \zeta + \zeta^{-1} & \zeta^2 + \zeta^{-2} \end{pmatrix} \left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$$

bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Satz 1 läßt sich auch auf die lineare Schar aller Wellenfunktionen zur Stufe Q anwenden, da sich wegen der Normalteilereigenschaft von $\mathsf{M}(Q)$ wie im analytischen Fall eine Basis der Schar bestimmen läßt, die nur aus Eigenfunktionen der Substitution $\tau \to \tau + 1$ besteht. Es ist daher sinnvoll, jeder Wellenfunktion zur Stufe Q

$$(32)\qquad g(\tau) = u(y) + \sum_{n \neq 0} a_n\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi |n|}{Q} y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x}$$

ein Paar von DIRICHLETschen Reihen nach der Vorschrift

$$(33)\qquad \varphi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{|n|^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{(\operatorname{sgn} n)\, a_n}{|n|^s}$$

zuzuordnen; denn es handelt sich hierbei ja um einen linearen Prozeß. Die Bestimmung von $u(y)$ durch $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ erfolgt mit Hilfe der Residuen dieser Funktionen.

Ein besonderes Interesse beansprucht die Schar der zu den EISENSTEINschen Reihen [5]) analogen Reihen

$$(34)\qquad E(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i (Q) \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}} \frac{y^{\frac{s}{2}}}{|m_1 \tau + m_2|^s},$$

die zunächst nur für $\Re s > 2$ definiert sind, aber als Funktionen von s analytisch fortgesetzt werden können. Die Funktionswerte $E(\tau, 1 + 2ir; (a_1, a_2), Q)$, die wir gleichfalls als Eisensteinreihen ansprechen wollen, existieren für alle reellen r und stellen Lösungen der Wellengleichung dar, die gegenüber den Substitutionen von $\mathsf{M}(Q)$ invariant sind, wie man aus der Transformationsformel

$$(35)\qquad E(S\tau, 1 + 2ir; (a_1, a_2), Q) = E(\tau, 1 + 2ir; (a_1, a_2)\, S, Q) \quad \text{für} \quad S \subset \mathsf{M}$$

ersieht. Mit Hilfe der Reihen $E(\tau, 1 + 2ir; (a_1, a_2), Q)$ läßt sich, sofern $r > 0$ ist, eine beliebige Wellenfunktion zur Stufe Q, die in den parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereiches zu $\mathsf{M}(Q)$ Fourierentwicklungen von der Art (32) besitzt, auf eine Spitzenfunktion reduzieren, d. h. auf eine solche Funktion, die in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Der Beweis erfolgt mit den

[5]) Vgl. E. HECKE: Theorie der EISENSTEINschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Abh. math. Seminar der Hamburg. Univ. 5, 199—224 (1927).

HECKEschen Methoden, indem man zu den Reihen $E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$ übergeht, die aus den $E(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$ entstehen, wenn man die zusätzliche Summationsbedingung $(m_1, m_2) = 1$ einführt. Die vorliegenden Verhältnisse sind etwas komplizierter als im analytischen Fall. Bei der Reduktion ist nämlich zu beachten, daß insgesamt 2σ Konstanten zu Null gemacht werden müssen, wenn σ die Anzahl der parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereichs zu $\mathsf{M}(Q)$ bezeichnet; denn die Glieder $u(y)$ in den σ Fourierentwicklungen (von der Art (32)) der gegebenen Wellenfunktion zu den parabolischen Spitzen hängen jeweils von zwei Parametern ab. Andererseits gibt es nur σ linear unabhängige Eisensteinreihen $E(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$. Mit diesen kommt man aber aus, da zufolge gewisser Bilinearrelationen von den 2σ genannten Konstanten nur σ frei gewählt werden können. Im Falle $r = 0$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Eisensteinreihen im allgemeinen kleiner als σ und nimmt diesen Wert nur für $Q = 1, 2, 3, 4, 6$ an. Für andere Werte von Q reichen die angewandten Methoden zur Lösung des Reduktionsproblems nicht aus. Wie eine genauere Untersuchung zeigt, gibt es unter den Eisensteinreihen $E^*(\tau, 1; (a_1, a_2), 5)$ zur Stufe 5 genau drei linear unabhängige. Gewisse Linearkombinationen dieser Reihen sind mit den Wellenfunktionen zum System (30) identisch. Ihr Verhalten bezüglich der Substitution $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ ist angebbar aus Grund der bekannten Relationen der Eisensteinreihen zu $Q = 5$, so daß sich für die Funktionalgleichungen der Zetafunktionen (30) ein neuer Beweis ergibt, der von den Thetareihen in zwei Variablen keinen Gebrauch macht.

Die Eisensteinreihen zur Stufe QD und die Wellenfunktionen $g(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D})$ sind nicht unabhängig voneinander. Z. B. kann

$$\sum_{(\mathfrak{a})} g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}),$$

wobei über ein volles Repräsentantensystem $\mathfrak{a}$ der engeren Idealklassen von $R(\sqrt{D})$ summiert wird, durch die Eisensteinreihen zur Stufe D dargestellt werden. Der Nachweis dieser Identität liefert als Nebenresultat die DIRICHLETsche Klassenzahlformel für reell-quadratische Körper, so wie sie im analytischen Fall für imaginär-quadratische Körper herauskommt (vgl. [4]).

Die HECKEsche Theorie der T_n-Operatoren, die mit dem Problem der EULERschen Produktentwicklung DIRICHLETscher Reihen aufs engste verknüpft ist, läßt sich ohne besondere Modifikation auf die Wellenfunktionen zur Stufe Q übertragen. Um die T_m^t-Operatoren (s. T_n II) auch für solche m zu erklären, die zu Q nicht teilerfremd sind, ist eine Aufspaltung der Schar aller Wellenfunktionen in gewisse Teilscharen notwendig, die durch ihr Verhalten gegenüber den Operatoren $U, R_a \subset \mathsf{M}$ und K, definiert durch

$$U \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R_a \equiv \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (Q) \text{ für } a\bar{a} \equiv 1\,(Q), \qquad g(\tau) \mid K = g(-\bar{\tau}), \tag{36}$$

charakterisiert sind. Ähnlich wie im analytischen Fall wird man zunächst die Teilscharen $\mathfrak{F}_r(t, \chi, Q)$ der Wellenfunktionen vom Charakter χ zum Teiler t bilden. Darunter verstehen wir die Eigenfunktionen $g(\tau)$ zur Gruppe der Operatoren R_a mit den Eigenwerten $\chi(a)$:

$$g(\tau) \mid R_a = \chi(a)\, g(\tau), \tag{37}$$

welche überdies die Eigenschaft haben, daß in ihrer Fourierentwicklung nur solche Exponenten auftreten, die mit Q den größten gemeinsamen Teiler t haben. Die Tatsache, daß K mit den Operatoren R_n und T_m^t vertauschbar ist, erlaubt eine weitere Aufspaltung von $\mathfrak{F}_r(t, \chi, Q)$ in zwei Teilscharen, die aus Eigenfunktionen des Operators K zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 bestehen:

(38) $$\mathfrak{F}_r(t, \chi, Q) = \mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q) + \mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q).$$

Die Wellenfunktion $g(\tau)$ zur Stufe Q ist dann und nur dann Eigenfunktion des Operators K zum Eigenwert $+1$ oder -1, wenn von den DIRICHLETschen Reihen, die der Funktion $g(\tau)$ nach (33) zugeordnet werden, entweder $\psi(s)$ oder $\varphi(s)$ identisch verschwindet. Jeder Funktion aus einer der beiden Teilscharen $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ und $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ entspricht also nur eine DIRICHLETsche Reihe. Die linearen Scharen der DIRICHLETschen Reihen, die den Scharen $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ bzw. $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ zugeordnet werden, sind durch ihre Zugehörigkeit zu Funktionalgleichungssystemen mit den Γ-Faktoren

$$\Gamma\left(\frac{s+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-ir}{2}\right) \text{ bzw. } \Gamma\left(\frac{s+1+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1-ir}{2}\right)$$

charakterisiert. Die Zerlegung (38) hat den Sinn, eine Trennung dieser beiden Typen herbeizuführen. Eine solche kann auch für die lineare Schar $\mathfrak{E}(Q)$ der Eisensteinreihen zur Stufe Q vorgenommen werden:

(39) $$\mathfrak{E}(Q) = \mathfrak{E}^{+1}(Q) + \mathfrak{E}^{-1}(Q).$$

Die der Schar $\mathfrak{E}^{+1}(Q)$ (bzw. $\mathfrak{E}^{-1}(Q)$) entsprechende Schar von DIRICHLETschen Reihen ist linear äquivalent mit der Gesamtheit der L-Reihenprodukte

(40) $$(t_1 t_2)^{-s} L(s+ir, \chi_1) L(s-ir, \chi_2),$$

wobei t_i beliebige Teiler von Q und χ_i beliebige Charaktere mod $\frac{Q}{t_i}$ bedeuten $(i = 1, 2)$ mit der Einschränkung, daß χ_1 und χ_2 beide gerade (bzw. beide ungerade) sind.

Die Operatorentheorie angewendet auf $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$, $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ oder eine bezüglich der Operatoren T_m^t invariante Teilschar führt zu den gleichen Ergebnissen wie im analytischen Fall. Es handelt sich im wesentlichen um die Begründung der folgenden Tatsachen. Sei $F^1(\tau), F^2(\tau), \ldots, F^\varkappa(\tau)$ eine Basis der invarianten Schar $\mathfrak{S}_r$, die mit $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ oder $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ übereinstimmen oder in einer von diesen enthalten sein möge. Die mit den Koeffizienten der Linearformen

(41) $$F^\varrho(\tau) \mid T_m^t = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m) F^\sigma(\tau)$$

gebildeten Matrizen $\lambda(m)$ genügen der Regel

(42) $$\lambda(m_1)\lambda(m_2) = \sum_{\substack{d \mid m_1, m_2 \\ d>0}} \lambda\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right)\chi(d),$$

d. h. die Funktionsmatrix

(43) $$\Phi(s) = (\varphi_{\varrho\sigma}(s)) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)(tm)^{-s}$$

besitzt die EULERsche Produktentwicklung

$$\Phi(s) = t^{-s} \prod_p (\lambda(1) - \lambda(p)\, p^{-s} + \lambda(1)\, \chi(p)\, p^{-2s})^{-1}. \tag{44}$$

Aus einer Reihe von Koeffizientenrelationen ergibt sich, daß die von den $\varkappa^2$ Dirichletreihen $\varphi_{\varrho\sigma}(s)$ erzeugte lineare Schar den Rang $\varkappa$ hat und mit der Schar $\mathfrak{D}$ identisch ist, die der Schar $\mathfrak{S}_r$ zugeordnet wird. Das sogenannte „Hauptachsentheorem", welches besagt, daß die Matrizen $\lambda(p)$ zu den zu Q teilerfremden Primzahlen p bei geeigneter Wahl einer Basis $F^\varrho(\tau)$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa$) gleichzeitig Diagonalgestalt annehmen, ist auch im vorliegenden Fall mit Hilfe des PETERSSONschen Prinzips der Metrisierung[6]) angewendet auf die Wellenfunktionen beweisbar. Eine gewisse Normierung der in den Eulerprodukten auftretenden Faktoren zu den Primzahlen, die Q teilen, gelingt mit einer ebenfalls von H. PETERSSON angegebenen elementaren Methode (s. K III). Neue Gesichtspunkte treten bei dieser Untersuchung nicht mehr in Erscheinung, so daß die Beweise im Hinblick auf die ausführlichen Darstellungen T_n I, II und K I, II, III kurz gefaßt werden können.

§ 1. Systeme von Funktionalgleichungen.

Zum Beweis von Satz 1 und für spätere Überlegungen benötigen wir Abschätzungen der Besselfunktion $K_{ir}(z)$ für reelle r und positive z, die wir zunächst ableiten wollen. Wir gehen aus von der Integraldarstellung W, 6 · 15 (4):

$$K_{ir}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}z)^{ir}}{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{ir-\frac{1}{2}}\, dt. \tag{45}$$

Hierin substituieren wir $z(t-1) = s$ und erhalten

$$K_{ir}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)} \int_0^\infty e^{-s} s^{ir-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{s}{2z}\right)^{ir-\frac{1}{2}} ds. \tag{46}$$

Mit Hilfe der Integraldarstellung für die Gammafunktion gewinnt man aus dieser Identität den Grenzwert

$$\lim_{z\to\infty} K_{ir}(z) \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, e^z = 1 \tag{47}$$

und für beliebige positive z die Abschätzung

$$|K_{ir}(z)| \leq C_1 z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} \tag{48}$$

mit der nur von r abhängigen Konstanten

$$C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,|\Gamma(\frac{1}{2}+ir)|}. \tag{49}$$

Für $r = 0$ ist der Ausdruck $K_{ir}(z)\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, e^z$ nach (46) offenbar eine monoton wachsende Funktion von z, woraus

$$K_0(a)\, e^a \sqrt{\frac{a}{z}}\, e^{-z} \leqq K_0(z) < \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \quad \text{für } 0 < a \leqq z \tag{50}$$

erhellt.

[6]) Vgl. H. PETERSSON: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer RIEMANNschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit EULERscher Produktentwicklung, Teil I in Math. Ann. **116**, 401—412 (1939); Teil II und III in Math. Ann. **117**, 39—64, 277—300 (1940/41); gelegentlich zitiert mit K I, II, III.

Sei nun $\varphi_k(s), \psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ ein System von Funktionen, welches den Forderungen I, 1 bis 4 (Satz 1) genügt. Wir beweisen, daß das durch (15) definierte Funktionensystem die Eigenschaften II, 1 bis 4 hat. Die Konvergenz der Dirichletreihen (7) für mindestens einen Wert von s ist gleichwertig damit, daß mit geeigneten Konstanten C_2 und $\varkappa$

$$|a_n^{(k)}| \leqq C_2 |n|^{\varkappa} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{51}$$

gilt. Mit Hilfe von (48) kann daher

$$|g_k(\tau) - u_k(y)| \leqq \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\, C_1 C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varkappa - \frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi n}{\lambda} y}$$

geschlossen werden. Mithin wird für $y \to 0$:

$$g_k(\tau) - u_k(y) = O\left(\int_0^{\infty} t^{\varkappa - \frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi y}{\lambda} t}\, dt\right) = O\left(y^{-(\varkappa + \frac{1}{2})}\right),$$

sofern $\varkappa + \frac{1}{2} > 0$ ist, was angenommen werden kann. Die Bedingungen (12) sind also mit $\varkappa_1 > \frac{1}{2}$ und $\varkappa_2 = \varkappa + \frac{1}{2}$ erfüllt. Die partiellen Ableitungen der Fourierentwicklung von $g_k(\tau)$ existieren sämtlich und können durch gliedweise Differentiation berechnet werden, da die formal gebildeten Ableitungen beliebiger Ordnung in $0 < \delta \leqq y$ gleichmäßig konvergieren, was leicht einzusehen ist. Somit kann festgestellt werden, daß $g_k(\tau)$ der Wellengleichung (11) genügt. (13) ist evident auf Grund der Fourierentwicklung von $g_k(\tau)$ und der Bedingung (8). Es bleibt also nur noch (14) zu beweisen. Hierfür benötigen wir die Integraldarstellung

$$K_{\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}}(y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma\left(\frac{t + \nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t + \nu_2}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{-t - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} dt, \tag{52}$$

$$(y > 0,\ \sigma > -\Re\, \nu_1,\ \sigma > -\Re\, \nu_2)$$

die sich aus der Formel W, 6·5 (6) und der Beziehung W, 3·7 (8) leicht ergibt und aus der wir

$$y^{\frac{1 + \nu_1 + \nu_2}{2}} K_{\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}}\left(\frac{2\pi |n|}{\lambda} y\right) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{t + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{t + \nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t + \nu_2}{2}\right) dt}{|n|^{t + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}\, y^{t - \frac{1}{2}}} \tag{53}$$

ableiten. Wählen wir $\sigma > 1$ und außerdem so groß, daß die Integrationsgerade in die Halbebene der absoluten Konvergenz der Dirichletreihen (7) fällt, dann ist offenbar

$$F_k(y) = \sum_{\substack{n \equiv b_k(q) \\ n \neq 0}} a_n^{(k)} y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi |n|}{\lambda} y\right) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\xi_k(s)}{y^{s - \frac{1}{2}}}\, ds, \tag{54}$$

$$G_k(y) = \sum_{\substack{n \equiv b_k(q) \\ n \neq 0}} n\, a_n^{(k)} y^{\frac{3}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi |n|}{\lambda} y\right) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\eta_k(s)}{y^{s - \frac{1}{2}}}\, ds. \tag{55}$$

In beiden Identitäten ersetzen wir die Integrationsvariable s durch $1 - s$ und wenden die Funktionalgleichungen (5) an; man erhält dann

$$F_k(y) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl} \frac{1}{8\pi i} \int\limits_{1-\sigma-i\infty}^{1-\sigma+i\infty} \frac{\xi_l(s)}{y^{\frac{1}{2}-s}}\, ds\,, \quad G_k(y) = -\sum_{l=1}^{N} c_{kl} \frac{1}{8\pi i} \int\limits_{1-\sigma-i\infty}^{1-\sigma+i\infty} \frac{\eta_l(s)}{y^{\frac{1}{2}-s}}\, ds\,.$$

Nach Verschiebung der Integrationsgeraden durch $1-\sigma$ in ihre alte Lage und bei gehöriger Berücksichtigung der Residuen ergeben sich schließlich ähnlich wie im analytischen Fall die Funktionalgleichungssysteme

$$F_k^*\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, F_l^*(y)\,, \quad G_k\left(\frac{1}{y}\right) = -\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, G_l(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{56}$$

mit

$$F_k^*(y) = u_k(y) + F_k(y)\,, \tag{57}$$

wobei $u_k(y)$ durch (16) definiert ist. Zur Rechtfertigung des Verfahrens ist die Voraussetzung I, 1 von Satz 1 heranzuziehen. Die Funktionen

$$g_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(\tau) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{58}$$

haben nun folgende Eigenschaften. Sie sind Lösungen der Wellengleichung, da allgemein mit $g(\tau)$ auch $g(S\tau)$ eine Lösung darstellt, wenn S eine beliebige reelle unimodulare Substitution bedeutet, und verschwinden nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x für $x = 0$. Das ergibt sich sofort aus den Relationen

$$\begin{gathered} g_k(\tau)_{x=0} = F_k^*(y)\,, \quad g_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)_{x=0} = F_k^*\left(\frac{1}{y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x} g_k(\tau)_{x=0} = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot \frac{1}{y}\, G_k(y)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x} g_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)_{x=0} = -\frac{2\pi i}{\lambda} \cdot \frac{1}{y}\, G_k\left(\frac{1}{y}\right) \end{gathered} \tag{59}$$

und den Funktionalgleichungen (56). Jede Lösung $g(\tau)$ der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{y^2}\right) g(\tau) = 0$$

mit den Anfangswerten

$$g(\tau)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\, g(\tau)_{x=0} = 0$$

verschwindet aber identisch. $g(\tau)$ läßt sich nämlich als Lösung einer elliptischen Differentialgleichung nach Potenzen von x entwickeln:

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y)\, x^n\,,$$

und für die von y abhängigen Koeffizienten bestehen die Rekursionsformeln

$$(n+2)(n+1)\, c_{n+2}(y) + c_n''(y) + \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{y^2}\, c_n(y) = 0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

woraus allgemein $c_n(y) = 0$ folgt; denn $c_0(y)$ und $c_1(y)$ verschwinden nach Voraussetzung. Mit den Funktionalgleichungen (14) ist die Äquivalenzaussage von Satz 1 in einer Richtung bewiesen.

