Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1949, 1. Abhandlung

Automorphe Funktionen
und
indefinite quadratische Formen

Von

H. Maaß

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Mai 1948

Heidelberg 1949
Springer-Verlag

vorgelegten Funktionalgleichung des ersten Typus und gewissen automorphen Formen der Dimension $-k$ eine umkehrbar eindeutige lineare Beziehung und gestattet somit jede Aussage über die lineare Schar der Lösungen $\varphi(s)$ in eine äquivalente Aussage über automorphe Formen zu verwandeln.

Aus diesem Grunde erscheint mir die Frage von Interesse, ob für die Funktionalgleichungen des zweiten und dritten Typus ein ähnlicher Zusammenhang mit der Theorie der automorphen Funktionen hergestellt werden kann. Es ist natürlich von vornherein klar, daß es sich hierbei nicht wie im ersten Fall um analytische Funktionen einer komplexen Variablen handeln kann. Eine Teillösung des Problems liegt bereits vor. Der zweite Funktionalgleichungstypus führt nämlich über die Mellintransformation zur Theorie der automorphen Funktionen, die der Wellengleichung

$$\left[y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-r(r-1)\right]g(\tau)=0 \qquad (\tau=x+iy) \tag{1}$$

genügen[3], so daß wir uns nur noch mit dem dritten Typus zu befassen brauchen. Dieser bringt eine funktionale Invarianz bezüglich der Substitution $s\to 2-s$ zum Ausdruck im Gegensatz zum zweiten Typus, der eine solche bezüglich $s\to 1-s$ behauptet. Es liegt hier also derselbe spezifische Unterschied vor wie bei den Funktionalgleichungen des ersten Typus zu $k=1$ und $k=0$. Diese Analogie legt die Vermutung nahe, daß die dem dritten Typus zugeordneten automorphen Funktionen, sofern überhaupt von ihnen gesprochen werden darf, in enger Beziehung zu den Wellenfunktionen stehen und sich im übrigen wie automorphe Formen der Dimension -1 verhalten. Wir stehen damit vor der Aufgabe, eine Klasse von Funktionen zu ermitteln, die ein dem der Modulformen entsprechendes analytisches Verhalten zeigen und zugleich einen nichtanalytischen Charakter gemäß ihrer Verwandtschaft mit den Wellenfunktionen aufweisen. Einen Mischtypus dieser Art hat man in den verallgemeinerten EISENSTEIN-Reihen

$$\left.\begin{aligned} E_k(\tau,r;(a_1,a_2),Q) = \sum_{\substack{m_i\equiv a_i(Q)\\(m_1,m_2)\neq(0,0)}} \frac{y^r}{(m_1\tau+m_2)^k\,|m_1\tau+m_2|^{2r}} \\ (k+2r>2,\ k \text{ ganz} \geqq 0), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[3] MAASS, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung DIRICHLETscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. (im Druck).

die in einem anderen Zusammenhang von HECKE in die Theorie der Modulformen eingeführt worden sind. Für $r=0$ erhält man in der Tat eine Modulform der Dimension $-k$ zur Stufe Q, während $k=0$ eine Wellenfunktion zur Stufe Q ergibt. Allgemein gilt für die Substitutionen $S=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$ der Hauptkongruenzgruppe modulo Q

$$E_k(S\tau, r;\, (a_1, a_2), Q) = (c\tau + d)^k\, E_k(\tau, r;\, (a_1, a_2), Q). \tag{3}$$

Die Frage, ob die verallgemeinerten EISENSTEIN-Reihen zu $k=1$ den gesuchten Funktionentypus darstellen, kann erst dann entschieden werden, wenn es gelingt, die Reihen (2) durch Differentialgleichungen zu charakterisieren. Herr PETERSSON hat die Möglichkeit einer solchen Charakterisierung, wie er mir vor einigen Jahren mitteilte, seit langem als wahrscheinlich angesehen.

Um festzustellen, von welcher Art unsere Erwartungen sein dürfen, bestimmen wir zunächst alle linearen partiellen Differentialgleichungen in x, y, die gegenüber beliebigen Substitutionen der Art

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad (a, b, c, d \text{ reell}, \quad ad - bc = 1)$$

formal invariant sind. Diese Forderung ist sehr einschneidend und wird nur von den Differentialgleichungen

$$f(\Delta)\, g(\tau) = 0 \tag{4}$$

erfüllt. Dabei ist $f(\Delta)$ ein beliebiges Polynom in

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

mit konstanten Koeffizienten. Eine Differentialgleichung von der Art Gl. (4) für die verallgemeinerten EISENSTEIN-Reihen zu finden, bereitet keine Mühe. Es ergibt sich allgemeinen Invarianzeigenschaften zufolge

$$\prod_{\nu=0}^{k} \big(\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1)\big)\, E_k(\tau, r;\, (a_1, a_2), Q) = 0\,.$$

Darüber hinaus kann auf Grund der Transformationsgleichung (3) geschlossen werden, daß die Funktionen $E_k\big(\tau, r; (a_1, a_2), Q\big)$ das Differentialgleichungssystem

$$\prod_{\nu=0}^{k} \big(\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1)\big)\, \tau^{\mu}\, g(\tau) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k) \tag{6}$$

befriedigen.

Wir wählen das System (6) nunmehr zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung. Es sei G eine Gruppe von reellen unimodularen Substitutionen und $v(S)$ ein Multiplikatorsystem zur Gruppe G und zur Dimension $-k$ (ganz). Es ist also

$$v(S_1)\,v(S_2) = v(S_1 S_2) \quad \text{für} \quad S_1, S_2 \in \mathsf{G} \tag{7}$$

und

$$v(-E) = (-1)^k, \quad \text{falls} \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathsf{G}. \tag{8}$$

Unter einer Wellenform der Dimension $-k$ zum Wellenparameter r, zur Gruppe G und zum Multiplikatorsystem $v(S)$ wollen wir eine Lösung $g(\tau)$ von Gl. (6) verstehen, die in der Halbebene $y > 0$ $(2k+2)$-mal stetig differenzierbar ist und die der Transformationsformel

$$g(S\tau) = v(S)\,(c\tau + d)^k\, g(\tau) \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{G} \tag{9}$$

genügt. Wir bezeichnen mit $\{\mathsf{G} - k, r, v\}$ die lineare Schar aller dieser Formen $g(\tau)$. Der Begriff der automorphen Wellenform erweist sich als sinnvoll auf Grund der Transformationsinvarianz: Sei $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine beliebige reelle unimodulare Substitution, $v^L(S) = v(L S L^{-1})$ für $S \in L^{-1}\mathsf{G} L$ und $g^L(\tau) = (\gamma\tau + \delta)^{-k} g(L\tau)$. Aus

$$g(\tau) \in \{\mathsf{G}, -k, r, v\} \quad \text{folgt dann} \quad g^L(\tau) \in \{L^{-1}\mathsf{G} L, -k, r, v^L\}. \tag{10}$$

Wenn das Polynom $f_k(x) = \prod_{\nu=0}^{k} \big(x - (r+\nu)\,(r+\nu-1)\big)$ separabel ist, kann eine Lösung des Systems (6) auf eindeutige Weise als Summe von Wellenfunktionen dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} &g(\tau) = g_0(\tau) + g_1(\tau) + \cdots + g_k(\tau), \\ &\qquad (\Delta - (r+\nu)\,(r+\nu-1))\, g_\nu(\tau) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Um den Umfang der formalen Rechnungen auf ein erträgliches Maß zu begrenzen, wird man sich zunächst auf die Betrachtung des Falles $k = 1$ beschränken müssen (der Fall $k = 0$ ist bereits in [3] vollständig diskutiert worden). Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes ist es aber gerade, zu zeigen, daß der dritte Funktionalgleichungstypus vermittels der Mellintransformation mit den automorphen Wellenformen der Dimension -1 in Zusammenhang gebracht werden kann.

Im einzelnen wird folgendes ausgeführt:

Zunächst (§ 1) werden über einer beliebigen im Kleinen frei beweglichen RIEMANNschen Mannigfaltigkeit die linearen partiellen Differentialoperatoren bestimmt, die gegenüber längentreuen Abbildungen formal invariant sind. Diese Untersuchung ist auch von Interesse im Hinblick auf die Verallgemeinerung[4] der in [3] niedergelegten Theorie.

In § 2 werden aus dem Begriff der automorphen Form der Dimension $-k$ zum Wellenparameter r einfache Folgerungen gezogen. Insbesondere werden die Begriffe „ganze Form" und „Spitzenform" ähnlich wie in der Theorie der Modulformen fixiert. Die Bestimmung der FOURIER-Entwicklung einer Wellenform allgemeiner Dimension $-k$ ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Wir beschränken uns daher auf den Fall $k = 1$. Es zeigt sich schließlich, daß es zu den Untergruppen der Modulgruppe von endlichem Index keine nicht identisch verschwindende Spitzenform der Dimension -1 zu reellem Wellenparameter $r > \frac{1}{2}$, $r \neq 1$ gibt.

Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen DIRICHLETschen Reihen und automorphen Wellenformen der Dimension -1 ergibt sich in § 3 in Gestalt eines allgemeinen Satzes über Lösungen eines Systems von Funktionalgleichungen des dritten Typus (Hauptsatz).

In § 4 wird bewiesen, daß mit Hilfe der EISENSTEIN-Reihen $E_1\big(\tau, r; (a_1, a_2), Q\big)$ jede ganze Wellenform desselben Typus auf eine Spitzenform reduziert werden kann. Da im Falle $r > \frac{1}{2}$, $r \neq 1$ jede solche Spitzenform identisch verschwindet, bestehen die ganzen Formen der Dimension -1 zur Stufe Q aus den Linearkombinationen der Reihen $E_1\big(\tau, r; (a_1, a_2), Q\big)$. Ein analoger Satz wird für die Wellenfunktionen (Formen der Dimension 0) zur Stufe Q formuliert. Spezielle Untersuchungen zur Thetagruppe, die von den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

erzeugt wird, führen zu einer wichtigen Anwendung des Hauptsatzes.

In § 5 werden die von SIEGEL aufgestellten Funktionalgleichungen der Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen geeignet umgeschrieben, so daß eine Beziehung zur Theorie der

[4] MAASS, H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und DIRICHLETsche Reihen. Hamburger Abh. (im Druck).

Wellenfunktionen erkennbar wird. Für die Zetafunktionen zu den speziellen indefiniten Formen

$$x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n+1}^2-\cdots-x_m^2 \quad (m\equiv 0(2),\ n\equiv 1(2),\ 1\leq n\leq m-1, m\geq 6)$$

ergeben sich auf Grund des Hauptsatzes analytische Identitäten. Man erhält damit explizite Formeln für die von SIEGEL eingeführten Darstellungsmaße der angegebenen quadratischen Formen.

Zu Ergebnissen allgemeinerer Art gelangt man, wenn man, wie SIEGEL angedeutet hat, die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen im allgemeinen Fall durch Kongruenzbedingungen in Teilreihen aufspaltet. Bemerkenswert erscheint mir, daß die Variablenzahl der in Frage kommenden indefiniten quadratischen Formen im wesentlichen in den Wellenparameter der zugeordneten automorphen Wellenformen eingeht und auf die Dimension nur einen geringfügigen Einfluß hat (es kommen nur die Dimensionen 0 und -1 vor). Im Gegensatz hierzu bestimmt die Dimension der Thetareihen (diese als Modulformen aufgefaßt) zu den positiv definiten quadratischen Formen die Variablenzahl der betreffenden quadratischen Form vollständig.

Es bleibt noch die Frage zu klären, welchen Beitrag die automorphen Wellenformen der Dimension $-k$ $(k>1)$ zur Theorie der DIRICHLETschen Reihen zu leisten vermögen.

§ 1. Invariante Differentialoperatoren.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine k-dimensionale beliebig oft differenzierbare RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, P ein allgemeiner Punkt von $\mathfrak{R}$. Die kovarianten Komponenten des Maßtensors bezüglich eines gegebenen lokalen Koordinatensystems $x^\mu = x^\mu(P)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, k)$ bezeichnen wir mit $g_{\mu\nu}$; ferner sei $|g_{\mu\nu}| = g$. Wir übernehmen eine allgemein gebräuchliche Summationsvorschrift, indem wir im folgenden über jeden doppelt auftretenden Index stillschweigend von 1 bis k summieren.

Über $\mathfrak{R}$ denken wir uns einen linearen partiellen Differentialoperator n-ten Grades gegeben:

$$L_n(P) = a(P) + \sum_{p=1}^{n} a^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}(P)\,\frac{\partial^p}{\partial x^{\nu_1}\,\partial x^{\nu_2}\ldots\partial x^{\nu_p}}. \tag{14}$$

Die Koeffizienten $a^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}$ seien symmetrisch in den Indizes. Der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $(\bar{x}^\mu)$ ist formal zu vollziehen, d. h. es ist

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\varrho}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^\varrho\,\partial \bar{x}^\sigma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\varrho}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\varrho}$$

und allgemein

$$\frac{\partial^p}{\partial x^{\nu_1}\partial x^{\nu_2}\ldots\partial x^{\nu_p}} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial \bar{x}^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{\mu_p}}{\partial x^{\nu_p}}\frac{\partial^p}{\partial \bar{x}^{\mu_1}\partial \bar{x}^{\mu_2}\ldots\partial \bar{x}^{\mu_p}} + \sum_{q=1}^{p-1} b^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}\frac{\partial^q}{\partial \bar{x}^{\mu_1}\partial \bar{x}^{\mu_2}\ldots\partial \bar{x}^{\mu_p}}$$

zu setzen mit gewissen Koeffizienten $b^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}$, die in den ν_i und den μ_j symmetrisch angenommen werden können. Sei

$$L_n(P) = \bar{a}(P) + \sum_{p=1}^{n}\bar{a}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}(P)\frac{\partial^p}{\partial \bar{x}^{\nu_1}\partial \bar{x}^{\nu_2}\ldots\partial \bar{x}^{\nu_p}},$$

dann ergibt sich

$$\bar{a}(P) = a(P), \quad a^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(P)\frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial \bar{x}^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} = \bar{a}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(P),$$

woraus hervorgeht, daß $a(P)$ einen Skalar bezeichnet und $a^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(P)$ die kontravarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors sind.

Wir wollen $L_n(P)$ einen invarianten Differentialoperator nennen, wenn für zwei beliebige Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{R}$, die durch $P \to Q$ umkehrbar eindeutig und längentreu aufeinander abgebildet werden, stets

$$L_n(P) = L_n(Q) \qquad (P \in \mathfrak{G},\ Q \in \mathfrak{H};\ P \to Q) \tag{15}$$

gilt. Die Polynome in

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \quad \text{(Beltramischer Operator)} \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten stellen invariante Differentialoperatoren dar. Es soll nun gezeigt werden, daß es keine anderen gibt, wenn $\mathfrak{R}$ im Kleinen frei beweglich ist. Die freie Beweglichkeit im Kleinen, die wir nunmehr voraussetzen wollen, besagt, daß geeignete Umgebungen zweier vorgegebenen Punkte P_0 und Q_0 von $\mathfrak{R}$ umkehrbar eindeutig und längentreu aufeinander abgebildet werden können, so daß ein vorgegebenes k-Bein in P_0 in ein vorgegebenes k-Bein in Q_0 übergeht.

Wir wählen zunächst $P_0 = Q_0$ und bezeichnen mit y^μ die Koordinaten des Bildpunktes Q von P im ursprünglich gegebenen Koordinatensystem. Die auf ein zweites Koordinatensystem $(\bar{x}^\mu)$, welches in P_0 geodätisch und kartesisch sein möge, bezogenen

Größen sollen allgemein durch einen oberen Querstrich gekennzeichnet werden. Ein unterer Index 0 soll andeuten, daß die betreffenden Ausdrücke im Fixpunkt P_0 zu bilden sind. Es darf also angenommen werden, daß

$$\left(\frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial \overline{y}^{\nu}}\right)_0 = (a^{\mu}_{\nu})$$

eine willkürliche orthogonale Matrix darstellt.

Sei $L_n(P)$ ein invarianter Differentialoperator, dann ist $L_n(P) = L_n(Q)$, d. h. also

$$\overline{a}(P) + \sum_{p=1}^{n} \overline{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p}(P) \frac{\partial^p}{\partial \overline{x}^{\nu_1} \partial \overline{x}^{\nu_2} \ldots \partial \overline{x}^{\nu_p}} = \overline{a}(Q) + \sum_{p=1}^{n} \overline{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p}(Q) \frac{\partial^p}{\partial \overline{y}^{\nu_1} \partial \overline{y}^{\nu_2} \ldots \partial \overline{y}^{\nu_p}},$$

woraus

$$\overline{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}(P) \frac{\partial \overline{x}^{\mu_1}}{\partial \overline{y}^{\nu_1}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu_2}}{\partial \overline{y}^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{\mu_n}}{\partial \overline{y}^{\nu_n}} = \overline{a}^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(Q)$$

erhellt. Insbesondere ergibt sich damit

$$\overline{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}(P_0)\, a^{\mu_1}_{\nu_1} a^{\mu_2}_{\nu_2} \ldots a^{\mu_n}_{\nu_n} = \overline{a}^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(P_0).$$

Der durch $\overline{a}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}(P_0)$ dargestellte symmetrische Tensor hat also in allen kartesischen Koordinatensystemen dieselben Komponenten. Da im kartesischen Koordinatensystem der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten entfällt, dürfen wir

$$\overline{a}^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(P_0) = c^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$$

setzen. Die Berechnung des Tensors $c_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$ erfolgt nach einer Methode, die ich Herrn SEIFERT verdanke. Sei

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = 1}^{k} c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} z_{\mu_1} z_{\mu_2} \ldots z_{\mu_n}$$

und $z_\mu \to \overline{z}_\mu$ eine beliebige orthogonale Transformation. Offenbar ist

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_k) = Q(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_k).$$

Da eine feste Richtung durch eine geeignete orthogonale Transformation in eine vorgegebene Richtung übergeführt werden kann, hängt $Q(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ nur noch von $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2$ ab.

Die Funktion

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_k)\,(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)^{-\frac{n}{2}} = \omega$$

ist homogen vom Grad 0, also von den z_μ unabhängig. Damit wird

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = 1}^{k} c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} z_{\mu_1} z_{\mu_2} \ldots z_{\mu_n} = \omega\,(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)^{\frac{n}{2}}. \tag{17}$$

$\omega \neq 0$ ist nur mit $n \equiv 0\,(2)$ verträglich. Mit einer nur von k und n abhängigen reellen Zahl ϱ ist

$$\omega = \varrho \sqrt{c_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} c^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}} = \varrho \sqrt{a_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(P_0)\, a^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(P_0)}.$$

$\omega = \omega(P_0)$ erweist sich damit als Skalar. In die Identität (17) tragen wir $z_\mu = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_0^\mu}$ ein. Das ist zulässig, da die Vertauschbarkeit der z_μ ausreicht, um Gl. (17) zu verifizieren. Es ergibt sich

$$\bar{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}(P_0) \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}_0^{\nu_1} \partial \bar{x}_0^{\nu_2} \ldots \partial \bar{x}_0^{\nu_n}} = \omega(P_0) \left[\sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial^2}{(\partial \bar{x}_0^\mu)^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \omega(P_0) \left[\frac{1}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial}{\partial x_0^\mu} \left(\sqrt{g_0}\, g_0^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_0^\nu}\right)\right]^{\frac{n}{2}} = \omega(P_0)\, \Delta_0^{\frac{n}{2}}$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} L_n(P_0) &= a(P_0) + \sum_{p=1}^{n-1} \bar{a}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p}(P_0) \frac{\partial^p}{\partial \bar{x}_0^{\nu_1} \partial \bar{x}_0^{\nu_2} \ldots \partial \bar{x}_0^{\nu_p}} + \omega(P_0)\, \Delta_0^{\frac{n}{2}} \\ &= a(P_0) + \sum_{p=1}^{n-1} b^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p}(P_0) \frac{\partial^p}{\partial x_0^{\nu_1} \partial x_0^{\nu_2} \ldots \partial x_0^{\nu_p}} + \omega(P_0)\, \Delta_0^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Hierin darf P_0 durch P ersetzt werden. Wir erhalten dann die Zerlegung

$$L_n(P) = L_{n-1}(P) + \omega(P)\, \Delta_P^{n/2} \qquad (\Delta_P = \Delta),$$

wobei $L_{n-1}(P)$ ein linearer Differentialoperator $(n-1)$-ten Grades ist, der durch Gl. (18) erklärt wird.

Seien nun P_0 und Q_0 willkürliche Punkte in $\mathfrak{R}$ und $P \to Q$ eine umkehrbar eindeutige und längentreue Abbildung einer Umgebung von P_0 auf eine Umgebung von $Q_0 \cdot L_n(P) = L_n(Q)$ und $\Delta_P = \Delta_Q$ haben

$$L_{n-1}(P) = L_{n-1}(Q) \quad \text{und} \quad \omega(P) = \omega(Q), \quad \text{also} \quad \omega(P_0) = \omega(Q_0)$$

zur Folge. Damit erweist sich $\omega(P)$ als eine Konstante und $L_{n-1}(P)$ als ein invarianter Operator. Vollständige Induktion nach n ergibt unmittelbar

Satz 1. *Jeder invariante Differentialoperator über einer im Kleinen frei beweglichen beliebig oft differenzierbaren* RIEMANN*schen Mannigfaltigkeit ist ein Polynom in Δ mit konstanten Koeffizienten, die keiner Beschränkung unterliegen.*

Sei

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{\varrho_1} (x - \lambda_2)^{\varrho_2} \dots (x - \lambda_r)^{\varrho_r} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j) \tag{19}$$

und $g(P)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f(\Delta)\, g(P) = 0. \tag{20}$$

Nach einem aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekannten Verfahren ist zu schließen, daß $g(P)$ in eindeutiger Weise als Summe

$$g(P) = g_1(P) + g_2(P) + \cdots + g_r(P) \tag{21}$$

von Lösungen $g_i(P)$ der Differentialgleichungen

$$(\Delta - \lambda_i)^{\varrho_i} g_i(P) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, r) \tag{22}$$

dargestellt werden kann. Wenn $f(x)$ separabel ist, also alle $\varrho_i = 1$ sind, dann ist $g(P)$ eine Summe von Wellenfunktionen.