Sei nun umgekehrt ein System von Funktionen $g_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ mit den Eigenschaften II, 1 bis 4 (Satz 1) vorgelegt. Nach II, 3 sind die Funktionen $g_k(\tau)$ periodisch in x mit der Periode λ und daher in Fourierreihen entwickelbar, die für $r > 0$ bzw. $r = 0$ notwendig die Gestalt

$$(60)\quad \begin{aligned} g_k(\tau) = &\begin{Bmatrix} a_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}+ir} + b_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}-ir} \\ a_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}}\log y + b_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} \\ &+ \sum_{n \neq 0} \left\{ a_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\, y\right) + b_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} I_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\, y\right)\right\} e^{\frac{2\pi i n}{\lambda} x} \end{aligned}$$

haben; dabei sind $K_\nu(z)$ und $I_\nu(z)$ unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (18). Aus der Koeffizientenformel

$$a_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) + b_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} I_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda g_k(\tau)\, e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda}x}\, dx \quad (n \neq 0)$$

entnimmt man $b_n^{(k)} = 0$ für $n \neq 0$; denn $g_k(\tau)$ wächst für $y \to \infty$ höchstens wie eine Potenz von y, während $I_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right)$ exponentiell gegen unendlich geht. Die Koeffizienten $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ $(n \geqq 0)$ sind zufolge (13) höchstens dann von Null verschieden, wenn $n \equiv b_k(q)$ ist. Die Fourierentwicklung von $g_k(\tau)$ ist also von der Art (15), und die durch (16) zu definierenden Zahlen ϱ_k und σ_k genügen den Bedingungen (8). In die Formel

$$(61)\qquad a_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda g_k(\tau)\, e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda}x}\, dx$$

tragen wir $y = \frac{c}{|n|}$ ein und schließen für $|n| \to \infty$ mit Hilfe von (12)

$$(62)\qquad a_n^{(k)} = O\left(|n|^{\varkappa_2 + \frac{1}{2}}\right),$$

indem wir eine positive Konstante c so wählen, daß $K_{ir}\left(\frac{2\pi}{\lambda} c\right) \neq 0$ ist. Die Dirichletreihen (7) besitzen demnach eine Konvergenzhalbebene und können zur Definition der Funktionen $\varphi_k(s)$ und $\psi_k(s)$ herangezogen werden. Zum Nachweis der Eigenschaften I, 1 und 2 bedienen wir uns der zu (52) inversen Integralformel W, 13 · 21 (8)

$$(63)\qquad \int_0^\infty K_\nu(t)\, t^{s-1}\, dt = 2^{s-2}\,\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \text{ für } \Re s > |\Re \nu|,$$

aus der wir nach einfachen Substitutionen

$$(64)\quad 4\int_0^\infty t^{\frac{1+\nu_1+\nu_2}{2}} K_{\frac{\nu_2-\nu_1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\, t\right) t^{s-\frac{3}{2}}\, dt = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\nu_2}{2}\right)}{|n|^{s+\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

erhalten. Die Darstellungen

$$(65)\qquad 4\int_0^\infty F_k(t)\, t^{s-\frac{3}{2}}\, dt = \xi_k(s), \quad 4\int_0^\infty G_k(t)\, t^{s-\frac{3}{2}}\, dt = \eta_k(s)$$

ergeben sich dann unmittelbar durch gliedweise Integration der unter den Integralzeichen stehenden Reihen. Für $\Re s > \varkappa_2 + \frac{5}{2}$ darf so verfahren werden, da aus (62)

$$(66)\qquad F_k(y) = O\left(y^{-\varkappa_2 - 1}\right), \quad G_k(y) = O\left(y^{-\varkappa_2-1}\right) \text{ für } y \to 0$$

folgt. Um nun zu Darstellungen für $\xi_k(s)$ und $\eta_k(s)$ zu gelangen, die in der ganzen s-Ebene gültig sind, zerlegen wir wie im analytischen Fall die Integrale

(65) in Teilintegrale über die Intervalle von 0 bis 1 und 1 bis ∞. In den endlichen Integralen nehmen wir die Variablensubstitution $t \to \frac{1}{t}$ vor und berücksichtigen die mit (14) äquivalenten Funktionalgleichungen (56), nachdem wir $F_k\left(\frac{1}{y}\right)$ durch $F_k^*\left(\frac{1}{y}\right) - u_k\left(\frac{1}{y}\right)$ ersetzt haben. Diese Umformungen führen zu dem Resultat

$$\tfrac{1}{4}\,\xi_k(s) = \int_1^\infty F_k(y)\, y^{s-\frac{3}{2}}\, dy + \sum_{l=1}^{N} c_{kl} \int_1^\infty F_l(y)\, y^{-\frac{1}{2}-s}\, dy$$

$$(67)\qquad + \begin{cases} \dfrac{M\,\alpha_k}{s-1-ir} + \dfrac{\overline{M}\,\beta_k}{s-1+ir} - \dfrac{M\,\varrho_k}{s+ir} - \dfrac{\overline{M}\,\sigma_k}{s-ir} \\[2ex] \dfrac{M\left(\alpha_k + \beta_k\left(\log\frac{\lambda}{4\pi} - C\right)\right)}{s-1} + \dfrac{M\,\beta_k}{(s-1)^2} - \dfrac{M\left(\varrho_k + \sigma_k\left(\log\frac{\lambda}{4\pi} - C\right)\right)}{s} + \dfrac{M\,\sigma_k}{s^2} \end{cases}$$

für $r > 0$ bzw. $r = 0$, sowie

$$(68)\qquad \tfrac{1}{4}\,\eta_k(s) = \int_1^\infty G_k(y)\, y^{s-\frac{3}{2}}\, dy - \sum_{l=1}^{N} c_{kl} \int_1^\infty G_l(y)\, y^{-\frac{1}{2}-s}\, dy.$$

Die in I, 1 (Satz 1) geforderten analytischen Eigenschaften der Funktionen $\varphi_k(s)$ und $\psi_k(s)$ lassen sich hieraus sofort ablesen; auch die Verifikation der Funktionalgleichungen (5) bereitet keine Schwierigkeiten mehr. Der Beweis von Satz 1 ist damit erbracht.

Für die lineare Schar der Funktionensysteme mit den in Satz 1 genannten Eigenschaften kann unter speziellen Voraussetzungen ein gewisser Endlichkeitssatz bewiesen werden, der ausführlich folgendes besagt:

Satz 4. *Die Maximalzahl der linear unabhängigen Funktionensysteme $\varphi_k(s)$, $\psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ oder $g_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, die den Bedingungen von Satz 1 genügen, ist endlich, wenn $\lambda = q$ oder $2q$ vorausgesetzt wird und wenn die von den Matrizen*

$$\left(\delta_{kl}\, e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right) \quad \text{und} \quad (c_{kl})$$

erzeugte Gruppe endlich ist.

Beweis. Die Transformationsformeln (13) und (14) definieren im Falle $\lambda = q$ bzw. $2q$ eine Darstellung N-ten Grades der Modulgruppe M bzw. der Thetagruppe T. Die Wellenfunktionen $g_k(\tau)$ sind offenbar invariant gegenüber den Substitutionen, die bei dieser Darstellung auf die Identität abgebildet werden und die einen Normalteiler N von endlichem Index in M bzw. T bilden, sofern die von den Matrizen (20) erzeugte Gruppe endlich ist. Der Endlichkeitssatz folgt daher aus

Satz 5. *Es sei G eine Untergruppe der Modulgruppe von endlichem Index, $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ ein vollständiges System von inäquivalenten parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereiches von G und A_ϱ eine geeignete reelle unimodulare Substitution, die s_ϱ in ∞ überführt. Dann gibt es nur endlich viele linear unabhängige Wellenfunktionen $g(\tau)$, die bezüglich der Substitutionen von G invariant sind und in den parabolischen Spitzen Entwicklungen der Art*

$$(69)\qquad g\left(A_\varrho^{-1}\tau\right) = u_\varrho(y) + \sum_{n \neq 0} a_\varrho(n)\, y^{\frac{1}{2}}\, K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q_\varrho}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q_\varrho} x}$$

besitzen $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$.

Wir erbringen den Beweis mit Hilfe einer von C. L. SIEGEL[7]) entwickelten Methode. Zunächst darf $u_\varrho(y) = 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$ angenommen werden; denn diese Glieder sind von der Form (16), hängen also nur von 2σ Parametern linear ab. $g(\tau)$ verschwindet dann in allen parabolischen Spitzen, stellt also eine sogenannte Spitzenfunktion dar. Es sei $\tau \to \tau + Q_\varrho$ $(Q_\varrho > 0)$ die Erzeugende in der Gruppe der Translationen, die in $A_\varrho G A_\varrho^{-1}$ enthalten ist. Die Fourierentwicklung (69) bringt die Invarianz von $g(\tau)$ bezüglich der Substitution $A_\varrho^{-1}\begin{pmatrix}1 & Q_\varrho\\ 0 & 1\end{pmatrix} A_\varrho$ zum Ausdruck. Mit $\mathfrak{P}_\varrho$ bezeichnen wir die Punktmenge, die durch A_ϱ in den Bereich $-\frac{1}{2}Q_\varrho \leqq x < \frac{1}{2}Q_\varrho$, $y \geqq \varkappa$ übergeführt wird. Für hinreichend großes $\varkappa$ läßt sich die Punktmenge

$$\mathfrak{P} = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \mathfrak{P}_\varrho \tag{70}$$

durch eine mit ihrem Rand im Innern der oberen Halbebene gelegene Punktmenge $\mathfrak{B}$ zu einem Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P} + \mathfrak{B} \tag{71}$$

ergänzen. Nachdem wir uns für einen festen Wert von $\varkappa$ entschieden haben, zerlegen wir $\mathfrak{B}$ in der Weise in Teilbereiche $\mathfrak{B}_\varrho$:

$$\mathfrak{B} = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \mathfrak{B}_\varrho, \tag{72}$$

daß für einen beliebigen Punkt $\tau = x + iy \subset A_\varrho(\mathfrak{P}_\varrho + \mathfrak{B}_\varrho)$ die Ungleichung

$$y \geqq \varkappa_0 > 0 \tag{73}$$

mit einem möglichst großen $\varkappa_0$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$ erfüllt ist. Sei M das Maximum des absoluten Betrages von $g(\tau)$ in $\mathfrak{F}$. Wegen der Invarianz von $g(\tau)$ bezüglich G gilt

$$|g(\tau)| \leqq M \tag{74}$$

allgemein. Das Gleichheitszeichen wird in einem nicht auf dem Grenzkreis $y = 0$ gelegenen Punkt $\tau^* \subset \mathfrak{F}$ angenommen, da $g(\tau)$ in den parabolischen Spitzen verschwinden soll. τ^* möge in $\mathfrak{P}_\iota + \mathfrak{B}_\iota$ liegen, so daß für $\tau_0 = x_0 + iy_0 = A_\iota\tau^*$:

$$y_0 \geqq \varkappa_0, \quad |g(A_\iota^{-1}\tau_0)| = M \tag{75}$$

gilt. Wir beweisen nun $M = 0$ unter der Voraussetzung

$$a_\varrho(n) = 0 \quad \text{für} \quad |n| \leqq m, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, \sigma \tag{76}$$

und hinreichend großes m. Mit $\tau = x + \frac{i}{2}y_0$ ist offenbar

$$a_\iota(n)\, y_0^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q_\iota}y_0\right) = \frac{1}{Q_\iota}\int_0^{Q_\iota} g(A_\iota^{-1}\tau)\, e^{-\frac{2\pi i n}{Q_\iota}x}\, dx \cdot \sqrt{2}\, \frac{K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q_\iota}y_0\right)}{K_{ir}\left(\frac{\pi|n|}{Q_\iota}y_0\right)},$$

woraus sich die Abschätzung

[7]) SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939).

$$M = \left|g\,(A_\iota^{-1}\,\tau_0)\right| \leqq \sum_{|n|>m} \left| a_\iota(n)\, y_0^{\frac{1}{2}}\, K_{ir}\left(\frac{2\pi\,|n|}{Q_\iota}\, y_0\right)\right|$$

(77)
$$\leqq 2\sqrt{2}\; M \sum_{n>m} \left| \frac{K_{ir}\left(\frac{2\pi n}{Q_\iota}\, y_0\right)}{K_{ir}\left(\frac{\pi n}{Q_\iota}\, y_0\right)} \right|$$

ergibt. Für hinreichend großes m können wir auf Grund des asymptotischen Verhaltens (19) der Besselfunktion $K_\nu(z)$ für großes Argument

$$M \leqq 4\, M \sum_{n>m} e^{-\frac{\pi n}{Q_\iota}\, y_0} \leqq 4\, M \sum_{n>m} e^{-\frac{\pi n}{Q_\iota}\, \varkappa_0} \leqq c\, M\, e^{-\frac{\pi m}{Q_\iota}\, \varkappa_0}$$

schließen, wobei c eine nur von der Zerlegung von $\mathfrak{F}$ abhängige positive Konstante bezeichnet. Genügt m auch noch den Ungleichungen

$$m > \frac{Q_\varrho \log c}{\pi\, \varkappa_0}\,, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

dann ist notwendig $M = 0$, q. e. d.

Im Falle $r = 0$ kann mit Hilfe der Abschätzung (50) eine hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden einer Spitzenfunktion zu G explizit angegeben werden. Aus (77) folgt nämlich für $m = 0$, wenn allgemein $a_\varrho = \frac{\pi\,\varkappa_0}{Q_\varrho}$ gesetzt wird,

(78)
$$M \leqq 2\sqrt{2}\; M \sum_{n>0} \frac{K_0\left(\frac{2\pi n}{Q_\iota}\, y_0\right)}{K_0\left(\frac{\pi n}{Q_\iota}\, y_0\right)} \leqq \frac{\sqrt{2}\,\pi\, M}{\sqrt{a_\iota}\, K_0(a_\iota)\, e^{a_\iota}} \sum_{n>0} e^{-\frac{\pi n}{Q_\iota}\, y_0}$$
$$\leqq \frac{\sqrt{2}\,\pi\, M}{\sqrt{a_\iota}\, K_0(a_\iota)\, e^{a_\iota}\,(e^{a_\iota}-1)}\,.$$

Um nun $M = 0$ schließen zu können, muß

(79)
$$\sqrt{2}\,\pi < \sqrt{a_\varrho}\; K_0(a_\varrho)\, e^{a_\varrho}\,(e^{a_\varrho} - 1) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

gefordert werden. Auf der rechten Seite dieser Ungleichung steht eine monoton wachsende Funktion von a_ϱ. Die Ungleichung ist für $a_\varrho = \frac{3}{2}$ erfüllt; denn nach W, S. 699 ist

$$K_0\left(\tfrac{3}{2}\right) e^{\frac{3}{2}} = 0{,}9582101\ldots,\quad e^{\frac{3}{2}} - 1 = 3{,}4816891\ldots$$

Das identische Verschwinden einer Spitzenfunktion zu G folgt also bereits aus den Ungleichungen

(80)
$$\frac{\pi\,\varkappa_0}{Q_\varrho} > \frac{3}{2}\,. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

Wir wenden dieses Resultat auf die Modulgruppe und die Thetagruppe an.