Aus der Invarianz der Funktion $g(P)$ gegenüber einer Gruppe G von Bewegungen des RIEMANNschen Raumes $\mathfrak{R}$:

$$g(\sigma P) = g(P) \qquad \text{für} \qquad \sigma \in \mathsf{G} \tag{23}$$

folgt bereits die Invarianz der Komponenten $g_i(P)$:

$$g_i(\sigma P) = g_i(P) \qquad \text{für} \qquad \sigma \in \mathsf{G} \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Die automorphen Lösungen von Gl. (20) führen also über die Klasse der automorphen Wellenfunktionen nicht wesentlich hinaus, wenn $f(x)$ separabel ist. Um hier etwas Neues zu erhalten, ist eine allgemeinere Transformationsformel von der Art

$$g(\sigma P) = \mu_\sigma(P)\, g(P) \qquad \text{für} \qquad \sigma \in \mathsf{G} \tag{24}$$

an Stelle von Gl. (23) zugrunde zu legen, der zufolge ein geeignetes System von vorgegebenen, nicht konstanten Multiplikatoren $\mu_\sigma(P)$ auftritt, die für alle Bewegungen σ des RIEMANNschen Raumes erklärt sind und der Regel

$$\mu_{\sigma\tau}(P) = \mu_\sigma(\tau P)\, \mu_\tau(P)$$

genügen. Eine spezielle Untersuchung dieser Art wird im nächsten Paragraphen für die hyperbolische Ebene durchgeführt.

§ 2. Automorphe Wellenformen.

Sei $\tau = x + i y$ eine komplexe Variable. Wir repräsentieren die hyperbolische Ebene durch die obere τ-Halbebene mit der metrischen Grundform

$$d s^2 = \frac{d x^2 + d y^2}{y^2} \quad (y > 0).$$

Die hyperbolischen Bewegungen induzieren in der Halbebene $y > 0$ gebrochene lineare Transformationen der Art

$$\tau \to \frac{a \tau + b}{c \tau + d} \quad (a, b, c, d \text{ reell}; \quad a d - b c = 1),$$

und der Differentialoperator $\varDelta$ nimmt die Gestalt

$$\varDelta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tag{25}$$

an.

Um den Begriff der Wellenform einzuführen, betrachten wir die Eisenstein-Reihen

$$E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i (Q) \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}} \frac{y^r}{(m_1 \tau + m_2)^k \, |m_1 \tau + m_2|^{2r}} . \tag{26}$$

Hierin sei Q eine natürliche Zahl, a_1, a_2 ein Paar von ganz rationalen Zahlen, k eine nicht negative ganz rationale Zahl und r ein reeller Parameter. Damit die Reihen (26) konvergieren, ist $k + 2 r > 2$ vorauszusetzen. Wir bestimmen ein Polynom $f_k(x)$ mit konstanten Koeffizienten so, daß $f_k(\varDelta) \, E_k \big(\tau, r; (a_1, a_2), Q\big) = 0$ wird. Dabei machen wir weitgehend Gebrauch von der Invarianz der in Frage kommenden Operatoren $f_k(\varDelta)$ gegenüber den hyperbolischen Bewegungen. Zunächst stellen wir fest, daß die Glieder der Eisenstein-Reihen, abgesehen von konstanten Faktoren, von der Gestalt

$$y^r \quad \text{oder} \quad \left(\frac{-1}{\tau + a} \right)^k \frac{y^r}{|\tau + a|^{2r}} \quad (a \text{ reell})$$

sind. Die zweite von diesen Funktionen erhält man, wenn man auf $\tau^k y^r$ die Substitution $\tau \to \frac{-1}{\tau + a}$ anwendet. Es genügt demnach, den Operator $f_k(\varDelta)$ so zu bestimmen, daß $f_k(\varDelta) \, y^r = f_k(\varDelta) \, \tau^k y^r = 0$ wird. Auf Grund der leicht beweisbaren Formel

$$(\varDelta - r(r-1)) \, \tau^k y^r = 2 i k r \, \tau^{k-1} y^{r+1}$$

ist nun zu schließen, daß der Operator

$$f_k(\Delta) = \prod_{\nu=0}^{k} (\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1)) \tag{27}$$

die geforderten Eigenschaften hat.

Die EISENSTEIN-Reihen genügen der Transformationsformel

$$E_k(S\tau, r; (a_1, a_2), Q) = (c\tau + d)^k E_k(\tau, r; (a_1, a_2) S, Q), \tag{28}$$

dabei ist $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Substitution der Modulgruppe. Insbesondere wird, wenn h eine beliebige ganz rationale Zahl bedeutet,

$$E_k\left(\frac{-1}{\tau+h}, r; (a_1 h - a_2, a_1), Q\right) = (\tau + h)^k E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q).$$

Diese Funktionen werden durch den Operator (27) sämtlich annuliert. Mithin ist auch

$$\prod_{\nu=0}^{k} (\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1))\, \tau^\mu E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, k), \tag{29}$$

denn die Potenzen $1, \tau^2, \ldots, \tau^k$ können aus den Polynomen $\tau^k, (\tau+1)^k, \ldots, (\tau+k)^k$ linear kombiniert werden.

Genügt die in der Halbebene $y > 0$ $(2k+2)$-mal stetig differenzierbare Funktion $g(\tau)$ dem System der Differentialgleichungen

$$\prod_{\nu=0}^{k} (\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1))\, \tau^\mu g(\tau) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k) \tag{30}$$

sowie der Transformationsformel

$$g(S\tau) = v(S)(c\tau + d)^k g(\tau) \qquad \text{für} \qquad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{G}, \tag{31}$$

wobei G eine Gruppe von reellen unimodularen Substitutionen darstellt, so soll $g(\tau)$ eine Wellenform der Dimension $-k$ zum Wellenparameter r, Multiplikatorsystem v und zur Gruppe G genannt werden. $\{\mathsf{G}, -k, r, v\}$ sei die lineare Schar dieser Formen $g(\tau)$. Der Beweis, daß die transformierte Form

$$g^L(\tau) = (\gamma\tau + \delta)^{-k} g(L\tau) \qquad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ reell und unimodular}\right)$$

in $\{L^{-1}\mathsf{G}L, -k, r, v^L\}$ liegt, ist leicht zu erbringen; wir begnügen uns mit dem Nachweis, daß $g^L(\tau)$ eine Lösung von Gl. (30) darstellt. Da $f_k(\Delta)\,\tau^\mu g(\tau) = 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, k)$ mit $f_k(\Delta)\,(L\tau)^\mu g(L\tau) = 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, k)$ gleichwertig ist, ergibt sich in der Tat

$f_k(\Delta)\,\tau^\mu(\gamma\tau+\delta)^{-k}g(L\tau)=0\,(\mu=0,1,\ldots,k)$; denn in der von $1, L\tau, \ldots, (L\tau)^k$ erzeugten linearen Schar liegen die Funktionen $\tau^\mu(\gamma\tau+\delta)^{-k}\ (\mu=0,1,\ldots,k)$.

Wir bestimmen ein mit Gl. (30) äquivalentes System von Differentialgleichungen. Sei

$$\Omega = 2y^2\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \Delta_\nu=\Delta-(r+\nu)(r+\nu-1)\quad (\nu=0,1,\ldots,k) \tag{32}$$

und $\varphi(\tau)$ eine beliebige analytische Funktion. Wiederholte Anwendung der Operatorengleichung

$$\Delta_\nu\varphi(\tau)=\varphi(\tau)\Delta_\nu+\varphi'(\tau)\,\Omega \tag{33}$$

ergibt eine Entwicklung der Art

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_0\Delta_1\ldots\Delta_k\varphi(\tau)=\\&\varphi(\tau)M_0^{(k)}+\varphi'(\tau)M_1^{(k)}+\varphi''(\tau)M_2^{(k)}+\cdots+\varphi^{(k+1)}(\tau)M_{k+1}^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Die hierin auftretenden Operatoren $M_\nu^{(k)}$ sind rekursiv nach der Formel

$$M_\nu^{(k)}=\Delta_k M_\nu^{(k-1)}+\Omega M_{\nu-1}^{(k-1)} \tag{35}$$

zu berechnen. Sie ergeben sich auch als Koeffizienten in der formalen, nach Potenzen der Variablen ξ fortschreitenden Entwicklung

$$\left.\begin{aligned}&(\Delta_0+\xi\Omega)(\Delta_1+\xi\Omega)\ldots(\Delta_k+\xi\Omega)=\\&\qquad M_0^{(k)}+\xi M_1^{(k)}+\xi^2M_2^{(k)}+\cdots+\xi^{k+1}M_{k+1}^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Trägt man in Gl. (34) für $\varphi(\tau)$ der Reihe nach $1, \tau, \ldots, \tau^k$ ein, so folgt unmittelbar, daß Gl. (30) mit

$$M_\nu^{(k)}g(\tau)=0 \qquad (\nu=0,1,\ldots,k) \tag{37}$$

gleichwertig ist. Speziell ist

$$M_0^{(0)}=\Delta_0,\qquad M_0^{(1)}=\Delta_0\Delta_1,\qquad M_1^{(1)}=\Delta_0\Omega+\Omega\Delta_1.$$

Eine elementare Umformung ergibt für $M_1^{(1)}$ die Darstellung

$$M_1^{(1)}=\Omega\left(\Delta_0+\Delta_1-\frac{i}{y}\Omega\right). \tag{38}$$

Die Formen einer Klasse $\{\mathsf{G}_1, -k, r, v\}$ sind entsprechend ihrem Verhalten in den parabolischen Spitzen der Gruppe G in besonderer Weise zu unterscheiden. Wir beschränken uns hierbei auf die Betrachtung einer beliebigen Untergruppe G der Modulgruppe M von endlichem Index. Es sei $s_1, s_2, \ldots, s_h$ ein vollständiges

System von inäquivalenten parabolischen Spitzen der Gruppe G. Die Substitution $A_j \in \mathsf{M}$ führe s_j in ∞ über, und

$$U^{\lambda_j} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

erzeuge die Gruppe der parabolischen Transformationen mit dem Fixpunkt ∞ in der transformierten Gruppe $A_j \mathsf{G} A_j^{-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$. Ferner sei $v(S)$ ein Multiplikatorsystem zur Gruppe G und Dimension $-k$; es sei $|v(S)| = 1$ für alle $S \in \mathsf{G}$. Wir setzen

$$v(A_j^{-1} U^{\lambda_j} A_j) = v^{A_j^{-1}}(U^{\lambda_j}) = e^{2\pi i \varkappa_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, h); \tag{40}$$

dabei ist $\varkappa_j$ eine reelle Zahl, die im Intervall $0 \leq \varkappa_j < 1$ angenommen werden kann. Eine automorphe Form $g(\tau) \in \{\mathsf{G}, -k, r, v\}$ soll eine *ganze Form* genannt werden, wenn für hinreichend große Konstanten σ_j gleichmäßig in x für $y \to \infty$

$$g^{A_j^{-1}}(\tau) = O(y^{\sigma_j}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{41}$$

gilt. Eine *Spitzenform erster Art* liegt vor, wenn gleichmäßig in x für $y \to \infty$

$$g^{A_j^{-1}}(\tau) = o(1) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{42}$$

ist. Von einer *Spitzenform zweiter Art* soll gesprochen werden, wenn für beliebig große σ_j gleichmäßig in x für $y \to \infty$

$$g^{A_j^{-1}}(\tau) = O(y^{-\sigma_j}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{43}$$

gilt.

Die nun folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den Fall $k = 1$. Wir setzen voraus, daß $f_1(x) = \big(x - r(r-1)\big)\big(x - r(r+1)\big)$ separabel, also $r \neq 0$ ist. Jede Lösung $g(\tau)$ des Systems

$$M_0^{(1)} g(\tau) = M_1^{(1)} g(\tau) = 0 \tag{44}$$

läßt sich dann in eindeutiger Weise als Summe von Wellenfunktionen schreiben:

$$g(\tau) = g_0(\tau) + g_1(\tau). \tag{45}$$

Dabei ist

$$g_0(\tau) = -\frac{1}{2r} \Lambda_1 g(\tau), \qquad g_1(\tau) = \frac{1}{2r} \Lambda_0 g(\tau),$$

also

$$\Lambda_0 g_0(\tau) = \Lambda_1 g_1(\tau) = 0. \tag{46}$$

Der Darstellung (38) sowie den Relationen

$$\Lambda_0 g(\tau) = 2r\, g_1(\tau), \qquad \Lambda_1 g(\tau) = -2r\, g_0(\tau)$$

zufolge kann die zweite Gleichung des Systems (44) durch

$$\Omega\left[2r\,(g_1(\tau) - g_0(\tau)) - \frac{i}{y}\,\Omega\,(g_0(\tau) + g_1(\tau))\right] = 0$$

ersetzt werden. Diese Differentialgleichung besagt, daß

$$h(\tau) = 2r\,(g_1(\tau) - g_0(\tau)) - \frac{i}{y}\,\Omega\,(g_0(\tau) + g_1(\tau)) \tag{47}$$

eine analytische Funktion von τ darstellt. Durch diese Forderung wird die Mannigfaltigkeit der Lösungen des Systems (46) erheblich eingeschränkt.

Sei nun $g(\tau)$ eine in der Halbebene $y > 0$ viermal stetig differenzierbare periodische Lösung von Gl. (44):

$$g(\tau + \lambda) = g(\tau), \tag{48}$$

die für $y \to \infty$ gleichmäßig in x höchstens wie eine feste Potenz von y wächst:

$$g(\tau) = O\,(y^{\sigma_1}). \tag{49}$$

Man erkennt zunächst, daß $g_0(\tau)$ und $g_1(\tau)$ in der Halbebene $y > 0$ zweimal stetig differenzierbar sind und ebenfalls die Periode λ haben, also in FOURIER-Reihen der Art

$$\left.\begin{aligned} g_1(\tau) &= u(y) + \sum_{n \neq 0}\left[a_n\, y^{\frac12} K_{r+\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\,y\right) + a_n^*\, y^{\frac12} I_{r+\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\,y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{\lambda}x} \\ g_0(\tau) &= v(y) + \sum_{n \neq 0}\left[b_n\, y^{\frac12} K_{r-\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\,y\right) + b_n^*\, y^{\frac12} I_{r-\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}\,y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{\lambda}x} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

entwickelt werden können. Die von x unabhängigen Glieder sind von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} u(y) &= \begin{cases} a_0\, y^{-r} + a_0^*\, y^{1+r} & \text{für } r \neq -\frac12, \\ a_0\, y^{\frac12} + a_0^*\, y^{\frac12}\log y & \text{für } r = -\frac12, \end{cases} \\ v(y) &= \begin{cases} b_0\, y^{r} + b_0^*\, y^{1-r} & \text{für } r \neq \frac12, \\ b_0\, y^{\frac12} + b_0^*\, y^{\frac12}\log y & \text{für } r = \frac12 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

und die Funktionen $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ (in der Bezeichnung von WATSON[5]) befriedigen die Differentialgleichung

$$z^2\frac{d^2 w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)\,w = 0.$$

[5] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922.

Für $z \to \infty$ gelten die asymptotischen Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} K_\nu(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}\left[1 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} + \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})(\nu^2 - \frac{9}{4})}{8z^2} + O(z^{-3})\right], \\ I_\nu(z) &= (2\pi z)^{-\frac{1}{2}} e^z\left[1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} + O(z^{-2})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Unter der Voraussetzung

$$r \neq 0, \ \pm 1$$

soll nun

$$a_n^* = b_n^* = 0 \quad (n \text{ beliebig}) \text{ und } \quad b_n = a_n \operatorname{sgn} n \quad (n \neq 0) \tag{53}$$

bewiesen werden. Aus

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda g(\tau)\, e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda}x}\, dx = a_n y^{\frac{1}{2}} K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) + a_n^* y^{\frac{1}{2}} I_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) +$$
$$+ b_n y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) + b_n^* y^{\frac{1}{2}} I_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right)$$

für $n \neq 0$ folgt nach Gl. (49) u. (52)

$$O(y^{\sigma_1}) = (4\pi^2|n|)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi|n|}{\lambda}y} \times$$
$$\times\left[a_n^* + b_n^* - \frac{\lambda}{4\pi|n|y}\left(r(r+1)\,a_n^* + r(r-1)\,b_n^*\right) + O(y^{-2})\right]$$

und damit $a_n^* + b_n^* = r(r+1)\,a_n^* + r(r-1)\,b_n^* = 0$, also $a_n^* = b_n^* = 0$ $(n \neq 0)$. Die übrigen Bedingungen ergeben sich aus der geforderten Analytizität der durch Gl. (47) erklärten Funktion $h(\tau)$. Da $h(\tau)$ periodisch ist, können wir eine FOURIER-Reihe folgender Art ansetzen:

$$h(\tau) = 2c_0 + \sum_{n \neq 0} 2c_n \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi|n|}}\, e^{\frac{2\pi i n}{\lambda}\tau}.$$

Es bestehen dann die Relationen

$$r\left(u(y) - v(y)\right) + y\left(u'(y) + v'(y)\right) = c_0 \tag{54}$$

und für $n \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} c_n\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi|n|}}\, e^{-\frac{2\pi n}{\lambda}y} &= r\left[a_n y^{\frac{1}{2}} K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) - b_n y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right] + \\ &+ y\left(\frac{2\pi n}{\lambda} + \frac{d}{dy}\right)\left[a_n y^{\frac{1}{2}} K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) + b_n y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Wenn $\frac{2\pi|n|}{\lambda} y = z$ und $\operatorname{sgn} n = \varepsilon$ gesetzt wird, geht Gl. (55) über in

$$\left.\begin{aligned} c_n e^{-\varepsilon z} &= r\,[a_n z^{\frac12} K_{r+\frac12}(z) - b_n z^{\frac12} K_{r-\frac12}(z)] + \\ &+ z\left(\varepsilon + \frac{d}{dz}\right)[a_n z^{\frac12} K_{r+\frac12}(z) + b_n z^{\frac12} K_{r-\frac12}(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Mit Hilfe der Formeln

$$z\frac{d}{dz}[z^{\frac12} K_{r-\frac12}(z)] = \quad r z^{\frac12} K_{r-\frac12}(z) - z^{\frac32} K_{r+\frac12}(z),$$

$$z\frac{d}{dz}[z^{\frac12} K_{r+\frac12}(z)] = -r z^{\frac12} K_{r+\frac12}(z) - z^{\frac32} K_{r-\frac12}(z)$$

wird Gl. (56) in

$$(\varepsilon a_n - b_n)[z^{\frac32} K_{r+\frac12}(z) - \varepsilon z^{\frac32} K_{r-\frac12}(z)] = c_n e^{-\varepsilon z} \tag{57}$$

übergeführt. Berücksichtigen wir noch, daß zufolge Gl. (52)

$$z^{\frac32} K_{r+\frac12}(z) + z^{\frac32} K_{r-\frac12}(z) = \sqrt{2\pi}\, e^{-z}\,[z + O(1)],$$

$$z^{\frac32} K_{r+\frac12}(z) - z^{\frac32} K_{r-\frac12}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-z}\left[r + \frac{r(r^2-1)}{2z} + O(z^{-2})\right]$$

und nach Voraussetzung $r(r^2-1) \neq 0$ ist, so ergibt sich aus Gl. (57) die Beziehung $b_n = \varepsilon a_n$ $(n \neq 0)$ und damit auch $c_n = 0$ $(n \neq 0)$. Wie eine elementare Rechnung zeigt, ist Gl. (54) äquivalent mit

$$\left.\begin{aligned} (1+2r)\,a_0^* y^{1+r} + (1-2r)\,b_0^* y^{1-r} &= c_0 \quad \text{für} \quad r^2 \neq \tfrac14, \\ 2a_0^* y^{\frac32} + b_0^* y^{\frac12} &= c_0 \quad \text{für} \quad r = \tfrac12, \\ a_0^* y^{\frac12} + 2b_0^* y^{\frac32} &= c_0 \quad \text{für} \quad r = -\tfrac12. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Es gilt also stets $a_0^* = b_0^* = c_0 = 0$.

Wir können nunmehr den Satz aussprechen, daß eine in der Halbebene $y > O$ viermal stetig differenzierbare Funktion $g(\tau)$ dann und nur dann den Bedingungen (44), (48) u. (49) genügt, wenn sie eine FOURIER-Entwicklung der Art

$$\left.\begin{aligned} g(\tau) &= a_0 y^{-r} + b_0 y^r + \\ &+ \sum_{n \neq 0} a_n y^{\frac12}\left[K_{r+\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac12}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{\lambda}x} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

besitzt. Vollzieht man hier formal den Grenzübergang $r \to 0$, so geht $g(\tau)$ in eine analytische Funktion über. Diese Eigenschaft hat HECKE benutzt, um aus den Reihen $E_1(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$ Modulformen der Dimension -1 zur Stufe Q abzuleiten.