1. $\mathsf{G} = \mathsf{M}$. Es ist $\sigma = 1$. Als Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ wählen wir die Modulfigur: $|\tau + \bar\tau| \leqq 1$, $|\tau| \geqq 1$, dazu $A_1 = E$ (Einheitsmatrix). Alsdann wird $Q_1 = 1$, $\varkappa_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und (80) ist erfüllt.

2. $\mathsf{G} = \mathsf{T}$. Hier ist $\sigma = 2$. Ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ wird durch die Ungleichungen $|\tau + \bar\tau - 2| \leqq 2$, $|\tau| \geqq 1$, $|\tau - 2| \geqq 1$ beschrieben. $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_1$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit dem Bereich $|\tau - 1| \geqq \sqrt{2}$: damit ist dann

auch $\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{B}_2$ bestimmt. Es sei $A_1 = E$ und A_2 die nichteuklidische Drehung der Ordnung 2 mit dem Fixpunkt $1 + i\sqrt{2}$. Offenbar ist $A_2(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{B}_1$, so daß $Q_1 = Q_2 = 2$ und $\varkappa_0 = 1$ wird. Die Bedingung (80) ist wiederum erfüllt. Wir erhalten das folgende Resultat:

Satz 6. *Es gibt keine nicht identisch verschwindende Spitzenfunktion zur Thetagruppe* T *und* $r = 0$.

Dieser Satz ist für M natürlich trivial, wenn er für T gilt, da T Untergruppe von M ist. Zur Begründung von Satz 3 benötigen wir eine Aussage von ähnlicher Art für spezielle Systeme von Spitzenfunktionen zur Stufe 5:

Satz 7. *Ein System von Spitzenfunktionen* $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ *zur Hauptkongruenzgruppe* $\mathsf{M}(5)$ *und* $r = 0$ *verschwindet identisch, wenn für* $S \subset \mathsf{M}$ *Transformationsformeln der Art*

$$g_i(S\tau) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(S)\, g_k(\tau) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{81}$$

gelten und die Darstellung $(a_{ik}(S))$ *der Modulargruppe* $\mathsf{M}/\mathsf{M}(5)$ *unitär ist.*

Zum Beweis dürfen wir annehmen, daß die Matrix $\left(a_{ik}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right)$ Diagonalgestalt hat. Diese Voraussetzung können wir erzwingen, indem wir das System $g_k(\tau)$ $(k = 1, 2, 3)$ selbst einer geeigneten unitären Transformation unterwerfen. Sei demnach

$$g_k(\tau + 1) = \zeta_k\, g_k(\tau) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{82}$$

mit gewissen 5-ten Einheitswurzeln $\zeta_k = e^{\frac{2\pi i b_k}{5}}$, $0 \leqq b_k < 5$. Die Fourierentwicklungen der Funktionen sind dann von der Form

$$g_k(\tau) = \sum_{n + \frac{b_k}{5} \neq 0} a_k(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_0\left(2\pi\left|n + \frac{b_k}{5}\right| y\right) e^{2\pi i\left(n + \frac{b_k}{5}\right)x}. \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{83}$$

Da wir die Darstellung $(a_{ik}(S))$ unitär angenommen haben, so ist die Funktion

$$\chi(\tau) = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} g_k(\tau)\, \overline{g_k(\tau)}} \tag{84}$$

gegenüber den Substitutionen von M invariant. Außerdem verschwindet sie in der parabolischen Spitze des Fundamentalbereichs $|\tau + \bar{\tau}| \leqq 1$, $|\tau| \geqq 1$ von M. Sei M das Maximum von $\chi(\tau)$ im Fundamentalbereich; es wird in einem endlichen Punkt τ_0 des Fundamentalbereichs angenommen. $\chi(\tau) \leqq M$ gilt offenbar für alle τ. Sei nun etwa

$$|g_k(\tau_0)| \leqq |g_1(\tau_0)|, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{85}$$

dann ist

$$M \leqq \sqrt{3}\, |g_1(\tau_0)| \quad \text{und} \quad y_0 \geqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tag{86}$$

wenn $\tau_0 = x_0 + i\,y_0$ gesetzt wird. Mit Hilfe der Koeffizientenformel für Fourierreihen leiten wir eine Abschätzung für $g_1(\tau_0)$ her, aus der wieder $M = 0$, d. h. $\chi(\tau) = 0$ folgt. Es sei $\tau = x + i\vartheta\, y_0$ mit einem später näher zu bestimmenden ϑ im Intervall $0 < \vartheta < 1$. Aus der Formel

$$a_1(n)\, y_0^{\frac{1}{2}} K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| y_0\right)$$

(87)
$$= \tfrac{1}{5}\int_0^5 g_1(\tau)\, e^{-2\pi i\left(n+\frac{b_1}{5}\right)x}\, dx \cdot \vartheta^{-\frac{1}{2}}\, \frac{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| y_0\right)}{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| \vartheta y_0\right)}$$

entnehmen wir die Abschätzung

$$|a_1(n)|\, y_0^{\frac{1}{2}} K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| y_0\right) \leqq \frac{M}{\sqrt{\vartheta}}\, \frac{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| y_0\right)}{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| \vartheta y_0\right)}$$

und erhalten damit

$$\frac{M}{\sqrt{3}} \leqq |g_1(\tau_0)| \leqq \frac{M}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{n+\frac{b_1}{5}\neq 0} \frac{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| y_0\right)}{K_0\left(2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| \vartheta y_0\right)}.$$

Wegen $2\pi\left|n+\frac{b_1}{5}\right| \vartheta y_0 \geqq \frac{\pi\sqrt{3}}{5}\vartheta$ und (50) können wir

(88)
$$\frac{M}{\sqrt{3}} \leqq \frac{M}{\sqrt{a}\, K_0(a)\, e^a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n+\frac{b_1}{5}\neq 0} e^{-\pi\sqrt{3}\left|n+\frac{b_1}{5}\right|(1-\vartheta)}$$

schließen, wenn wir zur Abkürzung

$$a = \frac{\pi\sqrt{3}}{5}\vartheta$$

setzen. Die in der Ungleichung (88) auftretende unendliche Reihe hat den Wert

$$\frac{2}{\xi^5-1} \text{ für } b_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\xi^{5-b_1}+\xi^{b_1}}{\xi^5-1} \text{ für } b_1 > 0$$

mit

$$\xi = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{5}(1-\vartheta)} = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{5}-a}.$$

In jedem Fall ergibt sich also

(89)
$$\frac{M}{\sqrt{3}} \leqq \frac{M}{\sqrt{a}\, K_0(a)\, e^a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\xi^4+\xi}{\xi^5-1};$$

denn es ist $2 < \xi^3+\xi^2 < \xi^4+\xi$. Wenn a sich im Intervall $0 < a < \frac{\pi\sqrt{3}}{5}$ so bestimmen läßt, daß

(90)
$$\sqrt{a}\, K_0(a)\, e^a > \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\, \frac{\xi^4+\xi}{\xi^5-1}$$

wird, dann folgt notwendig $M = 0$. Für $a = 0{,}16$ entnimmt man aus W, S. 698 den Wert $K_0(a)\, e^a = 2{,}3087874\ldots$ und stellt dann fest, daß in der Tat

$$\sqrt{a}\, K_0(a)\, e^a > 0{,}9235 > 0{,}9199 > \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\, \frac{\xi^4+\xi}{\xi^5-1}$$

ist. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

§ 2. Die Zetafunktionen des reell-quadratischen Körpers.

Wir wenden das allgemeine Ergebnis des ersten Paragraphen auf die durch (23) definierten Zetafunktionen $\zeta_\nu(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D})$ $(\nu = 0, 1)$ des reell-quadratischen Körpers $R(\sqrt{D})$ an. Den Beweis der Funktionalgleichungen (25) erbringen wir mit der klassischen Methode, die E. HECKE[2]) bereits auf den Spezialfall $n = 0$ angewendet hat. Mit Hilfe des Γ-Integrals lassen sich die Funktionen (26) durch die Thetareihen

$$\text{(91)}\qquad \begin{aligned} \vartheta_0(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) &= \sum_{\mu \equiv \varrho\,(\mathfrak{a} Q \sqrt{D})} e^{-\frac{\pi}{A Q D}(\mu^2 t + \mu'^2 t')}, \\ \vartheta_1(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) &= \sum_{\mu \equiv \varrho\,(\mathfrak{a} Q \sqrt{D})} \mu\mu' e^{-\frac{\pi}{A Q D}(\mu^2 t + \mu'^2 t')} \end{aligned}$$

ausdrücken. Dabei haben die auftretenden Zeichen die eingangs festgelegte Bedeutung. Setzen wir noch

$$\delta(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{für ein ganzes Ideal } \mathfrak{b}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

so wird

$$\text{(92)}\qquad \begin{aligned} &\xi_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) \\ &= \frac{4}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \int_0^\infty \left[\int_{-l_Q}^{l_Q} \left\{ \vartheta_0(u e^{2v}, u e^{-2v}, \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) - \delta\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a} Q \sqrt{D}}\right) \right\} e^{-2incv}\, dv \right] u^{s-1}\, du, \\ &\xi_1(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) \\ &\qquad = \frac{4}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \int_0^\infty \left[\int_{-l_Q}^{l_Q} \vartheta_1(u e^{2v}, u e^{-2v}, \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})\, e^{-2incv}\, dv \right] u^s\, du \end{aligned}$$

für $\Re s > 1$. Darstellungen der ξ_ν, die für alle s gültig sind, erhält man, indem man die Integrale über u in Teilintegrale von 0 bis 1 und 1 bis ∞ zerlegt, die Transformationsformeln

$$\text{(93)}\qquad \begin{aligned} \vartheta_0(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) &= \frac{1}{Q\sqrt{D}\sqrt{t t'}} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a} Q \sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha' \varrho}{A Q D}\right)} \vartheta_0\left(\frac{1}{t'}, \frac{1}{t}, \alpha, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}\right), \\ \vartheta_1(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) &= \frac{-1}{Q\sqrt{D}(\sqrt{t t'})^3} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a} Q \sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha' \varrho}{A Q D}\right)} \vartheta_1\left(\frac{1}{t'}, \frac{1}{t}, \alpha, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}\right) \end{aligned}$$

auf die Integranden der endlichen Teilintegrale anwendet und die Variablensubstitution $u \to \frac{1}{u}$ ausführt. So ergibt sich schließlich

$$\text{(94)}\qquad \begin{aligned} \xi_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) &= -\frac{8 l_Q \delta_n\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a} Q \sqrt{D}}\right)}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \frac{1}{s} - \frac{8 l_Q \delta_n(0)}{Q\sqrt{D}\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \frac{1}{1-s} \\ &+ \frac{4}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \int_1^\infty \left[\int_{-l_Q}^{l_Q} \left\{ \vartheta_0(u e^{2v}, u e^{-2v}, \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) - \delta\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a} Q \sqrt{D}}\right) \right\} e^{-2incv}\, dv \right] u^{s-1}\, du \\ &\quad + \frac{4}{Q\sqrt{D}\lambda_1^n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a} Q \sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(-\frac{\alpha' \varrho}{A Q D}\right)} \int_1^\infty \left[\int_{-l_Q}^{l_Q} \left\{ \vartheta_0(u e^{2v}, u e^{-2v}, \alpha, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. - \delta\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a} Q \sqrt{D}}\right) \right\} e^{-2incv}\, dv \right] u^{-s}\, du \end{aligned}$$

und

$$\xi_1(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$$

$$(95)\qquad = \frac{4}{\lambda_1^n(\mathfrak{a})}\int_1^\infty\left[\int_{-l_Q}^{l_Q}\vartheta_1(u\,e^{2v},u\,e^{-2v},\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,e^{-2inev}\,dv\right]u^s\,du$$

$$-\frac{4}{Q\sqrt{D}\,\lambda_1^n(\mathfrak{a})}\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AQD}\right)}\int_1^\infty\left[\int_{-l_Q}^{l_Q}\vartheta_1(u\,e^{2v},u\,e^{-2v},\alpha,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,e^{-2inev}\,dv\right]u^{1-s}\,du.$$

Die Eigenschaften I, 1 bis 4 (Satz 1) mit den speziellen Daten (27) können nun für die Zetafunktionen $\zeta_\nu(s,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$ leicht nachgewiesen werden. Für die zugeordneten Wellenfunktionen $g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$ bestehen daher die Beziehungen

$$(96)\quad g(\tau+a,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}) = e^{2\pi i\frac{a\,\mathrm{N}\varrho}{AQD}}\,g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})\quad (a \text{ ganz rational}),$$

$$(97)\quad g\left(-\frac{1}{\tau},\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}\right) = \frac{1}{Q\sqrt{D}}\sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \sigma\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\sigma'}{AQD}\right)}\,g(\tau,\sigma,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D});$$

überdies ist für eine beliebige natürliche Zahl m

$$(98)\qquad g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}) = \frac{l_Q}{\sqrt{m}\,l_{mQ}}\sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{a}mQ\sqrt{D}\\ \sigma\equiv\varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}} g(m\tau,\sigma,\mathfrak{a},\lambda_1^n,mQ\sqrt{D}),$$

was man auf Grund der Fourierentwicklung (29) unmittelbar erkennt. Mit diesen drei Transformationsformeln kann man nach einem Verfahren von E. HECKE[4]) das Verhalten von $g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$ gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen $S\subset\mathsf{M}$ bestimmen; dabei wird von irgendwelchen linearen Relationen zwischen den $g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$ kein Gebrauch gemacht. Man erhält für

$$S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\subset\mathsf{M}$$

die Transformationsformeln

$$(99)\qquad g(S\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}) = \sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \sigma\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} c_{\varrho\sigma}(S)\,g(\tau,\sigma,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})$$

mit den Koeffizienten

$$(100)\qquad c_{\varrho\sigma}(S) = \begin{cases}\dfrac{1}{cQ\sqrt{D}}\displaystyle\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}cQ\sqrt{D}\\ \alpha\equiv\varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}} e^{\frac{2\pi i}{cAQD}(a\,\mathrm{N}\alpha+S\alpha\sigma'+d\,\mathrm{N}\sigma)} & \text{für } c>0,\\[2ex] \delta_{\varrho\sigma}\,e^{2\pi i\frac{b\,\mathrm{N}\varrho}{AQD}} & \text{für } c=0,\ d=1.\end{cases}$$

Die hierbei auftretenden Einheitswurzelsummen hat E. HECKE ausführlich diskutiert; für $S\subset\mathsf{M}(QD)$ ergibt sich insbesondere $c_{\varrho\sigma}(S)=\delta_{\varrho\sigma}$, d. h. es ist

$$(101)\qquad g(S\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D}) = g(\tau,\varrho,\mathfrak{a},\lambda_1^n,Q\sqrt{D})\ \text{ für } S\subset\mathsf{M}(QD).$$

Die volle Schar aller Wellenfunktionen $g(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D})$ bei festen $n\, Q, D$ erhält man, wenn man $\mathfrak{a}$ ein volles System von Repräsentanten der engeren Idealklassen in $R(\sqrt{D})$ und ϱ die Restklassen mod $\mathfrak{a}\, Q\sqrt{D}$ durchlaufen läßt, die in $\mathfrak{a}$ enthalten sind; denn es ist

$$(102)\qquad g(\tau, \varrho\beta, \mathfrak{a}\beta, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) = g(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) \text{ für } \mathrm{N}\,\beta > 0.$$

Die Frage nach den linearen Relationen, die neben den trivialen

$$(103)\qquad g(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D}) = g(\tau, -\varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D})$$

zwischen den betrachteten Wellenfunktionen bestehen, kann vorerst nur in numerisch gegebenen Fällen restlos beantwortet werden. Da die Maximalzahl der linear unabhängigen Reihen $g(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \lambda_1^n, Q\sqrt{D})$ bei festen Argumenten $\mathfrak{a}, n, Q, D$ kleiner als $Q^2 D$ ist, so wird Satz 1 auf dieses Funktionensystem mit $N < Q^2 D$ angewendet werden können. Der Endlichkeitssatz 4 hat auch dann noch Gültigkeit.

Wir betrachten speziell $D = 5$, $Q = 1$. Da die Anzahl der engeren Idealklassen in $R(\sqrt{5})$ gleich 1 ist, genügt es, $\mathfrak{a} = (1)$ und im Hinblick auf (103) $\varrho = 0, 1, 2$ anzunehmen. Die drei Reihen

$$g_n(\tau, \varrho) = g(\tau, \varrho, (1), \lambda_1^n, \sqrt{5}) \qquad (\varrho = 0, 1, 2)$$

sind linear unabhängig. Bezeichnen wir nämlich die Fourierkoeffizienten dieser Funktionen zum Exponenten m mit $a_\varrho(m)$, so ist nach (29) für $m \neq 0$:

$$a_\varrho(m) = \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho\ (\sqrt{5}) \\ (\mu)\sqrt{5}\, p_\infty,\ \mathrm{N}\mu = m}} \lambda_1^n(\mu),$$

also speziell

ϱ	0	1	2
$a_\varrho(1)$	0	2	0
$a_\varrho(-1)$	0	0	2
$a_\varrho(5)$	4	0	0

und die Determinante dieses Koeffizientenschemas ist von Null verschieden. Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, dann treten an Stelle von (96) und (97) die Transformationsformeln

$$g_n(\tau+1, 0) = g_n(\tau, 0),\quad g_n(\tau+1, 1) = \zeta\, g_n(\tau, 1),\quad g_n(\tau+1, 2) = \zeta^{-1} g_n(\tau, 2),$$

$$(104)\qquad \begin{pmatrix} g_n\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right) \\ g_n\left(-\frac{1}{\tau}, 1\right) \\ g_n\left(-\frac{1}{\tau}, 2\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \zeta^2+\zeta^{-2} & \zeta+\zeta^{-1} \\ 1 & \zeta+\zeta^{-1} & \zeta^2+\zeta^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n(\tau, 0) \\ g_n(\tau, 1) \\ g_n(\tau, 2) \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Transformationsformeln für die Funktionen

$$(105)\qquad g_n^*(\tau, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, g_n(\tau, 0),\ g_n^*(\tau, 1) = g_n(\tau, 1),\ g_n^*(\tau, 2) = g_n(\tau, 2)$$

definieren eine unitäre Darstellung der Modulargruppe $\mathsf{M}/\mathsf{M}(5)$, wie man leicht nachrechnet. Das ist für die Anwendung von Satz 7 auf das System der Funktionalgleichungen (104) wichtig.

§ 3. Die Eisensteinreihen zur Stufe Q.

Die Frage nach allen automorphen Wellenfunktionen zur Stufe Q ist für die Theorie der Dirichletreihen von entscheidender Bedeutung, besitzt darüber hinaus aber auch selbständiges Interesse. Der einfachste Ansatz zur Konstruktion solcher Funktionen besteht in der Bildung der Eisensteinreihen

$$E(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i (Q) \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}} \frac{y^{\frac{s}{2}}}{|m_1 \tau + m_2|^s}, \tag{106}$$

wobei über alle nicht verschwindenden Paare von ganz rationalen Zahlen (m_1, m_2) der Restklassen (a_1, a_2) mod Q summiert wird. Diese Reihen sind bekanntlich für $\Re s > 2$ absolut konvergent. Das allgemeine Glied und damit auch E sind Lösungen der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{s(2-s)}{4y^2}\right) E = 0, \qquad (\tau = x + iy) \tag{107}$$

und es bestehen die Transformationsformeln

$$E(S\tau, s; (a_1, a_2), Q) = E(\tau, s; (a_1, a_2) S, Q) \text{ für } S \subset \mathsf{M}, \tag{108}$$

woraus insbesondere die Invarianz gegenüber den Substitutionen von $\mathsf{M}(Q)$ folgt. Zunächst ist zu beweisen, daß die für $\Re s > 2$ regulären Funktionen $E(\tau, s; (a_1, a_2), Q)$ von s in die Halbebene $\Re s < 2$ analytisch fortgesetzt werden können und auf der Vertikalen $\Re s = 1$ noch regulär sind. Zu dem Zweck nehmen wir eine Fourierentwicklung der Eisensteinreihen vor. Nach einer einfachen Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned} E(\tau, s; (a_1, a_2), Q) &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) y^{\frac{s}{2}} \zeta(s, a_2, Q) \\ &+ \frac{y^{\frac{s}{2}}}{Q^s} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (Q) \\ m_1 \neq 0}} \frac{1}{|m_1|^s} \sum_{\substack{j \equiv a_2 (Q) \\ j \bmod Q m_1}} f\left(\frac{\tau}{Q} + \frac{j}{Q m_1}, s\right) \end{aligned} \tag{109}$$

mit

$$\zeta(s, a, Q) = \sum_{\substack{n \equiv a (Q) \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|^s} \quad \text{und} \quad f(\tau, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau + n|^s}. \tag{110}$$

Die Fourierentwicklung der in τ periodischen Funktion $f(\tau, s)$ lautet

$$f(\tau, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u + iy|^{-s} e^{-2\pi i n u} du \right\} e^{2\pi i n x}.$$

Dabei ist für $n \neq 0$ nach W, $6 \cdot 16$ (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u + iy|^{-s} e^{-2\pi i n u} du = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi n u \, du}{(u^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{|n|}{y}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi |n| y)$$

und für $n = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u + iy|^{-s} du = 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2 + y^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} y^{1-s},$$

so daß

$$(111)\quad f(\tau,s) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,y^{1-s} + \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{|n|}{y}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi|n|\,y)\,e^{2\pi i n x}$$

wird. Diese Entwicklung tragen wir in (109) ein und erhalten das Resultat:

$$(112)\quad \begin{aligned} E(\tau,s;(a_1,a_2),Q) &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) y^{\frac{s}{2}}\,\zeta(s,a_2,Q) + \frac{\sqrt{\pi}}{Q}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\zeta(s-1,a_1,Q)\,y^{1-\frac{s}{2}} \\ &+ \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{Q^{\frac{s+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n\neq 0}\left\{\sum_{\substack{m\equiv a_1(Q)\\ m\mid n}} e^{\frac{2\pi i n a_2}{Q m}}|m|^{1-s}\right\}|n|^{\frac{s-1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}\,K_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q}\,y\right)e^{\frac{2\pi i n}{Q}x}. \end{aligned}$$

Die analytische Fortsetzung ist damit geleistet. Um zu beweisen, daß die in der Entwicklung (112) formal auftretenden Pole der Zeta- und Gammafunktionen in $s = 1$ in Wahrheit gar nicht vorkommen, müssen wir von den Transformationsformeln der Funktionen $\zeta(s,a,Q)$ Gebrauch machen. Bekanntlich ist

$$(113)\quad \begin{aligned} \xi(s,a,Q) &= \left(\frac{Q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s,a,Q) = -\,\delta\left(\frac{a}{Q}\right)\frac{2}{s} - \frac{2}{\sqrt{Q}\,(1-s)} \\ &+ \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\left\{\sum_{\substack{n\equiv a(Q)\\ n\neq 0}} e^{-\frac{\pi t n^2}{Q}}\right\}dt + \frac{1}{\sqrt{Q}}\sum_{b \bmod Q}\zeta^{ab}\int_1^\infty t^{\frac{1-s}{2}-1}\left\{\sum_{\substack{n\equiv b(Q)\\ n\neq 0}} e^{-\frac{\pi t n^2}{Q}}\right\}dt, \end{aligned}$$

wenn $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}}$ gesetzt wird, und daher

$$(114)\quad \xi(1-s,a,Q) = \frac{1}{\sqrt{Q}}\sum_{b \bmod Q}\zeta^{ab}\,\xi(s,b,Q).$$

Mit Hilfe dieser Funktionalgleichungen läßt sich die Summe der von x unabhängigen Terme in der Fourierentwicklung (112):

$$(115)\quad u(y,s;(a_1,a_2),Q) = \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right)\zeta(s,a_2,Q)\,y^{\frac{s}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{Q}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\zeta(s-1,a_1,Q)\,y^{1-\frac{s}{2}}$$

in eine Form bringen, welche die Regularität dieses Ausdrucks in $s = 1$ unmittelbar erkennen läßt. Es wird nämlich

$$(116)\quad \begin{aligned} &u(y,s;(a_1,a_2),Q) \\ &= \frac{2\,y^{\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{s}{2}}}{Q^{\frac{s+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left\{(\pi Q y)^{\frac{s-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) + (\pi Q y)^{\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta(s-1)\right\} \\ &\quad + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{Q}\left(\frac{\pi y}{Q^2}\right)^{\frac{s-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{\substack{b \bmod Q\\ b\not\equiv 0(Q)}}\zeta^{a_2 b}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s,b,Q)\quad \text{für } a_1\equiv 0\,(Q) \end{aligned}$$

und

$$(117)\quad u(y,s;(a_1,a_2),Q) = \frac{\sqrt{\pi}}{Q}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\zeta(s-1,a_1,Q)\,y^{1-\frac{s}{2}}\quad \text{für } a_1\not\equiv 0\,(Q).$$

Die nach Potenzen von $s-1$ fortschreitenden Entwicklungen

$$\zeta(s, b, Q) = \frac{2}{Q(s-1)} + \frac{2}{Q}\left(C - \sum_{a=1}^{Q-1} \zeta^{-ab} \log\left(2 \sin\frac{a\pi}{Q}\right)\right) + \cdots$$

gestatten in Verbindung mit den Relationen (114) die Berechnung des Grenzwerts

$$\text{(118)} \quad \lim_{s\to 1} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s, b, Q) = -2\log\left(2\left|\sin\frac{b\pi}{Q}\right|\right) \text{ für } b \not\equiv 0\,(Q).$$

Eine einfache Rechnung liefert dann

$$\text{(119)} \quad u(y, 1; (a_1, a_2), Q)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{Q}\, y^{\frac{1}{2}} \log y + \dfrac{2}{Q}\left(C + \log\dfrac{Q}{4\pi} - \sum\limits_{b=1}^{Q-1} \zeta^{a_2 b} \log\left(2\sin\dfrac{b\pi}{Q}\right)\right) y^{\frac{1}{2}} & \text{für } a_1 \equiv 0\,(Q), \\ -\dfrac{2}{Q}\log\left(2\left|\sin\dfrac{a_1\pi}{Q}\right|\right) y^{\frac{1}{2}} & \text{für } a_1 \not\equiv 0\,(Q), \end{cases}$$

während man für $r > 0$ nach (115) direkt

$$\text{(120)} \quad \begin{aligned} u(y, 1+2ir; (a_1, a_2), Q) &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \zeta(1+2ir, a_2, Q)\, y^{\frac{1}{2}+ir} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{Q} \frac{\Gamma(ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)} \zeta(2ir, a_1, Q)\, y^{\frac{1}{2}-ir} \end{aligned}$$

erhält.

Um die Maximalzahl linear unabhängiger Eisensteinreihen zu bestimmen, gehen wir zu den Reihen

$$\text{(121)} \quad E^*(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i (Q) \\ (m_1, m_2) = 1}} \frac{y^{\frac{s}{2}}}{|m_1\tau + m_2|^s}$$

über, die für $(a_1, a_2, Q) > 1$ identisch verschwinden, wenn wir wie üblich festsetzen, daß eine leere Summe den Wert Null hat. Zwischen den primitiven Reihen, die durch $(a_1, a_2, Q) = 1$ charakterisiert sind, bestehen die linearen Relationen

$$\text{(122)} \quad E^*(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{t \bmod Q} E(\tau, s; (t a_1, t a_2), Q)\, c(s, t, Q)$$

und

$$\text{(123)} \quad E(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{t \bmod Q} E^*(\tau, s; (t a_1, t a_2), Q)\, d(s, t, Q)$$

mit

$$\text{(124)} \quad c(s, t, Q) = \sum_{\substack{tn \equiv 1 (Q) \\ n > 0}} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad d(s, t, Q) = \sum_{\substack{tn \equiv 1 (Q) \\ n > 0}} \frac{1}{n^s},$$

wobei $\mu(n)$ die MÖBIUSsche Funktion bedeutet. Der Beweis ist wie im analytischen Fall (vgl. [5]) zu führen. Die nicht-primitiven Reihen $E(\tau, s; (a_1, a_2), Q)$ mit $(a_1, a_2, Q) = d > 1$ lassen sich wegen

$$\text{(125)} \quad E(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = d^{-s} E\left(\tau, s; \left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}\right), \frac{Q}{d}\right)$$

durch die E^* zur Stufe Q/d ausdrücken; diese wiederum sind durch die E^* zur Stufe Q darzustellen, da allgemein

$$E^*(\tau, s; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{b_i \bmod QQ' \\ b_i \equiv a_i (Q)}} E^*(\tau, s; (b_1, b_2), QQ') \tag{126}$$

gilt. Die lineare Äquivalenz der Reihen E und E^*, die in den in s analytischen Identitäten (122) und (123) zum Ausdruck kommt, kann für spezielle Werte von s verloren gehen, wenn die Koeffizienten $d(s, t, Q)$ singulär werden. Auf der Geraden $\Re s = 1$ ist das für $s = 1$ der Fall. In der Tat ist die Maximalzahl der linear unabhängigen Reihen $E^*(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ kleiner als die der Reihen $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$, wie die folgenden Betrachtungen lehren. Die Regularität der Funktion $c(s, t, Q)$ auf der Geraden $\Re s = 1$ einschließlich $s = 1$, folgt aus der Darstellung

$$c(s, t, Q) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\chi} \frac{\chi(t)}{L(s, \chi)}, \tag{127}$$

wobei über alle Charaktere $\chi \bmod Q$ summiert wird und $\varphi(Q)$ die Eulersche Funktion bedeutet, sowie der Tatsache, daß die L-Reihen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

für $\Re s = 1$ nicht verschwinden. Ferner ist

$$d(s, t, Q) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\chi} L(s, \chi)\, \chi(t). \tag{128}$$

Eine Singularität auf der Geraden $\Re s = 1$ liegt bei diesen Funktionen also nur für $(t, Q) = 1$ im Punkte $s = 1$ vor.

Wir berechnen nun das von x unabhängige Glied $u^*(y, s; (a_1, a_2,), Q)$ in der Fourierentwicklung von $E^*(\tau, s; (a_1, a_2), Q)$. Nach (115) ist

$$\begin{aligned} u^*(y, s; (a_1, a_2), Q) &= \sum_{t \bmod Q} u(y, s; (ta_1, ta_2), Q)\, c(s, t, Q) \\ &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) y^{\frac{s}{2}} \sum_{t \bmod Q} \zeta(s, ta_2, Q)\, c(s, t, Q) + \frac{\sqrt{\pi}}{Q} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} y^{1-\frac{s}{2}} \sum_{t \bmod Q} \zeta(s-1, ta_1, Q)\, c(s, t, Q). \end{aligned} \tag{129}$$

Setzen wir $(a_1, a_2, Q) = 1$ voraus, dann dürfen wir uns bei der Berechnung des Koeffizienten von $y^{\frac{s}{2}}$ in (129) auf $(a_2, Q) = 1$ beschränken, da dieses Glied nur für $a_1 \equiv 0\ (Q)$ wirklich auftritt. Für $(a, Q) = 1$ ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{t \bmod Q} \zeta(s, ta, Q)\, c(s, t, Q) &= \sum_{t \bmod Q} \sum_{\substack{tn \equiv 1 (Q) \\ n > 0}} \sum_{m \equiv ta (Q)} \frac{\mu(n)}{|mn|^s} \\ &= \sum_{\substack{n > 0,\, m \\ n/m,\, m \equiv a (Q)}} \frac{\mu(n)}{|m|^s} = \delta\left(\frac{a-1}{Q}\right) + \delta\left(\frac{a+1}{Q}\right), \end{aligned}$$

so daß

$$u^*(y, s; (a_1, a_2), Q) = \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right)\left(\delta\left(\frac{a_2 - 1}{Q}\right) + \delta\left(\frac{a_2 + 1}{Q}\right)\right) y^{\frac{s}{2}} + \eta(s, a_1, Q)\, y^{1-\frac{s}{2}} \tag{130}$$

wird mit einer gewissen Funktion $\eta(s, a_1, Q)$, von der uns nur interessiert, daß sie auf der Geraden $\Re s = 1$ regulär ist. Wir stellen damit fest, daß in $u^*(y, 1; (a_1, a_2), Q)$ die Funktion $y^{\frac{1}{2}} \log y$ nicht mehr vorkommt. Die Maximalzahl linear unabhängiger Reihen $E^*(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ ist demnach kleiner als die der Reihen $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$. Außerdem folgt aus (130) für $r > 0$, daß

$y^{\frac{1}{2}+ir}$ in $u^*(y, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$ dann und nur dann auftritt, wenn $a_1 \equiv 0$ und $a_2 \equiv 1$ oder $-1 \bmod Q$ ist.

Es sei nun $r > 0$, $(a_1, a_2) = 1$ und $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Substitution aus M derart, daß $S^{-1}\infty$ eine vorgegebene parabolische Spitze eines Fundamentalbereichs von $\mathsf{M}(Q)$ darstellt. Dann verhält sich $E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$ in $\tau = S^{-1}\infty$ so wie

$$E^*(S^{-1}\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q) = E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2)\, S^{-1}, Q)$$

in $\tau = \infty$. $y^{\frac{1}{2}+ir}$ kommt in der Fourierentwicklung von $E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2)\, S^{-1}, Q)$ genau dann vor, wenn

$$a_1 d - a_2 c \equiv 0, \quad -a_1 b + a_2 a \equiv \pm 1 \ (Q),$$

d. h.

$$a_1 \equiv \pm c, \quad a_2 \equiv \pm d \ (Q)$$

ist oder, gleichwertig damit, wenn die parabolischen Spitzen $-\frac{a_2}{a_1}$ und $S^{-1}\infty = -\frac{d}{c}$ nach $\mathsf{M}(Q)$ äquivalent sind. Sei $\sigma(Q)$ die Anzahl der inäquivalenten parabolischen Spitzen von $\mathsf{M}(Q)$. Im Falle $r > 0$ sind dann $\sigma(Q)$ linear unabhängige Eisensteinreihen E^* nachgewiesen. Bekanntlich ist

$$\sigma(Q) = \begin{cases} 1 & \text{für } Q = 1, \\ 3 & \text{für } Q = 2, \\ \dfrac{Q^2}{2} \prod\limits_{p/Q} \left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right) & \text{für } Q > 2. \end{cases} \tag{131}$$

Zwischen den primitiven Reihen $E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q)$, die mit der Gesamtheit aller Eisensteinreihen zur Stufe Q linear äquivalent sind, bestehen nur die Relationen

$$\begin{gathered} E^*(\tau, 1+2ir; (a_1, a_2), Q) = E^*(\tau, 1+2ir; (b_1, b_2), Q) \\ \text{für } a_k \equiv b_k \ (Q) \ \text{ oder } \ a_k \equiv -b_k \ (Q). \qquad (k = 1, 2) \end{gathered} \tag{132}$$

Außerdem verschwindet jede Linearkombination der Eisensteinreihen identisch, wenn sie eine Spitzenfunktion darstellt. Diese Tatsachen folgen unmittelbar aus dem Verhalten der Reihen E^* in den parabolischen Spitzen, wenn man überdies beachtet, daß zwei Spitzen $-\frac{a_2}{a_1}$ und $-\frac{b_2}{b_1}$ mit teilerfremden Zähler und Nenner nach $\mathsf{M}(Q)$ genau dann äquivalent sind, wenn $a_k \equiv \pm b_k \ (Q)$ $(k = 1, 2)$ ist. $\sigma(Q)$ ist offenbar die Maximalzahl linear unabhängiger Eisensteinreihen.