Sei $g(\tau)$ eine ganze Form der Klasse $\{\mathsf{G}, -1, r, v\}$, die den oben genannten Voraussetzungen genügen möge. Den Transformationsformeln

$$g^{A_j^{-1}}(\tau + \lambda_j) = e^{2\pi i \varkappa_j} g^{A_j^{-1}}(\tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{60}$$

zufolge bestehen dann für $j=1, 2, \ldots, h$ FOURIER-Entwicklungen der Art

$$\left.\begin{aligned} g^{A_j^{-1}}(\tau) = a_0^{(j)}\, y^{-r} + b_0^{(j)}\, y^{r} + \sum_{n+\varkappa_j \neq 0} a_{n+\varkappa}^{(j)}\, y^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left| K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi\,|n+\varkappa_j|}{\lambda_j}\, y\right) + \operatorname{sgn}(n+\varkappa_j)\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi\,|n+\varkappa_j|}{\lambda_j}\, y\right)\right| e^{\frac{2\pi i (n+\varkappa_j)}{\lambda_j} x}. \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

n durchläuft hierin alle von $-\varkappa_j$ verschiedenen ganz rationalen Zahlen. Die Koeffizienten $a_0^{(j)}$, $b_0^{(j)}$ verschwinden eo ipso, sobald $\varkappa_j \not\equiv 0\,(1)$ ist. Die Existenz solcher Entwicklungen kann ähnlich wie im Falle reiner Periodizität bewiesen werden. Unter der Voraussetzung $r>0$ stellt $g(\tau)$ eine Spitzenform erster Art genau dann dar, wenn $b_0^{(j)}=0\,(j=1, 2, \ldots, h)$ ist; eine Spitzenform zweiter Art liegt genau dann vor, wenn $a_0^{(j)}=b_0^{(j)}=0$ $(j=1, 2, \ldots, h)$ ist. Es zeigt sich nun, daß von Null verschiedene Spitzenformen im allgemeinen, wenn $r>\frac{1}{2}$, $r \neq 1$ ist, gar nicht existieren.

Satz 2. *Es sei* G *eine Untergruppe der Modulgruppe von endlichem Index,* $v(S)$ *ein Multiplikatorsystem zur Gruppe* G *und Dimension* -1; *für alle* $S \in \mathsf{G}$ *sei* $|v(S)|=1$. *Ferner sei* $r>\frac{1}{2}$ *und* $r \neq 1$. *Dann enthält die Formenklasse* $\{\mathsf{G}, -1, r, v\}$ *keine nicht identisch verschwindende Spitzenform erster Art.*

Beweis: Die Gruppe G besitzt, wie man leicht erkennt, in der Halbebene $y>0$ einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ mit den parabolischen Spitzen $s_1, s_2, \ldots, s_h$, der sich in Teilbereiche $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_h$ mit je einer parabolischen Spitze in solcher Weise zerlegen läßt, daß der Bildbereich $A_j(\mathfrak{P}_j)$ von $\mathfrak{P}_j$ bezüglich A_j in der Punktmenge $|x| \leqq \frac{\lambda_j}{2}$, $y \geqq \delta > 0$ enthalten ist, wobei δ hinreichend klein zu wählen ist und λ_j die oben festgelegte Bedeutung hat. Sei $g(\tau)$ eine Spitzenform erster Art in der Klasse $\{\mathsf{G}, -1, r, v\}$ und $r>\frac{1}{2}$. Für eine geeignete Konstante C ist offenbar

$$\sqrt{y}\,\left|g^{A_j^{-1}}(\tau)\right| < C,$$

sobald τ in $A_j(\mathfrak{P}_j)$ liegt; dabei ist j eine beliebige Ziffer aus der Reihe $1, 2, \ldots, h$. Stellt τ einen beliebigen Punkt der Halbebene $y>0$ dar, so gibt es in $\mathfrak{F}$ einen zu τ bezüglich G äquivalenten Punkt τ', der etwa in $\mathfrak{P}_j$ liegen möge. Wir setzen $A_j\tau' = \tau''$ und bezeichnen mit y, y', y'' die Imaginärteile von τ, τ', τ''. Alsdann ist

$$\sqrt{y}\,|g(\tau)| = \sqrt{y'}\,|g(\tau')| = \sqrt{y''}\,\left|g^{A_j^{-1}}(\tau'')\right|,$$

woraus erhellt, daß

$$\sqrt{y}\,|g(\tau)| < C \qquad \text{für} \qquad y > 0$$

ist. Es darf und soll $s_1 = \infty$ und $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ angenommen werden. Aus der FOURIERschen Koeffizientenformel

$$\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1} g(\tau)\, e^{-\frac{2\pi i (n+\varkappa_1)}{\lambda_1}x}\, dx = a^{(1)}_{n+\varkappa_1} y^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi\,|n+\varkappa_1|}{\lambda_1}\,y\right) + \operatorname{sgn}(n+\varkappa_1) K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi\,|n+\varkappa_1|}{\lambda_1}\,y\right)\right] \qquad (n+\varkappa_1 \neq 0)$$

folgt nun, wenn wir $a^{(1)}_{n+\varkappa_1} \neq 0$ voraussetzen,

$$K_{r+\frac{1}{2}}(y) + \operatorname{sgn}(n+\varkappa_1) K_{r-\frac{1}{2}}(y) = O\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \text{für} \qquad y \to 0.$$

Dieses asymptotische Verhalten ist mit der bekannten Beziehung

$$\lim_{y \to 0+0} y^{\nu} K_{\pm\nu}(y) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \qquad (\Re\, \nu > 0)$$

und $r > \frac{1}{2}$ nicht verträglich, mithin ist $a^{(1)}_{n+\varkappa_1} = 0$ für $n + \varkappa_1 \neq 0$. Ferner ergibt sich aus

$$\frac{1}{\lambda_1}\, y^{r} \int_0^{\lambda_1} g(\tau)\, dx = a^{(1)}_0$$

für $y \to 0$ auch $a^{(1)}_0 = 0$, so daß $g(\tau)$ identisch verschwindet. Die hier angewandte Schlußweise geht auf eine Bemerkung von Herrn PETERSSON zurück.

§ 3. DIRICHLETsche Reihen und automorphe Wellenformen der Dimension -1.

Um mit Hilfe der Mellintransformation einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den Funktionalgleichungen des eingangs beschriebenen dritten Typus und den automorphen Wellenformen der Dimension -1 herzustellen, benötigen wir einen Identitätssatz über Lösungen des Differentialgleichungssystems (30) für $k = 1$, den wir zunächst vorausschicken.

Satz 3. *Sei $r(r^2 - 1) \neq 0$ und $g(\tau)$ eine in der Halbebene $y > 0$ viermal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichungen*

$$(\Delta - r(r-1))\,(\Delta - r(r+1))\, g(\tau) = (\Delta - r(r-1))\,(\Delta - r(r+1))\, \tau g(\tau) = 0,$$

die den Bedingungen

$$g(\tau)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} g(\tau)_{x=0} = 0$$

genüge. Dann verschwindet $g(\tau)$ *identisch.*

Beweis: r und $g(\tau)$ mögen die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllen. Wegen $r \neq 0$ läßt sich $g(\tau)$ auf eindeutige Weise als Summe von Wellenfunktionen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} g(\tau) &= g_0(\tau) + g_1(\tau), \\ (\Delta - r(r-1))\, g_0(\tau) &= (\Delta - r(r+1))\, g_1(\tau) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Die Funktionen $g_0(\tau)$ und $g_1(\tau)$, die explizit durch

$$g_0(\tau) = -\frac{1}{2r}(\Delta - r(r+1))\, g(\tau), \qquad g_1(\tau) = \frac{1}{2r}(\Delta - r(r-1))\, g(\tau)$$

gegeben sind, haben als zweimal stetig differenzierbare Lösungen der elliptischen Differentialgleichungen (62) analytischen Charakter. Mithin ist $g(\tau)$ selbst eine analytische Funktion der Variablen x, y und wir können eine Potenzreihenentwicklung der Art

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\, x^n$$

ansetzen. Voraussetzungsgemäß ist

$$\alpha_0(z) = \alpha_1(y) = 0.$$

Behauptet wird, daß alle $\alpha_n(y)$ identisch in y verschwinden. Wir setzen zur Abkürzung $\frac{\partial}{\partial x} = D_x$, $\frac{\partial}{\partial y} = D_y$ und finden nach einfacher Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} (\Delta - r(r-1))(\Delta - r(r+1)) = y^4 D_x^4 + 2y^2(y^2 D_y^2 + 2y D_y + 1 - r^2) D_x^2 + \\ + y^4 D_y^4 + 4y^3 D_y^3 + 2(1-r^2)\, y^2 D_y^2 + r^2(r^2-1). \end{aligned}\right\}$$

Dieser Operator annulliert $g(\tau)$, mithin erhält man für die $\alpha_n(y)$ die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} &(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\, y^4 \alpha_{n+4}(y) \\ &+ 2(n+2)(n+1)\, y^2 (y^2 D_y^2 + 2y D_y + 1 - r^2)\, \alpha_{n+2}(y) \\ &+ (y^4 D_y^4 + 4y^3 D_y^3 + 2(1-r^2)\, y^2 D_y^2 + r^2(r^2-1))\, \alpha_n(y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{A$_n$}$$

Sie gilt für alle ganz rationalen n, wenn wir $\alpha_n(y) = 0$ für $n < 0$ setzen, was hiermit geschehen soll. Eine zweite Rekursionsformel dieser Art ergibt sich aus der Tatsache, daß auch

$$\tau g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n-1}(y) + i y \alpha_n(y)) x^n$$

durch den Operator (63) annulliert wird. Offenbar brauchen wir in (A_n) nur $\alpha_j(y)$ durch $\alpha_{j-1}(y) + i y \alpha_j(y)$ (für $j = n, n+2, n+4$) zu ersetzen. Von der so entstehenden Relation ziehen wir das $i y$-fache der Formel (A_n) ab. Es verbleibt

$$\left.\begin{aligned}&(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) y^4 \alpha_{n+3}(y)\\&+ 4i(n+2)(n+1) y^3 (y D_y + 1) \alpha_{n+2}(y)\\&+ 2(n+2)(n+1) y^2 (y^2 D_y^2 + 2 y D_y + 1 - r^2) \alpha_{n+1}(y)\\&+ 4i y^2 (y^2 D_y^3 + 3 y D_y^2 + (1 - r^2) D_y) \alpha_n(y)\\&+ (y^4 D_y^4 + 4 y^3 D_y^3 + 2(1 - r^2) y^2 D_y^2 + r^2(r^2 - 1)) \alpha_{n-1}(y) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (B_n)$$