Der Fall $r = 0$ ist erheblich komplizierter. Wenn $\varphi(Q) = 1$ oder 2 ist, dann gibt es unter den primitiven Eisensteinreihen $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ ebenfalls $\sigma(Q)$ linear unabhängige Reihen; denn nach (119) kommt $y^{\frac{1}{2}} \log y$ in der Fourierentwicklung von $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ genau dann vor, wenn $a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv \pm 1 \ (Q)$ ist. Es gelten dann die gleichen Überlegungen wie im Fall $r > 0$. Später werden wir erkennen, daß für $r = 0$ und $\varphi(Q) > 2$, d. h. für $Q \neq 1, 2, 3, 4, 6$, die Maximalzahl linear unabhängiger Eisensteinreihen kleiner als $\sigma(Q)$ ist.

Wir formulieren das gewonnene Teilergebnis.

Satz 8. *Es sei $r > 0$, Q beliebig oder $r = 0$, $\varphi(Q) \leq 2$ (d. h. $Q = 1, 2, 3, 4$ oder 6). Dann ist die Maximalzahl der linear unabhängigen Eisensteinreihen $E(\tau, 1 + 2ir; (a_1, a_2), Q)$ gleich $\sigma(Q)$. Außerdem gibt es in der linearen Schar der Eisensteinreihen keine nicht identisch verschwindenden Spitzenfunktionen.*

Um die linearen Relationen zwischen den Eisensteinreihen im Falle $r = 0$ zu ermitteln, erscheint es zweckmäßig, die Reihen

$$G(\tau, s; a_1, a_2, Q) = \frac{1}{Q} \sum_{b \bmod Q} \zeta^{-a_2 b} E(\tau, s; (a_1, b), Q) \tag{133}$$

einzuführen, die mit den Eisensteinreihen linear äquivalent sind und für $s = 1$ wichtige Symmetrieeigenschaften besitzen (vgl. [4]). Nach (112) wird

$$\begin{aligned} G(\tau, s; a_1, a_2, Q) &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \frac{1}{Q} y^{\frac{s}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\zeta^{-a_2 n}}{|n|^s} \\ &+ \delta\left(\frac{a_2}{Q}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{Q} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(s-1, a_1, Q)\, y^{1-\frac{s}{2}} \\ &+ \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{Q^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n \neq 0} \Biggl\{ \sum_{\substack{d_i \equiv a_i (Q) \\ d_1 d_2 = n}} |d_1|^{\frac{1-s}{2}} |d_2|^{\frac{s-1}{2}} \Biggr\} y^{\frac{1}{2}} K_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q} y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x}. \end{aligned} \tag{134}$$

Mit Hilfe von (119) erhält man daher

$$\begin{aligned} G(\tau, 1; a_1, a_2, Q) &= \frac{2}{Q} \sum_{n \neq 0} \Biggl\{ \sum_{\substack{d_i \equiv a_i (Q) \\ d_1 d_2 = n}} 1 \Biggr\} y^{\frac{1}{2}} K_0\left(\frac{2\pi|n|}{Q} y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} \\ &+ \begin{cases} \frac{2}{Q} y^{\frac{1}{2}} \log y + \frac{2}{Q}\left(C + \log \frac{Q}{4\pi}\right) y^{\frac{1}{2}} & \text{für } a_1 \equiv 0,\ a_2 \equiv 0\ (Q), \\ -\frac{2}{Q} \log\left(2\left|\sin \frac{a_2 \pi}{Q}\right|\right) y^{\frac{1}{2}} & \text{für } a_1 \equiv 0,\ a_2 \not\equiv 0\ (Q), \\ -\frac{2}{Q} \log\left(2\left|\sin \frac{a_1 \pi}{Q}\right|\right) y^{\frac{1}{2}} & \text{für } a_1 \not\equiv 0,\ a_2 \equiv 0\ (Q) \\ 0 & \text{für } a_1 \not\equiv 0,\ a_2 \not\equiv 0\ (Q), \end{cases} \end{aligned} \tag{135}$$

woraus sich die Symmetrierelationen

$$\begin{aligned} G(\tau, 1; a_1, a_2, Q) &= G(\tau, 1; a_2, a_1, Q), \\ G(\tau, 1; a_1, a_2, Q) &= G(\tau, 1; -a_1, -a_2, Q) \end{aligned} \tag{136}$$

ergeben. Um alle untereinander verschiedenen G-Reihen zu erfassen, genügt es also, wenn wir uns auf

$$a_1 = 0,\ 0 \leq a_2 \leq \left[\frac{Q}{2}\right] \text{ und } a_1 = k,\ k \leq a_2 \leq Q - k \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{Q}{2}\right]\right) \tag{137}$$

beschränken. Eine einfache Abzählung ergibt für die Anzahl $A(Q)$ der angegebenen Paare (a_1, a_2) den Wert

$$A(Q) = 1 + \left[\frac{Q}{2}\right]\left[\frac{Q+3}{2}\right]. \tag{138}$$

$A(Q)$ stellt eine obere Schranke für die Maximalzahl der linear unabhängigen Eisensteinreihen dar. Da

$$(139)\qquad \begin{aligned} A(Q) &= \begin{cases} \sigma(Q) & \text{für } Q = 1, 2, 3, \\ \sigma(Q) + 1 & \text{für } Q = 4, 6, \end{cases} \\ A(Q) &< \quad \sigma(Q) \qquad \text{für } Q \neq 1, 2, 3, 4, 6 \end{aligned}$$

ist, wie man leicht feststellt, so bestehen nach Satz 8 in den Fällen $Q = 1, 2, 3$ keine weiteren Relationen außer (136) und für $Q = 4, 6$ gibt es jeweils genau eine, die unter den Symmetrierelationen nicht vorkommt. Solche zusätzlichen Relationen gibt es im allgemeinen, wenn Q nicht gerade eine Primzahl ist, in großer Zahl. Für zwei beliebige natürliche Zahlen t_1 und t_2 ist nämlich

$$(140)\qquad \sum_{\nu \bmod t_1} G(\tau, 1; a_1 + t_2\nu, t_1 a_2, t_1 t_2) = \sum_{\nu \bmod t_1} G(\tau, 1; t_1 a_1, a_2 + t_2\nu, t_1 t_2).$$

Der Beweis ergibt sich sehr einfach durch Vergleich der Koeffizienten in den Fourierentwicklungen der beiden Seiten von (140). Sei $A_n(a_1, a_2)$ der Fourierkoeffizient von $\frac{Q}{2} G(\tau, 1; a_1, a_2, Q)$ zum Exponenten $n \neq 0$; $A_n(a_1, a_2)$ ist nach (135) die Lösungszahl des Systems

$$d_1 \equiv a_1,\ d_2 \equiv a_2\ (Q),\ d_1 d_2 = n.$$

Die Relation (140) ist gleichwertig mit

$$\sum_{\nu \bmod t_1} A_n(a_1 + t_2\nu, t_1 a_2) = \sum_{\nu \bmod t_1} A_n(t_1 a_1, a_2 + t_2\nu). \qquad (Q = t_1 t_2)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die Lösungszahl des Systems

$$d_1 \equiv a_1\ (t_2),\ d_2 \equiv t_1 a_2\ (t_1 t_2),\ d_1 d_2 = n,$$

auf der rechten Seite die von

$$d_1 \equiv t_1 a_1\ (t_1 t_2),\ d_2 \equiv a_2\ (t_2),\ d_1 d_2 = n.$$

Diese Anzahlen stimmen offenbar überein; (140) ist damit bewiesen. Sei $t_1 t_2 = Q$, dann ist die Relation (140) von den Symmetrierelationen unabhängig, außer, wenn $t_1 = 1$ oder $a_2 \equiv \pm a_1\ (t_2)$ ist. Der Beweis hierfür ist elementar und darf übergangen werden. Speziell für $t_1 = t_2 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ erhalten wir

$$(141)\qquad \begin{aligned} 2\,G(\tau, 1; 0, 1, 4) &= G(\tau, 1; 0, 2, 4) + G(\tau, 1; 2, 2, 4), \\ G(\tau, 1; 0, 1, 6) &= G(\tau, 1; 2, 3, 6). \end{aligned}$$

Allgemein gibt es zu jeder zusammengesetzten Stufe $Q = t_1 t_2\ (t_i > 1)$ unter den Relationen (140) mindestens eine, die von den Symmetrierelationen unabhängig ist. Dagegen hat man für Primzahlstufe $Q = q$ in (136) ein vollständiges Relationensystem. Zum Beweis denken wir uns irgend eine Relation gegeben. Von den vier Reihen, die aus $G(\tau, 1; a_1, a_2, Q)$ entstehen, wenn man a_1, a_2 durch $\pm a_1, \pm a_2$ oder $\pm a_2, \pm a_1$ ersetzt, möge höchstens eine in der Relation wirklich auftreten. Zur Abkürzung setzen wir $[a_1, a_2] = G(\tau, 1; a_1, a_2, Q)$. Sei p eine beliebige Primzahl. Der Fourierkoeffizient zum Exponenten p ist offenbar nur für die Reihe $[1, p]$ von Null verschieden. $[1, p]$ darf also in der Relation nicht vorkommen. Nach dem DIRICHLETschen Satz über die Primzahlen in arithmetischen Progressionen kann p eine beliebige zu q prime Restklasse mod q repräsentieren; natürlich ist auch $p = q$ zulässig, woraus erhellt, daß sämtliche Reihen $[1, a]$ (a beliebig) in der Relation nicht auftreten. Der Fourierkoeffizient zum Exponenten pp' ist nur für die Reihen $[1, pp']$ und $[p, p']$ von Null verschieden, wenn p und p' beliebige Primzahlen bedeuten. Da $[1, pp']$ in der Relation nicht vorkommt, kann auch $[p, p']$ nicht auftreten. Bei geeigneter Wahl von p und p' stellt $[p, p']$ eine vorgegebene G-Reihe dar. Unsere Relation ist also leer und damit die Vollständigkeit des Relationensystems (136) für $Q = q$ bewiesen. Es gilt somit

Satz 9. *Die Maximalzahl der linear unabhängigen Eisensteinreihen $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ ist gleich $\sigma(Q)$ für $Q = 1, 2, 3, 4, 6$ und kleiner $\sigma(Q)$ für alle übrigen Q, insbesondere gleich $\left(\frac{Q+1}{2}\right)^2$ für Primzahlstufe $Q \geqq 3$ und kleiner oder gleich $\left[\frac{Q}{2}\right]\left[\frac{Q+3}{2}\right]$ für alle zusammengesetzten Stufen $Q \geqq 4$.*

Die Frage, ob eine vorgegebene Wellenfunktion zur Stufe Q mit Hilfe der Eisensteinreihen auf eine Spitzenfunktion reduziert werden kann, ist unter den Voraussetzungen von Satz 8 zu bejahen. Der Beweis dieses sogenannten Reduktionssatzes stützt sich im wesentlichen auf

Satz 10. *Es sei G eine Untergruppe der Modulgruppe M von endlichem Index. Die Substitutionen $A_\varrho \subset \mathsf{M}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$ seien derart bestimmt, daß $A_1^{-1}\infty, A_2^{-1}\infty, \ldots, A_\sigma^{-1}\infty$ ein vollständiges System von inäquivalenten parabolischen Spitzen eines Fundamentalbereiches von G darstellt. Jeder gegenüber den Substitutionen von G invarianten Wellenfunktion $g(\tau)$ mit den σ Entwicklungen*

$$g(A_\varrho^{-1}\tau) = u_\varrho(y) + \sum_{n \neq 0} a_\varrho(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q_\varrho}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q_\varrho} x} \tag{142}$$

ordnen wir den Vektor $\mathfrak{u} = \{u_1(y), u_2(y), \ldots, u_\sigma(y)\}$ zu. In der linearen Schar dieser Vektoren gibt es höchstens σ linear unabhängige.

Beweis. Wir denken uns eine zweite automorphe Funktion $h(\tau)$ mit den Entwicklungen

$$h(A_\varrho^{-1}\tau) = v_\varrho(y) + \sum_{n \neq 0} b_\varrho(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q_\varrho}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q_\varrho} x} \tag{143}$$

gegeben und wenden den Greenschen Satz

$$\iint_{\mathfrak{B}} (V(\tau) \triangle U(\tau) - U(\tau) \triangle V(\tau))\, dx\, dy = \int_{\mathfrak{R}} \left(V(\tau) \frac{\partial U(\tau)}{\partial n} - U(\tau) \frac{\partial V(\tau)}{\partial n}\right) ds, \tag{144}$$

wobei $\mathfrak{R}$ den Rand eines Bereichs $\mathfrak{B}$ und n die nach außen weisende Normale auf dem Rand von $\mathfrak{B}$ bedeutet, auf $U(\tau) = g(\tau)$ und $V(\tau) = h(\tau)$ an. $\mathfrak{B}$ sei speziell der Bereich, der aus dem Fundamentalbereich (71) entsteht, wenn man die σ parabolischen Spitzen längs gewisser Querschnitte abschneidet. In $\mathfrak{P}_\varrho$ wähle man einen solchen Querschnitt, der durch A_ϱ in die Strecke $|x| \leqq \frac{1}{2} Q_\varrho$, $y = y_\varrho$ $(\geqq \varkappa)$ übergeführt wird. Da $g(\tau)$ und $h(\tau)$ Wellenfunktionen sind, verschwindet das Flächenintegral in (144). Im Randintegral bleiben nur die Beiträge zu den Querschnitten stehen; denn der Rand $\mathfrak{R}$ besteht, wenn man von den Querschnitten absieht, aus paarweise äquivalenten Stücken und die Beiträge des Randintegrals zu solchen heben sich offenbar auf. Wenn wir im Integral über den ϱ-ten Querschnitt die Variablentransformation $\tau \to A_\varrho^{-1}\tau$ vornehmen, erhalten wir schließlich

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \int_{-\frac{1}{2}Q_\varrho}^{\frac{1}{2}Q_\varrho} \left(h(A_\varrho^{-1}\tau) \frac{\partial g(A_\varrho^{-1}\tau)}{\partial y} - g(A_\varrho^{-1}\tau) \frac{\partial h(A_\varrho^{-1}\tau)}{\partial y}\right)_{y=y_\varrho} dx.$$

Trägt man hierin die Fourierentwicklungen (142) und (143) ein, so ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung der Integralrelation; es wird nämlich

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \int_{-\frac{1}{2} Q_\varrho}^{\frac{1}{2} Q_\varrho} \left(v_\varrho(y_\varrho) \frac{d u_\varrho(y_\varrho)}{d y_\varrho} - u_\varrho(y_\varrho) \frac{d v_\varrho(y_\varrho)}{d y_\varrho} \right) d x,$$

also

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} Q_\varrho \left(v_\varrho(y_\varrho) \frac{d u_\varrho(y_\varrho)}{d y_\varrho} - u_\varrho(y_\varrho) \frac{d v_\varrho(y_\varrho)}{d y_\varrho} \right).$$

Da die Lage der Querschnitte, d. h. die Ordinaten y_ϱ unabhängig voneinander sind, ist

$$c_\varrho = v_\varrho(y) \frac{d u_\varrho(y)}{d y} - u_\varrho(y_\varrho) \frac{d v_\varrho(y)}{d y} \tag{145}$$

notwendig konstant. Die c_ϱ genügen der Relation

$$\sum_{\varrho=1}^{\sigma} Q_\varrho c_\varrho = 0. \tag{146}$$

Die Konstanz der c_ϱ folgt auch unmittelbar aus der Tatsache, daß $u_\varrho(y)$ und $v_\varrho(y)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d y^2} + \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{y^2} w = 0$$

genügen. Aus der Darstellung

$$(147)\qquad \begin{aligned} u_\varrho(y) &= \begin{cases} a'_\varrho y^{\frac{1}{2}+ir} + a''_\varrho y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für } r > 0, \\ a'_\varrho y^{\frac{1}{2}} \log y + a''_\varrho y^{\frac{1}{2}} & \text{für } r = 0, \end{cases} \\ v_\varrho(y) &= \begin{cases} b'_\varrho y^{\frac{1}{2}+ir} + b'_\varrho y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für } r > 0, \\ b'_\varrho y^{\frac{1}{2}} \log y + b''_\varrho y^{\frac{1}{2}} & \text{für } r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ergibt sich in der Tat

$$c_\varrho = \begin{cases} 2 i r (a'_\varrho b''_\varrho - a''_\varrho b'_\varrho) & \text{für } r > 0, \\ a'_\varrho b''_\varrho - a''_\varrho b'_\varrho & \text{für } r = 0. \end{cases} \tag{148}$$