Wir eliminieren $\alpha_{n+4}(y)$ aus (A_n) und (B_{n+1}), indem wir das $(n+1)$-fache von (B_{n+1}) um das $(n+5)$-fache von (A_n) vermindern. Nach Division durch 4 ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&i(n+3)(n+2)(n+1) y^3 (y D_y + 1) \alpha_{n+3}(y)\\&- (n+2)(n+1) y^2 (y^2 D_y^2 + 2 y D_y + 1 - r^2) \alpha_{n+2}(y)\\&+ i(n+1) y^2 (y^2 D_y^3 + 3 y D_y^2 + (1 - r^2)) \alpha_{n+1}(y)\\&- (y^4 D_y^4 + 4 y^3 D_y^3 + 2(1 - r^2) y^2 D_y^2 + r^2(r^2 - 1)) \alpha_n(y) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (C_n)$$

Insbesondere wird also, wenn man $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = 0$ berücksichtigt,

$$24 y^4 \alpha_3(y) + 8i y^3 (y D_y + 1) \alpha_2(y) = 0, \qquad (B_0)$$

$$6i y^3 (y D_y + 1) \alpha_3(y) - 2 y^2 (y^2 D_y^2 + 2 y D_y + 1 - r^2) \alpha_2(y) = 0. \qquad (C_0)$$

Gleichwertig hiermit ist

$$3 y \alpha_3(y) + i(y D_y + 1) \alpha_2(y) = 0,$$

$$y D_y (3 y \alpha_3(y)) + i(y^2 D_y^2 + 2 y D_y + 1 - r^2) \alpha_2(y) = 0.$$

Elimination von $\alpha_3(y)$ führt auf

$$y D_y (y D_y + 1) \alpha_2(y) - (y^2 D_y^2 + 2 y D_y + 1 - r^2) \alpha_2(y) = (r^2 - 1) \alpha_2(y) = 0.$$

Damit ergibt sich $\alpha_2(y) = 0$ und (B_0) zufolge auch $\alpha_3(y) = 0$. Der Rekursionsformel (A_n) ist nunmehr zu entnehmen, daß alle $\alpha_n(y) = 0$ sind, q. e. d.

Wir kommen nun zum Hauptsatz der Theorie.

Satz 4. *Es seien fest gegeben: eine reelle Zahl $\lambda > 0$, eine reelle nicht ganz rationale Zahl r, eine natürliche Zahl q, ein System von ganz rationalen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ und eine N-reihige quadratische Matrix (c_{kl}), deren Quadrat gleich der Einheitsmatrix sei.*

Wir betrachten Funktionensysteme

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_N(s); \quad \psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_N(s) \tag{I}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $(s - \frac{3}{2} - r)\,\varphi_k(s),\ (s - \frac{3}{2} + r)\,\psi_k(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$

sind ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.

2. *Es gelten die Funktionalgleichungen*

$$\xi_k(2 - s) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\eta_l(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{64}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} \xi_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s + r + \frac{1}{2}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s - r - \frac{1}{2}}{2}\right)\varphi_k(s), \\ \eta_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s - r - \frac{1}{2}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s + r - \frac{1}{2}}{2}\right)\psi_k(s) \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

gesetzt wird.

3. $\varphi_k(s)$ *und* $\psi_k(s)$ *sind in* DIRICHLET*sche Reihen der Art*

$$\varphi_k(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} \frac{a_n^{(k)}}{|n|^s}, \qquad \psi_k(s) = \sum_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} \frac{a_n^{(k)} \operatorname{sgn} n}{|n|^s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{66}$$

entwickelbar, die irgendwo konvergieren.

4. *Es sei α_k das Residuum von $\varphi_k(s)$ in $s = \frac{3}{2} + r$ und β_k das Residuum von $\psi_k(s)$ in $s = \frac{3}{2} - r$. Dann ist*

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right)\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\alpha_l = \left(1 - e^{\frac{2\pi i b_k}{q}}\right)\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\,\beta_l = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{67}$$

Außerdem betrachten wir die Funktionensysteme

$$g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_N(\tau) \tag{II}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *Die Funktionen $g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_N(\tau)$ sind in der Halbebene $y > 0$ viermal stetig differenzierbar und genügen den Differentialgleichungen*

$$\left.\begin{aligned} &(\Delta - r(r-1))(\Delta - r(r+1))\,g_k(\tau) = 0 \\ &(\Delta - r(r-1))(\Delta - r(r+1))\,\tau\,g_k(\tau) = 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).\right\} \tag{68}$$

2. *Es ist gleichmäßig in* x

$$\left.\begin{array}{c} g_k(\tau) = O(y^{\sigma_1}) \quad \text{für} \quad y \to \infty, \qquad g_k(\tau) = O(y^{-\sigma_2}) \quad \text{für} \quad y \to 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, N) \end{array}\right\} \tag{69}$$

mit gewissen positiven Konstanten σ_1, σ_2.

3. *Es ist*

$$g\left(\tau + \frac{\lambda}{q}\right) = e^{\frac{2\pi i b_k}{q}} g_k(\tau) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{70}$$

4. *Es gelten die Transformationsformeln*

$$g_k\left(\frac{-1}{\tau}\right) = -i\tau \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(\tau) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{71}$$

Zwischen den Funktionensystemen I und II besteht eine umkehrbar eindeutige lineare Beziehung, die durch die Mellintransformation vermittelt wird. Ausgehend von einem System I findet man für das zugeordnete System II die Darstellung

$$\left.\begin{array}{l} g_k(\tau) = a_0^{(k)} y^{-r} + b_0^{(k)} y^r + \\ + \sum\limits_{\substack{n \equiv b_k (q) \\ n \neq 0}} a_n^{(k)} y^{\frac{1}{2}} \left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{\lambda} x}. \end{array}\right\} \tag{72}$$

Dabei ist

$$\left.\begin{array}{ll} a_0^{(k)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\dfrac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}-r} \Gamma(1-r) \sum\limits_{l=1}^{N} c_{kl}\,\beta_l, & \\ & (k = 1, 2, \ldots, N). \\ b_0^{(k)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\dfrac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}+r} \Gamma(1+r) \sum\limits_{l=1}^{N} c_{kl}\,\alpha_l & \end{array}\right\} \tag{73}$$

Vorbemerkung: Der Fall ganz rationaler r erfordert einige Modifikationen. Der Einfachheit halber lassen wir ihn außer Acht.

Beweis: 1. Es sei $g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_N(\tau)$ ein Funktionensystem, welches den Bedingungen II, 1 bis 4 genügen möge. $g_k(\tau)$ ist eine in der Halbebene $y > 0$ viermal stetig differenzierbare Funktion mit der Periode λ und wächst für $y \to \infty$ gleichmäßig in x höchstens wie eine feste Potenz von y. Infolgedessen läßt sich $g_k(\tau)$ in eine Fourier-Reihe der Art

$$g_k(\tau) = a_0^{(k)} y^{-r} + b_0^{(k)} y^r + \sum_{n \neq 0} a_n^{(k)} y^{\frac{1}{2}} \left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda} y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{\lambda} x}$$

entwickeln. Damit Gl. (70) befriedigt wird, ist $a_n^{(k)} = 0$ für $n \not\equiv b_k(q)$ und $b_0^{(k)} = 0$ für $b_k \not\equiv 0(q)$ zu verlangen. Die FOURIER-Entwicklung von $g_k(\tau)$ kann also in der Gestalt Gl. (72) angesetzt werden. Erklären wir die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ durch Gl. (73), dann sind die Bedingungen (67) erfüllt. In die FOURIERsche Koeffizientenformel

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda g_k(\tau)\, e^{-\frac{2\pi i n}{\lambda}x}\, dx = a_n^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}}\left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right] \qquad (n \neq 0)$$

tragen wir $y = c/|n|$ ein und wählen $c > 0$ so, daß bei jeder Wahl des Vorzeichens

$$K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) \pm K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) \neq 0$$

wird. Für $|n| \to \infty$ folgt nun nach Gl. (69)

$$a_n^{(k)} = O\left(|n|^{\sigma_2+\frac{1}{2}}\right).$$

Die DIRICHLET-Reihen (66) sind also für $\Re e\, s > \sigma_2 + \frac{3}{2}$ konvergent.

Zur Abkürzung setzen wir

$$h_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\, g_k\left(\frac{-1}{\tau}\right) + i\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(\tau) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Auf Grund von Satz 3 ist das Funktionalgleichungssystem (71) mit

$$h_k(\tau)_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\, h_k(\tau)_{x=0} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

gleichwertig. Hierfür kann auch

$$\left.\begin{aligned} g_k\left(\frac{i}{y}\right) &= y\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(iy), \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ \frac{\partial}{\partial x}\, g_k\left(\frac{-1}{\tau}\right)_{x=0} &= y\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, \frac{\partial}{\partial x}\, g_l(\tau)_{x=0} - i\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, g_l(iy) \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

geschrieben werden. Die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} F_k(y) &= a_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}-r} + b_0^{(k)}\, y^{\frac{1}{2}+r} + \sum_{\substack{n \equiv b_k(q) \\ n \neq 0}} a_n^{(k)}\, y\left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right] \\ G_k(y) &= \sum_{\substack{n \equiv b_k(q) \\ n \neq 0}} n\, a_n^{(k)}\, y^2\left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{\lambda}y\right)\right] \\ H_k(y) &= G_k(y) - \frac{\lambda}{4\pi}\, F_k(y) \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

genügen also den mit Gl. (74) äquivalenten Transformationsformeln

$$F_k\left(\frac{1}{y}\right)=\sum_{l=1}^{N} c_{kl} F_l(y), \quad H_k\left(\frac{1}{y}\right)=-\sum_{l=1}^{N} c_{kl} H_l(y) \quad (k=1,2,\ldots,N). \tag{76}$$

Wir ziehen aus den Funktionen $F_k(y), H_k(y)$ die zum FOURIER-Exponenten $n=0$ gehörigen Glieder heraus, bilden also

$$\left.\begin{aligned} F_k^*(y) &= F_k(y) - a_0^{(k)} y^{\frac{1}{2}-r} - b_0^{(k)} y^{\frac{1}{2}+r}, \\ H_k^*(y) &= H_k(y) + \frac{\lambda}{4\pi}\left(a_0^{(k)} y^{\frac{1}{2}-r} + b_0^{(k)} y^{\frac{1}{2}+r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

In der üblichen Weise kann nun mit Hilfe der Transformationsformeln (76) gezeigt werden, daß die zunächst nur für hinreichend große Werte von $\Re e\, s$ erklärten analytischen Funktionen

$$\xi_k^*(s)=4\int_0^\infty F_k^*(y)\, y^{s-2}\, dy, \quad \eta_k^*(s)=4\int_0^\infty H_k^*(y)\, y^{s-2}\, dy \quad (k=1,2,\ldots,N) \tag{78}$$

in der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi_k^*(s) &= 4\int_1^\infty F_k^*(y)\, y^{s-2}\, dy + 4\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\int_1^\infty F_l^*(y)\, y^{-s}\, dy \\ &\quad - \frac{4a_0^{(k)}}{s-\frac{1}{2}-r} - \frac{4b_0^{(k)}}{s-\frac{1}{2}+r} + \frac{4\mu_k}{s-\frac{3}{2}+r} + \frac{4\nu_k}{s-\frac{3}{2}-r}, \\ \eta_k^*(s) &= 4\int_1^\infty H_k^*(y)\, y^{s-2}\, dy - 4\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\int_1^\infty H_l^*(y)\, y^{-s}\, dy \\ &\quad + \frac{\lambda a_0^{(k)}}{\pi\left(s-\frac{1}{2}-r\right)} + \frac{\lambda b_0^{(k)}}{\pi\left(s-\frac{1}{2}+r\right)} + \frac{\lambda\mu_k}{\pi\left(s-\frac{3}{2}+r\right)} + \frac{\lambda\nu_k}{\pi\left(s-\frac{3}{2}-r\right)} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

dargestellt werden können. Hierin ist

$$\mu_k=\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, a_0^{(l)}, \qquad \nu_k=\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, b_0^{(l)} \qquad (k=1,2,\ldots,N) \tag{80}$$

gesetzt worden. Die Funktionen $\xi_k^*(s)$, $\eta_k^*(s)$ sind damit in die ganze s-Ebene analytisch fortgesetzt. Außerdem stellt man fest, daß die Funktionalgleichungen

$$\xi_k^*(2-s)=\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, \xi_l^*(s), \quad \eta_k^*(2-s)=-\sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, \eta_l^*(s) \quad (k=1,2,\ldots,N) \tag{81}$$

bestehen.

Trägt man für $F_k^*(y)$ und $H_k^*(y)$ die angegebenen Reihendarstellungen in Gl. (78) ein und vertauscht sodann die Summation mit der Integration, so ergibt sich unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} \xi_k^*(s) &= \xi_k(s) + \eta_k(s) \\ \eta_k^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s-r+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r+\frac{3}{2}}{2}\right) \psi_k(s) \\ &\qquad + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{s+1} \Gamma\left(\frac{s-r+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r+\frac{1}{2}}{2}\right) \varphi_k(s) - \frac{\lambda}{4\pi}\, \xi_k^*(s) \\ &= \frac{s-1}{2}\, \frac{\lambda}{\pi}\, \xi_k^*(s) - \frac{r}{2}\, \frac{\lambda}{\pi} \left[\xi_k(s) - \eta_k(s)\right], \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

wenn man die in Satz 4 eingeführten Bezeichnungen verwendet und die Funktionen $\varphi_k(s)$ und $\psi_k(s)$ durch die Reihen (66) definiert. Es zeigt sich nun, daß die Systeme (81) und

$$\xi_k(2-s) = \sum_{l=1}^{N} c_{kl}\, \eta_l(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{83}$$

gleichwertig sind. Wir lösen die Gl. (82) nach den ungestirnten Funktionen auf:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda r}{\pi}\, \xi_k(s) &= -\eta_k^*(s) + \frac{\lambda}{\pi}\, \frac{s+r-1}{2}\, \xi_k^*(s), \\ \frac{\lambda r}{\pi}\, \eta_k(s) &= \eta_k^*(s) - \frac{\lambda}{\pi}\, \frac{s-r-1}{2}\, \xi_k^*(s) \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

und erkennen auf Grund der Darstellungen (79), daß

$$\xi_k(s) + \frac{4 a_0^{(k)}}{s - \frac{1}{2} - r} - \frac{4 \nu_k}{s - \frac{3}{2} - r}, \qquad \eta_k(s) + \frac{4 b_0^{(k)}}{s - \frac{1}{2} + r} - \frac{4 \mu_k}{s - \frac{3}{2} + r}$$

ganze Funktionen von s sind. Daraus folgt die Identität der unter II, 4 genannten Residuen mit den durch Gl. (73) eingeführten Zahlen α_k und β_k. Schließlich kann I, 1 auf Grund der Formeln (84) u. (79) nachgewiesen werden.

2. Geht man umgekehrt von einem Funktionensystem I aus, so läßt sich an Hand der notierten Formeln das zugehörige Funktionensystem II leicht konstruieren. Dabei ist von den zu (78) inversen Transformationsformeln

$$\left.\begin{gathered} F_k^*(y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \xi_k^*(s)\, y^{1-s}\, ds, \quad H_k^*(y) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \eta_k^*(s)\, y^{1-s}\, ds \\ (k = 1, 2, \ldots, N) \end{gathered}\right\} \tag{85}$$

Gebrauch zu machen. Dieser Hinweis mag im Hinblick auf die breitere Darstellung[3] des entsprechenden Satzes über Wellenfunktionen genügen. Satz 4 ist damit bewiesen.

Die in § 5 beabsichtigten Anwendungen beziehen sich auf die speziellen Daten $\lambda = 2$, $q = N = 1$, $r = \frac{1}{2}(1)$. In diesem Fall treten automorphe Formen $g(\tau)$ auf, die den Transformationsformeln

$$g(\tau + 2) = g(\tau), \quad g\left(\frac{-1}{\tau}\right) = -(-1)^{\alpha} i \tau g(\tau) \quad (\alpha \text{ ganz rational}) \tag{86}$$

genügen, also der Formenklasse $\{\mathsf{T}, -1, r, v_{\vartheta}^{2+4\alpha}\}$ angehören. Dabei bezeichnet T die sog. Thetagruppe, die aus den ganzzahligen unimodularen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (2)$$

besteht und von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, und v_{ϑ} das Multiplikatorsystem der Thetareihe

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2},$$

die eine automorphe Form der Dimension $-\frac{1}{2}$ zur Gruppe T darstellt. Bekanntlich ist

$$v_{\vartheta}^{2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{array}{lll} (-1)^{\frac{d-1}{2}} & \text{für} & b \equiv c \equiv 0 \ (2), \\ (-1)^{\frac{c+1}{2}} i & \text{für} & a \equiv d \equiv 0 \ (2). \end{array}\right\} \tag{87}$$

Im nächsten Paragraphen werden wir die ganzen Formen in der Klasse $\{\mathsf{T}, -1, r, v_{\vartheta}^{2+4\alpha}\}$ explizit bestimmen; sie lassen sich, wie wir sehen werden, aus den Eisenstein-Reihen $E_1(\tau, r; (a_1, a_2), 4)$ linear kombinieren, sofern $r > \frac{1}{2}$ und $r \neq 1$ ist. Ferner bleibt noch zu zeigen, daß die ganzen Formen in der Klasse $\{\mathsf{T}, -1, r, v_{\vartheta}^{2+4\alpha}\}$ durch die O-Aussagen (69) charakterisiert sind.

§ 4. Die Eisenstein-Reihen zur Stufe Q.

$\mathsf{M}(Q)$ bezeichne die Hauptkongruenzuntergruppe in der Modulgruppe zur Stufe Q. Sie besteht aus den ganzzahligen unimodularen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (Q).$$

Wir untersuchen zunächst für eine beliebige natürliche Zahl k, die wir im Falle $Q \leqq 2$ gerade annehmen, die EISENSTEIN-Reihen

$$E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i\,(Q) \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}} \frac{y^r}{(m_1\tau + m_2)^k\,|m_1\tau + m_2|^{2r}}. \tag{88}$$

Sie konvergieren absolut und stellen Formen der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), -k, r, 1\}$ dar, sofern $k + 2r > 2$ ist. Von dieser Voraussetzung können wir uns befreien, wenn wir $E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$ als Funktion von r ins Komplexe analytisch fortsetzen. Wir brauchen indessen nicht näher hierauf einzugehen, da wir uns später auf die Betrachtung der Fälle $k = 0, r > 1$ und $k = 1, r > \frac{1}{2}$ beschränken werden. Die in τ periodische Funktion $E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$ gestattet eine Entwicklung in eine FOURIER-Reihe, die wir nun bestimmen wollen. Es sei

$$\delta\left(\frac{a}{Q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \equiv 0\,(Q), \\ 0 & \text{für } a \not\equiv 0\,(Q), \end{cases}$$

$$\zeta_k(s, a, Q) = \sum_{\substack{m \equiv a\,(Q) \\ m \neq 0}} \frac{(\operatorname{sgn} m)^k}{|m|^s}, \tag{89}$$

$$f_k(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y^r}{(\tau + n)^k\,|\tau + n|^{2r}}. \tag{90}$$

Nach einer einfachen Umformung wird

$$\left.\begin{aligned} E_k(\tau, r; (a_1, a_2), Q) &= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right)\zeta_k(k + 2r, a_2, Q)\,y^r + \\ &+ \frac{1}{Q^{k+r}} \sum_{\substack{m \equiv a_1\,(Q) \\ m \neq 0}} \frac{(\operatorname{sgn} m)^k}{|m|^{k+2r}} \sum_{j \bmod m} f_k\left(\frac{\tau}{Q} + \frac{a_2 + jQ}{mQ}, r\right), \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

so daß nur noch die FOURIER-Entwicklung von $f_k(\tau, r)$ berechnet zu werden braucht. Wir setzen

$$f_k(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(k)}(y, r)\,e^{2\pi i n x}$$

und finden

$$A_n^{(k)}(y, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^r e^{2\pi i n x}}{\tau^k\,|\tau|^{2r}}\,dx \qquad \text{für alle } n.$$

Diese Integrale lassen sich durch bekannte Funktionen ausdrücken.