Allgemein gilt also

$$\sum_{\varrho=1}^{\sigma} Q_\varrho (a'_\varrho b''_\varrho - a''_\varrho b'_\varrho) = 0. \tag{149}$$

Bezeichnen wir die mit den Komponenten

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_\sigma, a''_1, a''_2, \ldots, a''_\sigma$$

und

$$b'_1, b'_2, \ldots, b'_\sigma, b''_1, b''_2, \ldots, b''_\sigma$$

gebildeten Spaltenvektoren mit $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ und führen die quadratische Matrix

$$X = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & Q_1 & & & \\ & & & & & Q_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & Q_\sigma \\ \hline -Q_1 & & & & & & & \\ & -Q_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -Q_\sigma & & & & \end{array} \right) \tag{150}$$

ein, wobei in die nicht ausgefüllten Stellen Nullen zu setzen sind, so lautet die Bilinearrelation (149) in Matrizenschreibweise

$$(151) \qquad \mathfrak{a}' X \mathfrak{b} = 0.$$

Sei nun $g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_\mu(\tau)$ ein maximales System von automorphen Wellenfunktionen, für welche die zugeordneten Konstantenvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu$ linear unabhängig sind, dann sind sämtliche $\mathfrak{a}_\varrho$ Lösungen des Gleichungssystems

$$(152) \qquad \mathfrak{a}_\iota' X \mathfrak{x} = 0. \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

Der Rang dieses Systems ist einerseits gleich μ, die Dimension des Lösungsgebildes andererseits mindestens gleich μ, so daß $\mu \leqq 2\sigma - \mu$ oder $\mu \leqq \sigma$ wird. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Unter den Voraussetzungen von Satz 8 gibt es $\sigma(Q)$ linear unabhängige Eisensteinreihen $E_1, E_2, \ldots, E_{\sigma(Q)}$. Die im Sinne von Satz 10 den Eisensteinreihen zugeordneten Vektoren $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_{\sigma(Q)}$ sind linear unabhängig, da in der linearen Schar der E_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma(Q))$ keine nicht identisch verschwindende Spitzenfunktion enthalten ist. Nach Satz 10 bilden die Vektoren $\mathfrak{u}_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$ eine Basis in der linearen Schar aller möglichen derartigen Vektoren, woraus der Reduktionssatz folgt:

Satz 11. *Es sei entweder $r > 0$, Q beliebig oder $r = 0$, $\varphi(Q) \leqq 2$ (d. h. $Q = 1, 2, 3, 4$ oder 6), dann gibt es zu jeder gegenüber $\mathsf{M}(Q)$ invarianten Wellenfunktion $g(\tau)$, die in den parabolischen Spitzen Fourierentwicklungen der Art (142) besitzt, eine Linearkombination $\Lambda(\tau)$ der Eisensteinreihen zur Stufe Q, so daß $g(\tau) - \Lambda(\tau)$ eine Spitzenfunktion darstellt.*

Für $r = 0$ können die automorphen Wellenfunktionen zur Modulgruppe und zur Thetagruppe sofort angegeben werden, da es nach Satz 6 keine Spitzenfunktionen zu diesen Gruppen und $r = 0$ gibt. Auf Grund von Satz 11 stimmt jede automorphe Funktion zur Stufe 1 mit $E(\tau, 1; (0, 0), 1)$ bis auf einen konstanten Faktor überein. Sei nun $g(\tau)$ eine gegenüber T invariante Wellenfunktion zu $r = 0$. Wegen $\mathsf{M}(2) \subset \mathsf{T}$ gibt es nach Satz 11 eine Linearkombination $\Lambda(\tau)$ der Eisensteinreihen zur Stufe 2, so daß $f(\tau) = g(\tau) - \Lambda(\tau)$ eine Spitzenfunktion zur Stufe 2 darstellt. Da T die Zerlegung

$$\mathsf{T} = \mathsf{M}(2) + \mathsf{M}(2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gestattet, so ist die Spitzenfunktion $f(\tau) + f\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ gegenüber T invariant, also identisch gleich Null. Es ergibt sich somit $g(\tau) = \frac{1}{2}\left(\Lambda(\tau) + \Lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)$. Die automorphen Funktionen zu T bestehen also aus den Linearkombinationen der Reihensummen

$$E(\tau, 1; (a_1, a_2), 2) + E(\tau, 1; (a_2, a_1), 2),$$

wobei $(a_1, a_2, 2) = 1$ angenommen werden darf. Die linear unabhängigen Funktionen

$$(153) \quad E_1(\tau) = E(\tau, 1; (0, 1), 2) + E(\tau, 1; (1, 0)\, 2), \quad E_2(\tau) = E(\tau, 1; (1, 1), 2)$$

bilden demnach eine Basis der linearen Schar aller $g(\tau)$. Sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n, dann findet man nach (112) und (119) die Entwicklungen

$$(154)\quad \begin{aligned} E_1(\tau) + E_2(\tau) &= \tfrac{1}{2} E(\tau, 1; (0,0), 1) = y^{\frac{1}{2}} \log y + (C - \log 4\pi)\, y^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \sum_{n \neq 0} d(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi |n| y)\, e^{2\pi i n x}, \\ 3E_1(\tau) + 2E_2(\tau) &= 3 y^{\frac{1}{2}} \log y + (3(C - \log 4\pi) + \log 2)\, y^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \sum_{n \neq 0} d(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_0(\pi |n| y)\, e^{\pi i n x} + 4 \sum_{n \neq 0} d(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_0(4\pi |n| y)\, e^{4\pi i n x}. \end{aligned}$$

Die den Funktionen $E(\tau, 1; (0,0), 1)$, $E_1(\tau) + E_2(\tau)$, $3E_1(\tau) + 2E_2(\tau)$ nach der Vorschrift (32), (33) zugeordneten φ-Reihen lauten

$$(155)\qquad 8\,\zeta^2(s), \quad 4 \cdot 2^{-s} \zeta^2(s), \quad 4(1 + 2^{1-2s})\, \zeta^2(s),$$

während die ψ-Reihen sämtlich verschwinden. Satz 2 ist damit bewiesen.

Bevor wir auf die speziellen Verhältnisse eingehen, die im Fall $Q = 5$, $r = 0$ vorliegen, schicken wir noch einige allgemeine Betrachtungen voraus. Zwischen den primitiven Eisensteinreihen E und E^* zur Stufe Q bestehen zufolge (122) und (127) die leicht beweisbaren Identitäten

$$(156)\qquad \sum_{\substack{t \bmod Q \\ (t,Q)=1}} E^*(\tau, s; (ta_1, ta_2), Q) = \frac{1}{L(s, \chi_1)} \sum_{\substack{t \bmod Q \\ (t,Q)=1}} E(\tau, s; (ta_1, ta_2), Q),$$

wobei χ_1 den Einheitscharakter mod Q bedeutet. Für $s = 1$ erhält man also

$$(157)\qquad \sum_{\substack{t \bmod Q \\ (t,Q)=1}} E^*(\tau, 1; (ta_1, ta_2), Q) = 0.$$

Wir nennen zwei parabolische Spitzen $-\frac{a_2}{a_1}$ und $-\frac{b_2}{b_1}$ mit teilerfremden Zähler und Nenner mod Q assoziiert, wenn es eine zu Q teilerfremde Zahl k gibt, so daß

$$(158)\qquad a_i \equiv k\, b_i\ (Q) \ \text{ für } \ i = 1, 2$$

gilt. Die Anzahl der bezüglich $\mathsf{M}(Q)$ nicht äquivalenten parabolischen Spitzen in einer Klasse mod Q assozierter Spitzen ist offenbar gleich 1 für $Q = 1, 2$ und gleich $\frac{1}{2}\varphi(Q)$ für $Q > 2$, so daß wir für die Anzahl der Klassen mod Q nicht assoziierter parabolischer Spitzen nach (131) den Ausdruck

$$(159)\qquad \sigma_0(Q) = Q \prod_{p/Q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

erhalten. Es seien A und B zwei Substitutionen aus M mit den zweiten Zeilen (a_1, a_2) und (b_1, b_2); $A^{-1}\infty$ und $B^{-1}\infty$ sind mod Q genau dann assoziiert, wenn (158) mit $(k, Q) = 1$ erfüllt werden kann. In der Fourierentwicklung der primitiven Reihe $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ mit $(a_1, a_2) = 1$ zur Spitze $B^{-1}\infty$ $(B \subset \mathsf{M})$ tritt die Funktion $y^{\frac{1}{2}} \log y$ dann und nur dann auf, wenn $B^{-1}\infty$ und $-\frac{a_2}{a_1}$ mod Q assoziiert sind; denn $E(\tau, 1; (a_1, a_2), Q)$ verhält sich für $\tau \to B^{-1}\infty$ so wie $E(\tau, 1; (a_1, a_2) B^{-1}, Q)$ für $\tau \to \infty$ und in der Fourierentwicklung dieser Reihe zur Spitze ∞ tritt $y^{\frac{1}{2}} \log y$ nach (119) genau dann auf, wenn $(a_1, a_2) B^{-1} \equiv (0, k)$ oder $(a_1, a_2) \equiv (0, k) B\ (Q)$ mit $(k, Q) = 1$ gilt. Wir bestimmen nun $\sigma_0(Q)$ Substitutionen $B_\varrho \subset \mathsf{M}$ derart, daß $B_\varrho^{-1}\infty$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma_0(Q))$ mod Q nicht assoziiert sind. Bezeichnen wir mit $\underline{B}_\varrho$ die zweite Zeile von B_ϱ, dann sind die Reihen

$$(160)\qquad E(\tau, 1; \underline{B}_\varrho, Q) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma_0(Q))$$

linear unabhängig, wie aus ihrem Verhalten in den parabolischen Spitzen unmittelbar hervorgeht. Unter den $\sigma(Q)$ Reihen $E^*(\tau, 1;\, k\,\underline{B}_\varrho, Q)$ $\left(k = 1\right.$ für $Q = 1, 2$ und $1 \leq k < \frac{Q}{2}$, $\left.(k, Q) = 1 \text{ für } Q > 2\right)$ gibt es wegen der Relationen (157) höchstens $\sigma(Q) - \sigma_0(Q)$ linear unabhängige. Da in den Fourierentwicklungen der E^* die Funktion $y^{\frac{1}{2}} \log y$ nicht auftritt, sind die E^* von den Reihen (160) unabhängig.

Wir beschränken uns nun auf die Stufe $Q = 5$. Es ist dann $\sigma = 12$, $\sigma_0 = 6$. Die Substitutionen

$$(161)\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

mögen in gleicher Reihenfolge mit $B_1, B_2, \ldots, B_6$ bezeichnet werden. Eine solche Wahl der B_ϱ ist zulässig; denn die parabolischen Spitzen $B_\varrho^{-1}\infty$ sind in der Tat mod 5 nicht assoziiert. Das Relationensystem (157) nimmt hier die Gestalt

$$(162)\qquad E^*(\tau, 1;\, \underline{B}_\varrho, 5) + E^*(\tau, 1;\, 2\,\underline{B}_\varrho, 5) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, 6)$$

an. Da es genau neun linear unabhängige Eisensteinreihen zur Stufe 5 gibt, und die sechs Reihen (160) unabhängig sind, kann es unter den Funktionen

$$(163)\qquad F_\varrho(\tau) = E^*(\tau, 1;\, \underline{B}_\varrho, 5) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, 6)$$

nur noch höchstens drei linear unabhängige geben. Die Bestimmung der linearen Relationen zwischen den $F_\varrho(\tau)$ kann in der Weise vorgenommen werden, daß man diese Funktionen durch die G-Reihen ausdrückt und beachtet, daß das Relationensystem (136) für die G-Reihen zur Primzahlstufe vollständig ist. Zur Durchführung der Rechnung benötigen wir die Werte

$$(164)\quad c(1, k, 5) + c(1, -k, 5) = \left(\frac{k}{5}\right) \frac{1}{2\,L\left(1, \left(\frac{x}{5}\right)\right)} = \left(\frac{k}{5}\right) \frac{\sqrt{5}}{4 \log \varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

die wir in die Darstellung

$$\begin{aligned} E^*(\tau, 1;\, \underline{B}_\varrho, 5) &= E(\tau, 1;\, \underline{B}_\varrho, 5)\,(c(1, 1, 5) + c(1, -1, 5)) \\ &\quad + E(\tau, 1;\, 2\,\underline{B}_\varrho, 5)\,(c(1, 2, 5) + c(1, -2, 5)) \end{aligned}$$

eintragen, so daß

$$(165)\qquad F_\varrho(\tau) = \frac{\sqrt{5}}{4 \log \varepsilon}\,(E(\tau, 1;\, \underline{B}_\varrho, 5) - E(\tau, 1;\, 2\,\underline{B}_\varrho, 5))$$

wird. So gelangt man schließlich zu der Erkenntnis, daß die Funktionen $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$, $F_3(\tau)$ linear unabhängig sind und daß die Relationen

$$(166)\qquad \begin{aligned} F_4(\tau) &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,(F_1(\tau) + F_3(\tau)) - F_2(\tau), \\ F_5(\tau) &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\,(F_2(\tau) + F_3(\tau)) + F_1(\tau), \\ F_6(\tau) &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,(F_1(\tau) + F_2(\tau)) - F_3(\tau) \end{aligned}$$

bestehen. Auf Grund der Transformationsformeln (107), die auch für die E^*-Reihen gelten, wird

$$F_1(\tau+1)=F_1(\tau),\ F_2(\tau+1)=F_3(\tau),\ F_3(\tau+1)=F_4(\tau),$$
$$F_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)=F_2(\tau),\ F_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)=F_1(\tau),\ F_3\left(-\frac{1}{\tau}\right)=F_6(\tau)$$

und damit nach (166)

$$(167)\quad (F_\varrho(\tau+1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-\varepsilon'&-1&-\varepsilon'\end{pmatrix}(F_\varrho(\tau)),\quad \left(F_\varrho\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-\varepsilon'&-\varepsilon'&-1\end{pmatrix}(F_\varrho(\tau))$$

mit $\varepsilon'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $\varrho=1,2,3$. Die Eigenfunktionen in der linearen Schar der $F_\varrho(\tau)$ zur Substitution $\tau\to\tau+1$ stimmen bis auf konstante Faktoren mit den Funktionen

$$(168)\qquad (G_\varrho(\tau))=\begin{pmatrix}2(\zeta-\zeta^{-1})&0&0\\\zeta^{-1}-1&-\sqrt{5}\,\zeta^{-1}&\sqrt{5}\\1-\zeta&\sqrt{5}\,\zeta&-\sqrt{5}\end{pmatrix}(F_\varrho(\tau))\qquad \left(\zeta=e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$$

überein und transformieren sich gemäß (167) nach den Formeln

$$(169)\quad (G_\varrho(\tau+1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\zeta&0\\0&0&\zeta^{-1}\end{pmatrix}(G_\varrho(\tau)),\ \left(G_\varrho\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&\zeta^2+\zeta^{-2}&\zeta+\zeta^{-1}\\1&\zeta+\zeta^{-1}&\zeta^2+\zeta^{-2}\end{pmatrix}(G_\varrho(\tau)).$$

Die Wellenfunktionen $g(\tau,\varrho,(1),1,\sqrt{5})$ $(\varrho=0,1,2)$ zum System der Zetafunktionen $\zeta_\nu(\tau,\varrho,(1),1,\sqrt{5})$ $(\nu=0,1;\varrho=0,1,2)$ genügen ebenfalls den Funktionalgleichungen (169) und es ist zu vermuten, daß sie mit den $G_\varrho(\tau)$ $(\varrho=1,2,3)$ bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor übereinstimmen. Das ist in der Tat richtig, wie wir nun beweisen werden. Die Transformationsformeln des Funktionensystems

$$(170)\qquad G_1^*(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}G_1(\tau),\ G_2^*(\tau)=G_2(\tau),\ G_3^*(\tau)=G_3(\tau)$$

lauten

$$(171)\quad (G_\varrho^*(\tau+1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\zeta&0\\0&0&\zeta^{-1}\end{pmatrix}(G_\varrho(\tau)),\ \left(G_\varrho^*\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\zeta^2+\zeta^{-2}&\zeta+\zeta^{-1}\\\sqrt{2}&\zeta+\zeta^{-1}&\zeta^2+\zeta^{-2}\end{pmatrix}(G_\varrho^*(\tau))$$

und definieren offenbar eine unitäre Darstellung

$$(172)\qquad (G_\varrho^*(S\tau))=A_S(G_\varrho^*(\tau)),\ \overline{A_S}A_S'=E\ \text{ für }\ S\subset\mathsf{M}$$

der Modulargruppe $\mathsf{M}/\mathsf{M}(5)$. Sei nun $g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)$ ein beliebiges Lösungssystem der Funktionalgleichungen (171). Der Spaltenvektor $\mathfrak{g}(\tau)$ mit den Komponenten $g_\varrho(\tau)$ genügt der Transformationsformel

$$(173)\qquad \mathfrak{g}(S\tau)=A_S\,\mathfrak{g}(\tau)\ \text{ für }\ S\subset\mathsf{M}$$

und gestattet eine Entwicklung der Art

$$(174)\qquad \mathfrak{g}(\tau)=\mathfrak{u}(y)+\sum_{n\neq0}\mathfrak{a}_n\,y^{\frac12}K_0\left(\frac{2\pi|n|}{5}y\right)e^{\frac{2\pi i n}{5}x}.$$

Es handelt sich hierbei um die Zusammenfassung von drei Fourierentwicklungen zu einer Vektorreihe. Der Spaltenvektor $\mathfrak{h}(\tau)$ mit der Entwicklung

$$(175)\qquad \mathfrak{h}(\tau)=\mathfrak{v}(y)+\sum_{n\neq0}\mathfrak{b}_n\,y^{\frac12}K_0\left(\frac{2\pi|n|}{5}y\right)e^{\frac{2\pi i n}{5}x}$$

sei eine weitere Lösung von (173). Da die Darstellungsmatrizen A_S unitär sind, ist $\bar{\mathfrak{g}}'(\tau)\, d\, \mathfrak{h}(\tau)$ bezüglich $S \subset \mathsf{M}$ invariant. Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{u}(y)$ und $\mathfrak{v}(y)$ sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, ziehen wir den Greenschen Satz (144) in der Form

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}} (\bar{\mathfrak{g}}' \Delta \mathfrak{h} - \mathfrak{h}' \Delta \bar{\mathfrak{g}})\, dx\, dy = \int\limits_{\mathfrak{R}} \left(\bar{\mathfrak{g}}' \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial n} - \mathfrak{h}' \frac{\partial \bar{\mathfrak{g}}}{\partial n}\right) ds \tag{176}$$

heran. $\mathfrak{B}$ entstehe aus der Modulfigur durch Abtrennen der parabolischen Spitze und werde durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \geqq 1$, $|x| \leqq \frac{1}{2}$, $y \leqq y_0$ beschrieben. Das Flächenintegral verschwindet, da die Komponenten von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Wellenfunktionen zu gleicher Wellenzahl darstellen. Im Randintegral über $\mathfrak{R}$ heben sich die Teilintegrale über äquivalente Randstücke heraus wegen der genannten Invarianzeigenschaft von $\bar{\mathfrak{g}}'\, d\, \mathfrak{h}$, so daß

$$\int\limits_0^1 \left(\bar{\mathfrak{g}}' \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial y} - \mathfrak{h}' \frac{\partial \bar{\mathfrak{g}}}{\partial y}\right) dx = 0$$

verbleibt. Bei Berücksichtigung der Fourierentwicklungen (174) und (175) ergibt sich somit

$$\bar{\mathfrak{u}}' \frac{d\, \mathfrak{v}}{d\, y} - \mathfrak{v}' \frac{d\, \bar{\mathfrak{u}}}{d\, y} = 0. \tag{177}$$

Wegen der beiden von 1 verschiedenen Diagonalelemente in der Substitution A_S zu $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ darf von vornherein

$$\mathfrak{u}(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{v}(y) = \begin{pmatrix} v_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

angenommen werden, so daß (177) in die Bedingung

$$\overline{u_1(y)} \frac{d\, v_1(y)}{d\, y} - v_1(y) \frac{d\, \overline{u_1(y)}}{d\, y} = 0 \tag{178}$$

übergeht. Unter der Voraussetzung $u_1(y) \neq 0$ ist demnach $\dfrac{v_1(y)}{\overline{u_1(y)}}$ konstant. Speziell für $\mathfrak{g}(\tau) = \mathfrak{h}(\tau)$ folgt die Konstanz von $\dfrac{u_1(y)}{\overline{u_1(y)}}$ und damit auch von $\dfrac{v_1(y)}{u_1(y)}$, q. e. d. Nach Satz 7 ist $\mathfrak{g}(\tau)$ als Lösung der Funktionalgleichung (173) durch $\mathfrak{u}(y)$ eindeutig bestimmt und ist daher überhaupt bis auf einen konstanten Faktor festgelegt. Ein entsprechendes Resultat gilt für das System $G_\varrho(\tau)$ ($\varrho = 1, 2, 3$). Satz 3 ist also bewiesen. Insbesondere ergeben sich noch die Darstellungen

$$\begin{aligned} g(\tau, 0, (1), 1, \sqrt{5}) &= C_0\, G_1(\tau), \\ g(\tau, 1, (1), 1, \sqrt{5}) &= C_0\, G_2(\tau), \\ g(\tau, 2, (1), 1, \sqrt{5}) &= C_0\, G_3(\tau) \end{aligned} \tag{179}$$

mit einer gewissen Konstanten C_0, für welche man den Wert

$$C_0 = \frac{4 \log \varepsilon}{\zeta - \zeta^{-1}} \tag{180}$$

erhält, wenn man die Fourierentwicklungen der Funktionen miteinander vergleicht. Werden die Identitäten (179) in dieser Weise explizit geprüft, so erhält man für die Funktionalgleichungen des Systems der Funktionen $g(\tau, \varrho, (1), 1, \sqrt{5})$ ($\varrho = 0, 1, 2$) einen neuen Beweis, der von den Thetareihen in zwei Variablen keinen Gebrauch macht, wohl aber von der mit dem Zerlegungsgesetz der Primideale in $R(\sqrt{D})$ für $D = 5$ gleichwertigen Beziehung

$$\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{a} = n} 1 = \sum_{d/n,\, d > 0} \left(\frac{D}{d}\right). \qquad (n > 0) \tag{181}$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale aus $R(\sqrt{D})$ mit der Norm n. Lineare Relationen von der Art (179) sind mit Hilfe von (181) auch für beliebige Diskriminanten $D > 0$ nachweisbar. Allgemein gilt nämlich

$$\sum_{\{\mathfrak{a}\}} g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) = \frac{D\, l_1}{2\, l_0} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) G(\tau, 1; 0, a, D), \tag{182}$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein volles System von Repräsentanten der engeren Idealklassen in $R(\sqrt{D})$ durchläuft und $\frac{l_1}{l_0}$ die Anzahl der total positiven, mod $\sqrt{D}$ inkongruenten Einheiten in $R(\sqrt{D})$ bedeutet. Der Beweis dieser Identität beansprucht ein besonderes Interesse, da er als Nebenresultat die DIRICHLETsche Klassenzahlformel

$$h = -\frac{1}{2 \log \varepsilon} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \log \sin \frac{a\pi}{D} \tag{183}$$

mitliefert. Nach (135) erhält man einerseits

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) G(\tau, 1; 0, a, D) = &-\frac{2}{D} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \left(\log \sin \frac{a\pi}{D}\right) y^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{8}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{d/n,\, d>0}{}' \left(\frac{D}{d}\right) \right\} y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi n y) \cos(2\pi n x), \end{aligned} \tag{184}$$

andererseits wird nach (29)

$$g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) = 2\, l_1\, y^{\frac{1}{2}} + \frac{l_1}{l_0} \sum_{\substack{\mu \equiv 0(\mathfrak{a}) \\ (\mu)_{p_\infty},\, \mu \neq 0}} y^{\frac{1}{2}} K_0\left(\frac{2\pi |\mathrm{N}\mu|}{A} y\right) e^{-\frac{2\pi i \mathrm{N}\mu}{A} x}, \tag{185}$$

wobei $l_0 = \frac{1}{2} \log \varepsilon_0$ ist und $\varepsilon_0 (> 1)$ die Gruppe der total positiven Einheiten in $R(\sqrt{D})$ erzeugt. Sei allgemein $\mathfrak{K}_\mathfrak{a}$ die engere Idealklasse in $R(\sqrt{D})$, die durch $\mathfrak{a}$ repräsentiert wird. Wenn die Norm der Grundeinheit $\mathrm{N}\varepsilon = -1$ ist, kann die Reihe (185) in die Form

$$g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) = 2\, l_1\, y^{\frac{1}{2}} + \frac{4\, l_1}{l_0} \sum_{\mathfrak{b} \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^{-1}}} y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi \mathrm{N}\mathfrak{b}\, y) \cos(2\pi \mathrm{N}\mathfrak{b}\, x) \tag{186}$$

gebracht werden, während sich im Fall $\mathrm{N}\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) = 2\, l_1\, y^{\frac{1}{2}} + \frac{2\, l_1}{l_0} \Big\{ &\sum_{\mathfrak{b} \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^{-1}}} y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi \mathrm{N}\mathfrak{b}\, y)\, e^{2\pi i \mathrm{N}\mathfrak{b}\, x} \\ &+ \sum_{\mathfrak{b} \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}^{-1}\sqrt{D}}} y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi \mathrm{N}\mathfrak{b}\, y)\, e^{-2\pi i \mathrm{N}\mathfrak{b}\, x} \Big\} \end{aligned} \tag{187}$$

ergibt. In beiden Fällen resultiert also

$$\begin{aligned} &\sum_{\{\mathfrak{a}\}} g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) \\ &\quad = \frac{2\, l_1}{l_0} \left\{ h\, y^{\frac{1}{2}} \log \varepsilon + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{b} = n} 1 \right) y^{\frac{1}{2}} K_0(2\pi n y) \cos(2\pi n x) \right\}, \end{aligned} \tag{188}$$

wenn wir mit h die Anzahl der gewöhnlichen Idealklassen bezeichnen, so daß nach (184)

$$\sum_{\{\mathfrak{a}\}} g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D}) = \frac{2\, l_1}{l_6} \left\{\left(h \log \varepsilon + \tfrac{1}{2} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \log \sin \frac{a\,\pi}{D}\right) y^{\frac{1}{2}} + \frac{D}{4} \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) G(\tau, 1; 0, a, D)\right\} \tag{189}$$

wird. Diese Relation zerfällt in die Gleichungen (182) und (183), da die $g(\tau, 0, \mathfrak{a}, 1, \sqrt{D})$ und $G(\tau, 1; 0, a, D)$ automorphe Funktionen zur Stufe D darstellen.

Schließlich bestimmen wir noch die lineare Schar der den Eisensteinreihen für $r \geqq 0$ zugeordneten Paare von Dirichletreihen. Der Reihe $G(\tau, 1 + 2\,i\,r; a_1, a_2, Q)$ entspricht nach (134), abgesehen von einem konstanten Faktor, das Funktionenpaar

$$\sum_{n \neq 0} \left\{ \sum_{\substack{d_k \equiv a_k (Q) \\ d_1 d_2 = n}} |d_1|^{-ir} |d_2|^{ir} \right\} |n|^{-s}, \quad \sum_{n \neq 0} \operatorname{sgn} n \left\{ \sum_{\substack{d_k \equiv a_k (Q) \\ d_1 d_2 = n}} |d_1|^{-ir} |d_2|^{ir} \right\} |n|^{-s}.$$

Hierfür kann

$$\sum_{\substack{n \equiv a_1 (Q) \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|^{s+ir}} \sum_{\substack{n \equiv a_2 (Q) \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|^{s-ir}}, \quad \sum_{\substack{n \equiv a_1 (Q) \\ n \neq 0}} \frac{\operatorname{sgn} n}{|n|^{s+ir}} \sum_{\substack{n \equiv a_2 (Q) \\ n \neq 0}} \frac{\operatorname{sgn} n}{|n|^{s-ir}} \tag{190}$$

geschrieben werden. Sei nun $(a_i, Q) = t_i > 0$, $a_i = t_i\, b_i$ und χ_i ein beliebiger Charakter mod $\frac{Q}{t_i}$ $(i = 1, 2)$. Multipliziert man die Produkte (190) mit $\chi_1(b_1)\, \chi_2(b_2)$ und summiert über b_i mod $\frac{Q}{t_i}$ $(i = 1, 2)$, so erhält man bis auf einen konstanten Faktor

$$\frac{1}{(t_1 t_2)^s} \sum_{n \neq 0} \frac{\chi_1(n)}{|n|^{s+ir}} \sum_{n \neq 0} \frac{\chi_2(n)}{|n|^{s-ir}}, \quad \frac{1}{(t_1 t_2)^s} \sum_{n \neq 0} \frac{(\operatorname{sgn} n)\, \chi_1(n)}{|n|^{s+ir}} \sum_{n \neq 0} \frac{(\operatorname{sgn} n)\, \chi_2(n)}{|n|^{s-ir}}. \tag{191}$$

Alle möglichen Funktionenpaare dieser Art sind offenbar mit den Paaren (190) linear äquivalent. Die Funktionen (191) sind mit den L-Reihenprodukten

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + \chi_1(-1))(1 + \chi_2(-1))}{(t_1 t_2)^s} L(s + i\,r, \chi_1)\, L(s - i\,r, \chi_2), \\ &\frac{(1 - \chi_1(-1))(1 - \chi_2(-1))}{(t_1 t_2)^s} L(s + i\,r, \chi_1)\, L(s - i\,r, \chi_2) \end{aligned} \tag{192}$$

identisch.

§ 4. Die Theorie der T_n-Operatoren.

Es sei O_n die Menge aller Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit ganz rationalen a, b, c, d und $a\,d - b\,c = n > 0$. Unter der Voraussetzung $(n, Q) = 1$ können die Repräsentanten S in einer Restklassenzerlegung

$$\mathsf{O}_n = \sum_S \mathsf{M}\, S$$

so gewählt werden, daß

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} (Q)$$

ist. Ein derartiges System von Restklassenvertretern bezeichnen wir mit V_n und definieren den Operator T_n für automorphe Wellenfunktionen $F(\tau)$ zur Stufe Q, indem wir

(193) $$F(\tau)\,|\,T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{S \subset \mathsf{V}_n} F(\tau)\,|\,S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{S \subset \mathsf{V}_n} F(S\tau)$$

setzen. Diese Funktion ist unabhängig von der Auswahl des Systems V_n und gehört wieder zur Stufe Q. Verstehen wir unter R_a den durch (36) definierten Operator, so bilden die Transformationen

(194) $$R_a \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei a alle positiven Teiler von n durchläuft, $b \bmod d$ variiert und $ad = n$ ist, ein spezielles Vertretersystem V_n, welches für die Durchführung der Rechnungen geeignet ist. Wie im analytischen Fall beweist man die Vertauschbarkeit aller Operatoren R_a und $T_n = T(n)$ sowie die Multiplikationsregel

(195) $$T(n)\,T(m) = \sum_{\substack{d | n, m \\ d > 0}} T\left(\frac{n\,m}{d^2}\right) R_d \quad \text{für} \quad (n, Q) = 1, \ (m, Q) = 1.$$

Um die T_n-Operatoren auch für solche n zu definieren, die zur Stufe Q nicht teilerfremd sind, zerlegen wir die lineare Schar aller automorphen Funktionen in die Teilscharen $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ und $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ zum Teiler t und Charakter χ. Diese bestehen wie eingangs ausgeführt wurde, aus den Funktionen $F(\tau)$, die durch den Operator R_n in das $\chi(n)$-fache übergeführt werden:

(196) $$F(\tau)\,|\,R_n = \chi(n)\,F(\tau) \quad \text{für} \quad (n, Q) = 1,$$

und die eine Fourierentwicklung der Art

(197) $$F(\tau) = \delta\left(\frac{t}{Q}\right) u(y) + \sum_{\left(n, \frac{Q}{t}\right) = 1} a(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi |n t|}{Q}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q} x}$$

gestatten. Überdies gilt für den durch (36) definierten Operator K

(198) $$F(\tau)\,|\,K = \begin{cases} F(\tau) & \text{für} \quad F(\tau) \subset \mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q), \\ -F(\tau) & \text{für} \quad F(\tau) \subset \mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q). \end{cases}$$

Sei nun $Q = t\,t_1$ und q ein Potenzprodukt von Primteilern der Stufe Q. Dann definieren wir für die Funktionen zum Teiler t den Operator T_q^t durch

(199) $$F(\tau)\,|\,T_q^t = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l \bmod q}{}' F\left(\frac{\tau + l\,t_1}{q}\right);$$

er verschwindet für $(q, t_1) > 1$, ist mit R_n und T_n für $(n, Q) = 1$ vertauschbar und führt, ebenso wie T_n mit $(n, Q) = 1$, die Scharen $\mathfrak{F}_r^{\pm 1}(t, \chi, Q)$ in sich über. Für eine beliebige natürliche Zahl m sei schließlich

(200) $$T_m^t = T_q^t\, T_n, \qquad \text{wenn} \quad m = q\,n, \ (n, Q) = 1$$

ist und q nur Primteiler von Q enthält. Der Operator $T_m^t = T^t(m)$ hat auf eine beliebige Funktion $F(\tau) \subset \mathfrak{F}_r^{\pm 1}(t, \chi, Q)$ die Wirkung:

(201) $$F(\tau)\,|\,T_m^t = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{ad = m \\ b \bmod d,\, d > 0}} \chi(a)\, F\left(\frac{a\tau + b\,t_1}{d}\right)$$

und genügt wieder der Multiplikationsregel

$$T^t(m_1)\,T^t(m_2) = \sum_{\substack{d/m_1,\, m_2\\ d>0}} T^t\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right)\chi(d). \tag{202}$$

Wir betrachten nun eine beliebige, gegenüber den Operatoren T_m^t invariante Teilschar $\mathfrak{S}_r$ von $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ oder $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$. Die Funktionen $F^\varrho(\tau)$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa$) mit den Fourierentwicklungen

$$F^\varrho(\tau) = u^\varrho(y) + \sum_{\left(n, \frac{Q}{t}\right)=1} a^\varrho(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n t|}{Q}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n t}{Q}x} \tag{203}$$

mögen eine Basis von $\mathfrak{S}_r$ bilden. Das von x unabhängige Glied $u^\varrho(y)$ tritt nur für $t = Q$ wirklich auf; es ist von der Form

$$u^\varrho(y) = \begin{cases} a_1^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}+ir} + a_2^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für } r > 0, \\ a_1^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}} \log y + a_2^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}} & \text{für } r = 0. \end{cases} \tag{204}$$

Nach (201) findet man unmittelbar

$$F^\varrho(\tau)\,|\,T_m^t = v^\varrho(y) + \sum_{\left(N, \frac{Q}{t}\right)=1} b^\varrho(N)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|N t|}{Q}\, y\right) e^{\frac{2\pi i N t}{Q}x} \tag{205}$$

mit

$$b^\varrho(N) = \sum_{\substack{d/N,\, m\\ d>0}} a^\varrho\left(\frac{N m}{d^2}\right)\chi(d) \quad \text{für } \left(N, \frac{Q}{t}\right) = \left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1. \tag{206}$$

Die Beschränkungen für N und m entfallen, wenn von vornherein $a^\varrho(n) = b^\varrho(n) = 0$ für $\left(n, \frac{Q}{t}\right) > 1$ angenommen wird. Das sei hiermit geschehen. Außerdem ist

$$v^\varrho(y) = \begin{cases} b_1^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}+ir} + b_2^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}-ir} & \text{für } r > 0, \\ b_1^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}} \log y + b_2^\varrho(0)\, y^{\frac{1}{2}} & \text{für } r = 0, \end{cases} \tag{207}$$

wenn

$$\begin{aligned} b_1^\varrho(0) &= m^{-ir}\sigma_{2ir}(m, \chi)\, a_1^\varrho(0) && \text{für } r \geqq 0, \\ b_2^\varrho(0) &= \begin{cases} m^{ir}\sigma_{-2ir}(m, \chi)\, a_2^\varrho(0) & \text{für } r > 0, \\ \left(\sum\limits_{\substack{d/m\\ d>0}} \chi(d) \log \frac{d^2}{m}\right) a_1^\varrho(0) + \sigma_0(m, \chi)\, a_2^\varrho(0) & \text{für } r = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{208}$$

und allgemein

$$\sigma_k(m, \chi) = \sum_{\substack{d/m\\ d>0}} \chi(d)\, d^k \tag{209}$$

gesetzt wird. Die Forderung (198) kommt zum Ausdruck in den Koeffizientenrelationen

$$a^\varrho(-n) = \pm\, a^\varrho(n), \tag{210}$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen gilt, wenn $\mathfrak{S}_r$ in $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ bzw. $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ liegt. Wegen der vorausgesetzten Invarianz der Teilschar $\mathfrak{S}_r$ bezüglich der Operatoren T_m^t gibt es eine Darstellung

$$F^{\varrho}(\tau)\,|\,T_m^t = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, F^{\sigma}(\tau) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa) \tag{211}$$

mit gewissen konstanten Koeffizienten $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$, für die man durch Vergleich der Fourierkoeffizienten in den Entwicklungen der beiden Seiten von (211) die wichtigen Beziehungen

$$\sum_{\substack{d/N,\, m\\ d>0}} a^{\varrho}\left(\frac{N m}{d^2}\right) \chi(d) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(N) \qquad \begin{pmatrix} m > 0,\ N \neq 0, \\ \varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa \end{pmatrix} \tag{212}$$

erhält. Offenbar ist

$$\sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(N) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(N)\, a^{\sigma}(m), \qquad (m > 0,\ N > 0) \tag{213}$$

woraus für $N = 1$

$$a^{\varrho}(m) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, a^{\sigma}(1) \qquad (m > 0) \tag{214}$$

folgt. Da die Funktionen $F^{\varrho}(\tau)$ linear unabhängig sind, gibt es ganz rationale Zahlen $N_1, N_2, \ldots, N_{\varkappa}$ derart, daß die Determinante

$$|a^{\varrho}(N_{\sigma})| \neq 0$$

ist. Sämtliche N_{σ} dürfen zufolge (210) positiv angenommen werden, so daß eine Auflösung des Systems (213) nach den $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ möglich ist, wenn man N die Werte $N_1, N_2, \ldots, N_{\varkappa}$ durchlaufen läßt:

$$\lambda_{\varrho\sigma}(m) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} b_{\varrho\sigma}^{\nu}\, a^{\nu}(m) \quad \text{für} \quad m > 0. \tag{215}$$

Wir benutzen diese Gleichungen zur Definition von $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ für $m < 0$. Bei geeigneter Wahl von $u_{\varrho\sigma}(y)$ stellen dann die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = u_{\varrho\sigma}(y) + \sum_{m \neq 0} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, y^{\frac{1}{2}}\, K_{ir}\left(\frac{2\pi\,|m t|}{Q}\, y\right) e^{\frac{2\pi i m t}{Q} x} \tag{216}$$

ein mit der Basis $F^{\varrho}(\tau)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ linear äquivalentes System dar. Die lineare Äquivalenz überträgt sich auf die Systeme der den Funktionen $F^{\varrho}(\tau)$ und $f_{\varrho\sigma}(\tau)$ zugeordneten Dirichletreihen

$$\varphi^{\varrho}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{\varrho}(m)}{(m t)^s}, \quad \varphi_{\varrho\sigma}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\varrho\sigma}(m)}{(m t)^s}. \tag{217}$$

Für die mit den Koeffizienten $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ gebildete Matrix $\lambda(m)$ ist nach (202)

$$\lambda(m_1)\, \lambda(m_2) = \sum_{\substack{d/m_1,\, m_2\\ d>0}} \lambda\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \chi(d). \tag{218}$$

Wie im analytischen Fall erhält man dann für die Funktionenmatrix

$$\Phi(s) = (\varphi_{\varrho\sigma}(s)) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)\,(m t)^{-s} \tag{219}$$

die EULERsche Produktentwicklung

$$\Phi(s) = t^{-s} \prod_{p} (\lambda(1) - \lambda(p)\, p^{-s} + \chi(p)\, \lambda(1)\, p^{-2s})^{-1}. \tag{220}$$

Eine Reihe von wichtigen Sätzen kann nun wörtlich wie in der HECKEschen Operatorentheorie bewiesen werden. Insbesondere ergibt sich: Die charakteristischen Wurzeln der Funktionenmatrix

(221) $$B(\tau) = (f_{\varrho\sigma}(\tau))$$

gehören selbst zur linearen Schar der $F^{\varrho}(\tau)$ und entsprechen Dirichletreihen mit einer Produktentwicklung von der Art (220), wenn man hierin $\lambda(1)$ und $\lambda(p)$ durch Matrizen ersten Grades ersetzt. Umgekehrt ist jede Funktion aus $\mathfrak{S}_r$ zu einer Dirichletreihe mit einer derartigen Produktentwicklung charakteristische Wurzel von $B(\tau)$. Die Frage, ob es in $\mathfrak{S}_r$ ein System von $\varkappa$ linear unabhängigen Funktionen gibt, denen Dirichletreihen mit EULERscher Produktentwicklung entsprechen, ist gleichwertig damit, daß $B(\tau)$ mit Hilfe einer konstanten Matrix auf Diagonalgestalt transformiert werden kann. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß es $\varkappa$ verschiedene Eigenfunktionen des von den T_m^t erzeugten Operatorenringes gibt, die sich nicht nur um konstante Faktoren voneinander unterscheiden. Diese Eigenfunktionen stimmen bis auf konstante Faktoren mit den charakteristischen Wurzeln von $B(\tau)$ überein. Eine befriedigende Lösung dieses Problems gibt es vorerst nur für $t = 1$ und $r > 0$. Die Scharen $\mathfrak{F}_r^{\pm 1}(t, \chi, Q)$ zerfallen nämlich im Falle $r > 0$ in die invarianten Teilscharen der Eisensteinreihen und Spitzenfunktionen. Den Eisensteinreihen in $\mathfrak{F}_r^{+1}(t, \chi, Q)$ bzw. $\mathfrak{F}_r^{-1}(t, \chi, Q)$ zum Teiler $t = 1$ entspricht nach (192) die lineare Schar der L-Reihenprodukte $L(s + ir, \chi_1) \times L(s - ir, \chi_2)$, wobei χ_1 und χ_2 Charaktere mod Q bedeuten, $\chi = \chi_1 \chi_2$ und $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = 1$ bzw. -1 ist. Da die Dirichletreihen zu diesen Funktionen eine EULERsche Produktentwicklung besitzen, so kommen die zugeordneten Eisensteinreihen unter den charakteristischen Wurzeln von $B(\tau)$ vor. Wir können uns daher auf die Betrachtung der Spitzenfunktionen beschränken. Es sei nunmehr $\mathfrak{S}_r$ ständig eine invariante Teilschar von Spitzenfunktionen. Mit Hilfe des PETERSSONschen Metrisierungsprinzips beweisen wir, daß alle Matrizen $\lambda(n)$ mit $(n, Q) = 1$ simultan auf Diagonalgestalt transformiert werden können. Damit ist dann das Problem für die Teilscharen $\mathfrak{S}_r$ zum Teiler $t = 1$ vollständig gelöst; denn für $(n, Q) > 1$ verschwindet $\lambda(n)$, sofern $t = 1$ angenommen wird.

Es seien $F_1(\tau)$ und $F_2(\tau)$ zwei Spitzenfunktionen und $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich zur Gruppe $\mathsf{M}(Q)$. Das Integral

(222) $$(F_1(\tau), F_2(\tau)) = (F_1(\tau), F_2(\tau))_{\mathsf{M}(Q)} = \iint_{\mathfrak{F}} F_1(\tau)\,\overline{F_2(\tau)}\,\frac{dx\,dy}{y^2}$$

hängt von der Wahl von $\mathfrak{F}$ nicht ab und wird das Skalarprodukt von $F_1(\tau)$ und $F_2(\tau)$ genannt. Sind $F_1(\tau)$ und $F_2(\tau)$ überdies Funktionen von gleichem Charakter χ, so gilt

(223) $$(F_1(\tau) \,|\, T_n, F_2(\tau)) = \chi(n)\,(F_1(\tau), F_2(\tau) \,|\, T_n) \quad \text{für } (n, Q) = 1.$$

Der PETERSSONsche Beweis (K II) der entsprechenden Formel für Modulfunktionen kann auf den vorliegenden Fall wörtlich übertragen werden. Etwas kürzer kann man dabei verfahren, wenn man beachtet, daß die Links- und Rechtsklassen von O_n nach M ein gemeinsames System V_n von Vertretern S besitzen:

$$\mathsf{O}_n = \sum_{S \subset \mathsf{V}_n} \mathsf{M}\,S = \sum_{S \subset \mathsf{V}_n} S\,\mathsf{M} \quad \text{mit } S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} (Q).$$

Die Reduktion der Formel (223) auf den Fall $n = p$ (Primzahl) wird dann entbehrlich. H. PETERSSON beweist und benutzt die Existenz eines derartigen Vertretersystems V_n nur für $n = p$. Für beliebige n konstruiert man ein solches in folgender Weise. Sei $\mathsf{O}_{n,g}$ die Menge aller Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } (a, b, c, d) = g, \; ad - bc = n.$$

Offenbar ist

$$\mathsf{O}_{n,g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \mathsf{O}_{\frac{n}{g^2},1} \text{ für } g^2/n \text{ und } \mathsf{O}_n = \sum_{g^2/n,\, g>0}' \mathsf{O}_{n,g}. \tag{224}$$

Die Darstellung

$$\mathsf{O}_{n,1} = \mathsf{M}\, S_n \mathsf{M} \text{ mit } S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \tag{225}$$

gibt Anlaß zu einer Zerlegung

$$\mathsf{O}_{n,1} = \sum_{i=1}^{\varrho(n)}{}' \mathsf{M}\, S_n L_i^* \text{ mit } L_i^* \subset \mathsf{M}. \tag{226}$$

Wegen $S_n \mathsf{M}(n) \subset \mathsf{M}\, S_n$ gilt dann mit beliebigen $Q_i \subset \mathsf{M}(n)$

$$\mathsf{O}_{n,1} = \sum_{i=1}^{\varrho(n)}{}' \mathsf{M}\, S_n L_i, \quad L_i = Q_i L_i^*. \tag{227}$$

Bei geeigneter Wahl der Substitutionen Q_i kann $L_i \subset \mathsf{M}(Q)$ erreicht werden; denn die Kongruenzen

$$Q_i \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (n), \quad Q_i \equiv L_i^{*-1} (Q)$$

sind wegen $(n, Q) = 1$ mit einander verträglich. Bezeichnen wir mit L_i' die zu L_i transponierte Matrix und setzen $A_i = L_i' S_n L_i$, so folgt offenbar

$$\mathsf{O}_{n,1} = \sum_{i=1}^{\varrho(n)}{}' \mathsf{M}\, A_i = \sum_{i=1}^{\varrho(n)}{}' A_i \mathsf{M}, \quad A_i \equiv S_n (Q); \tag{228}$$

denn $\mathsf{O}_{n,1}$ ändert sich nicht, wenn man alle Matrizen durch die transponierten ersetzt, überdies ist $A_i' = A_i$. Allgemein sei (g^2/n)

$$\mathsf{O}_{\frac{n}{g^2},1} = \sum_{i=1}^{\varrho\left(\frac{n}{g^2}\right)}{}' \mathsf{M}\, A_i^{(g)} = \sum_{i=1}^{\varrho\left(\frac{n}{g^2}\right)}{}' A_i^{(g)} \mathsf{M}, \quad A_i^{(g)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{g^2} \end{pmatrix} (Q), \tag{229}$$

so daß mit

$$B_i^{(g)} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} R_g A_i^{(g)}, \quad R_g \equiv \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} (Q), \quad R_g \subset \mathsf{M} \tag{230}$$

schließlich

$$\mathsf{O}_{n,g} = \sum_{i=1}^{\varrho\left(\frac{n}{g^2}\right)}{}' B_i^{(g)} \mathsf{M} = \sum_{i=1}^{\varrho\left(\frac{n}{g^2}\right)}{}' \mathsf{M}\, B_i^{(g)}, \quad B_i^{(g)} \equiv S_n (Q) \tag{231}$$

wird. Nach (224) stellen die $B_i^{(g)}$ ein Vertretersystem V_n mit den gewünschten Eigenschaften dar.

Wir wählen nun eine normierte Orthogonalbasis $F^{\varrho}(\tau)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ in $\mathfrak{S}_r$:

$$(F^{\varrho}(\tau), F^{\sigma}(\tau)) = \delta_{\varrho\sigma} \qquad (= \text{Kroneckersymbol})$$

und erhalten dann nach (223) für $(n, Q) = 1$

$$\lambda_{\varrho\sigma}(n) = (F^\varrho(\tau) \mid T_n, F^\sigma(\tau)) = \chi(n)\,(F^\varrho(\tau), F^\sigma(\tau) \mid T_n) = \chi(n)\,\overline{\lambda_{\sigma\varrho}(n)},$$

also

$$\lambda(n) = \chi(n)\,\overline{\lambda(n)}'. \tag{232}$$

Es bestehen somit die Vertauschungsrelationen

$$\left.\begin{aligned} \lambda(n)\,\overline{\lambda(n)}' &= \overline{\lambda(n)}'\,\lambda(n) \\ \lambda(n)\,\lambda(m) &= \lambda(m)\,\lambda(n) \end{aligned}\right\} \text{ für } (n, Q) = (m, Q) = 1. \tag{233}$$

Sie sind notwendig und hinreichend dafür, daß alle $\lambda(n)$ mit Hilfe einer einzigen unitären Matrix simultan auf Diagonalgestalt transformiert werden können. Wir erhalten damit das Resultat:

Satz 12. *In den linearen Scharen $\mathfrak{F}_r^{\pm 1}(1, \chi, Q)$ zum Teiler 1 und Charakter χ gibt es im Falle $r > 0$ eine Basis $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ die aus Eigenfunktionen des von den Operatoren T_n mit $(n, Q) = 1$ erzeugten Ringes besteht. Die den Funktionen $F^\varrho(\tau)$ mit den Fourierentwicklungen*

$$F^\varrho(\tau) = \delta\left(\frac{1}{Q}\right) u^\varrho(y) + \sum_{\substack{(n,Q)=1 \\ n \neq 0}} a^\varrho(n)\, y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|}{Q}\, y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} \tag{234}$$

zugeordneten Dirichletreihen

$$\varphi^\varrho(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,Q)=1}}^{\infty} \frac{a^\varrho(n)}{n^s} \tag{235}$$

besitzen die EULER*sche Produktentwicklung*

$$\varphi^\varrho(s) = \prod_{(p,Q)=1} \left(1 - a^\varrho(p)\, p^{-s} + \chi(p)\, p^{-2s}\right)^{-1}, \tag{236}$$

wenn $a^\varrho(1) = 1$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ angenommen wird, was keine Einschränkung bedeutet.

Die Untersuchung der Teilscharen $\mathfrak{F}_r^{\pm 1}(t, \chi, Q)$ zu beliebigem Teiler t und $r \geqq 0$ mit den von H. PETERSSON entwickelten Methoden führt zu ähnlichen Ergebnissen wie im analytischen Fall. Dabei muß allerdings beachtet werden, daß sich die Theorie der Eisensteinreihen zu $r = 0$ noch in keinem befriedigenden Zustand befindet.

Zusatz bei der Korrektur: Im Zusammenhang mit den vorliegenden Untersuchungen sind folgende Arbeiten von Interesse:

H. KOBER: Transformation einer bestimmten BESSELschen Reihe sowie von Potenzen der RIEMANNschen ζ-Funktion und von verwandten Funktionen. Crelle Journal **173**, 65—68 (1935). — Transformationsformeln gewisser BESSELscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen. Math. Zeitschr. **39**, 609—624 (1935). — Eine der RIEMANNschen verwandte Funktionalgleichung. Math. Zeitschr. **39**, 630—633 (1935).

(Eingegangen am 3. April 1946.)