Für $n \neq 0$ ergibt sich

$$A_n^{(k)}(y, r) = y^{1-k-r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-i)^k e^{-2\pi i n x y}}{(x^2+1)^{k+r}} d x$$

$$= y^{1-k-r} e^{2\pi n y} (-2\pi i n)^{-k} \frac{d^k}{d y^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n (x-i) y}}{(x^2+1)^{k+r}} d x$$

$$= 2\, (-2\pi i n)^{-k} y^{1-k-r} e^{2\pi n y} \frac{d^k}{d y^k} e^{-2\pi n y} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x y}{(x^2+1)^{k+r}} d x$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{2\pi n y}}{(2 y)^{k+r-1} \Gamma(k+r)\, (-2\pi i n)^k} \frac{d^k}{d y^k} e^{-2\pi n y} (2\pi |n| y)^{k+r-\frac{1}{2}} K_{k+r-\frac{1}{2}}(2\pi |n| y)$$

$$= \frac{(-i)^k \sqrt{2\pi}\, \pi^{k+r-1}}{\Gamma(k+r)} B_r^{(k)}(2\pi |n| y, \operatorname{sgn} n),$$

wenn wir

$$B_r^{(k)}(y, \varepsilon) = (-\varepsilon)^k y^{1-k-r} e^{\varepsilon y} \frac{d^k}{d y^k} e^{-\varepsilon y} y^{k+r-\frac{1}{2}} K_{k+r-\frac{1}{2}}(y)$$

setzen. Außerdem wird

$$A_0^{(k)}(y, r) = y^{1-k-r} \gamma_k(r)$$

mit

$$\gamma_k(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-i)^k}{(x^2+1)^{k+r}} d x = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \equiv 0\,(2)}}^{k} \binom{k}{\nu} (-i)^{k-\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\nu\, d x}{(x^2+1)^{k+r}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \binom{k}{2\nu} (-i)^{k-2\nu} \int_0^{\infty} \frac{y^{\nu-\frac{1}{2}}\, d y}{(1+y)^{k+r}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \binom{k}{2\nu} (-i)^{k-2\nu} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\, \Gamma(k+r-\nu-\frac{1}{2})}{\Gamma(k+r)}.$$

Insbesondere ist also

$$B_r^{(1)}(y,\varepsilon) = y^{\frac{1}{2}}[K_{r+\frac{1}{2}}(y) + \varepsilon K_{r-\frac{1}{2}}(y)]\,(\varepsilon = \pm 1),\ \gamma_1(r) = -i\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+r)}{\Gamma(1+r)}.$$

Da der Operator $\prod_{\nu=0}^{k}\bigl(\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1)\bigr)$ die Reihe $f_k(\tau, r)$ annulliert (der Beweis ist wie für die EISENSTEIN-Reihen zu führen), ist $f_k(\tau, r)$ als Summe von Wellenfunktionen darstellbar, sofern das Polynom $\prod_{\nu=0}^{k}\bigl(x - (r+\nu)(r+\nu-1)\bigr)$ separabel, also r von $-\frac{h}{2}$ $(h = 0, 1, \ldots, 2k-2)$ verschieden ist. Daraus folgt unmittelbar das Bestehen einer Identität

$$B_r^{(k)}(y,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{k}\beta_\nu^{(k)}(r,\varepsilon)\, y^{\frac{1}{2}}K_{\nu+r-\frac{1}{2}}(y),$$

wovon man sich auf Grund der bekannten Relationen zwischen den Funktionen $K_\mu(y)$ und ihren Ableitungen zu verschiedenen Parameterwerten μ auch direkt überzeugen kann. Berücksichtigen wir die angegebenen Entwicklungen, so geht Gl. (91) über in

$$\left.\begin{aligned} &E_k(\tau,r;(a_1,a_2),Q) = \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right)\zeta_k(k+2r,a_2,Q)\,y^r \\ &+\frac{\gamma_k(r)}{Q}\zeta_k(k+2r-1,a_1,Q)\,y^{1-k-r} + \frac{(-i)^k\sqrt{2\pi}\,\pi^{k+r-1}}{\Gamma(k+r)\,Q^{k+r}}\times \\ &\times\sum_{n\neq 0}\Biggl[\sum_{\substack{d_1d_2=n\\ d_1\equiv a_1(Q)}}(\operatorname{sgn} d_1)^k\,|d_1|^{-r}|d_2|^{k+r-1}e^{\frac{2\pi i a_2 d_2}{Q}}\Biggr]\cdot B_r^{(k)}\left(\frac{2\pi|n|}{Q}y,\operatorname{sgn} n\right)e^{\frac{2\pi i n}{Q}x}. \end{aligned}\right\}\quad(92)$$

Die EISENSTEIN-Reihen, die sich bezüglich der Substitutionen der Modulgruppe nach der Gl. (28) transformieren, erweisen sich damit als ganze Wellenformen der Dimension $-k$ zur Stufe Q.

Speziell für $k = 1$ und $Q > 2$ wird

$$\left.\begin{aligned} &E_1(\tau,r;(a_1,a_2),Q) = u_1(y,r;(a_1,a_2),Q) \\ &\quad-\frac{2\pi i\,\pi^r}{\Gamma(1+r)\,Q^{\frac{3}{2}+r}}\sum_{n\neq 0}\Biggl[\sum_{\substack{d_1d_2=n\\ d_1\equiv a_1(Q)}}\operatorname{sgn} d_1\,|d_1|^{\frac{1}{2}-r}|d_2|^{\frac{1}{2}+r}e^{\frac{2\pi i a_2 d_2}{Q}}\Biggr]\times \\ &\quad\times y^{\frac{1}{2}}\left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q}y\right)+\operatorname{sgn} n\,K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q}y\right)\right]e^{\frac{2\pi i n}{Q}x} \end{aligned}\right\}\quad(93)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} u_1(y, r; (a_1, a_2), Q) = \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \zeta_1(1+2r, a_2, Q)\, y^r \\ - \frac{i\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}+r)}{Q\,\Gamma(1+r)} \zeta_1(2r, a_1, Q)\, y^{-r}. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Wir beweisen nun, daß eine ganze Form der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), -1, r, 1\}$ ($r > \frac{1}{2}$, $r \neq 1$) mit Hilfe der EISENSTEIN-Reihen $E_1(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$ auf eine Spitzenform erster Art reduziert werden kann. An Stelle der Reihen $E_1(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$ betrachten wir die Funktionen

$$E_1^*(\tau, r; (a_1, a_2), Q) = \sum_{\substack{m_i \equiv a_i\ (Q) \\ (m_1, m_2) = 1}} \frac{y^r}{(m_1\tau + m_2)^k |m_1\tau + m_2|^{2r}},$$

die sich aus den ursprünglichen Reihen linear kombinieren lassen; für $(a_1, a_2, Q) = 1$ ist nämlich

$$E_1^*(\tau, r; (a_1, a_2), Q) = \sum_{t \bmod Q} E_1(\tau, r; (t a_1, t a_2), Q)\, c(1+2r, t, Q);$$

dabei ist

$$c(s, t, Q) = \sum_{\substack{tn \equiv 1\ (Q) \\ n > 0}} \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad (\mu(n) = \text{MÖBIUSsche Funktion}).$$

Wir bezeichnen mit $u_1^*(y, r; (a_1, a_2), Q)$ den von x unabhängigen Bestandteil in der FOURIER-Entwicklung von $E_1^*(\tau, r; (a_1, a_2), Q)$. Mit einer gewissen für $r > \frac{1}{2}$ regulären Funktion $\eta_1(r, a_1, Q)$ ist offenbar

$$u_1^*(y, r; (a_1, a_2), Q) = \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \sum_{t \bmod Q} \zeta_1(1+2r, t a_2, Q)\, c(1+2r, t, Q)\, y^r + \eta_1(r, a_1, Q)\, y^{-r}$$

$$= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \sum_{t \bmod Q} \sum_{\substack{tn \equiv 1\ (Q) \\ n > 0}} \sum_{\substack{m \equiv a_2 t\ (Q) \\ m \neq 0}} \frac{\mu(n)\,\operatorname{sgn}(mn)}{|mn|^{1+2r}}\, y^r + \eta_1(r, a_1, Q)\, y^{-r}$$

$$= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right) \sum_{\substack{n > 0,\ m \neq 0 \\ n \mid m,\ m \equiv a_2\ (Q)}} \frac{\mu(n)\,\operatorname{sgn} m}{|m|^{1+2r}}\, y^r + \eta_1(r, a_1, Q)\, y^{-r}$$

$$= \delta\left(\frac{a_1}{Q}\right)\left(\delta\left(\frac{a_2 - 1}{Q}\right) - \delta\left(\frac{a_2 + 1}{Q}\right)\right) y^r + \eta_1(r, a_1, Q)\, y^{-r}.$$

Wegen $Q > 2$ tritt y^r hierin genau dann auf, wenn

$$a_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad a_2 \equiv 1 \quad \text{oder} \quad -1\ (Q)$$

ist. Nach einer bekannten HECKEschen Schlußweise ergibt sich daraus der oben ausgesprochene Reduktionssatz. In Verbindung mit Satz 2 folgt nunmehr

Satz 5. *Sei $r > \frac{1}{2}$, $r \neq 1$ und $Q > 2$, dann besteht die lineare Schar der ganzen Formen in der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), -1, r, 1\}$ aus den Linearkombinationen der* EISENSTEIN-*Reihen* $E_1\bigl(\tau, r; (a_1, a_2), Q\bigr)$.

Mit derselben Methode beweist man einen entsprechenden Satz über Wellenfunktionen zur Stufe Q, den wir an dieser Stelle formulieren, ohne auf Einzelheiten des Beweises einzugehen.

Satz 6. *Sei $r > 1$ und Q eine beliebige natürliche Zahl, dann besteht die lineare Schar der ganzen Funktionen in der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), 0, r, 1\}$ aus den Linearkombinationen der* EISENSTEIN-*Reihen* $E_0\bigl(\tau, r; (a_1, a_2), Q\bigr)$.

Eine Form aus einer der in den Sätzen 5 und 6 aufgeführten Klassen $\{\mathsf{M}(Q), -k, r, 1\}$ ist dann und nur dann ganz, wenn es positive Konstanten σ_1, σ_2 gibt, so daß gleichmäßig in x

$$g(\tau) = O(y^{\sigma_1}) \quad \text{für} \quad y \to \infty, \quad g(\tau) = O(y^{-\sigma_2}) \quad \text{für} \quad y \to 0. \tag{95}$$

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, daß die O-Aussagen (95) für $g(\tau) \in \{\mathsf{M}(Q), -k, r, 1\}$ erfüllt sind. Es ist dann zu zeigen, daß

$$g^{A^{-1}}(\tau) = \frac{g\left(\frac{d\tau - b}{-c\tau + a}\right)}{(-c\tau + a)^k} \qquad \left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ beliebig aus } \mathsf{M},\ c \neq 0\right)$$

für $y \to \infty$ gleichmäßig in x höchstens wie eine feste Potenz von y wächst. Da $g^{A^{-1}}(\tau)$ in x periodisch ist, genügt es, x in einem festen hinreichend großen Intervall variieren zu lassen. Sei

$$\left|x - \frac{a}{c}\right| \leq C, \quad y \geq C \geq 1.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine positive Konstante C_1, so daß

$$\left|g\left(\frac{d\tau - b}{-c\tau + a}\right)\right| \leq C_1 \left(\frac{y}{|-c\tau + a|^2}\right)^{-\sigma_2} \qquad \text{für} \qquad \frac{y}{|-c\tau + a|^2} \leq 1$$

gilt. Die letzte dieser Ungleichungen ist wegen $C \geq 1$ immer erfüllt. Es kann also

$$\left|g^{A^{-1}}(\tau)\right| \leq C_1 \frac{|-c\tau + a|^{2\sigma_2}}{y^{\sigma_2}|-c\tau + a|^k} \leq C_1 |c|^{2\sigma_2 - k} \frac{(C^2 + y^2)^{\sigma_2}}{y^{\sigma_2 + k}} \leq C_1 |c|^{2\sigma_2 - k}\, 2^{\sigma_2}\, y^{\sigma_2 - k}$$

und mithin

$$g^{A^{-1}}(\tau) = O\left(y^{\sigma_2 - k}\right) \qquad \text{für} \qquad y \to \infty$$

geschlossen werden. Stellt umgekehrt $g(\tau)$ eine ganze Form dar, dann gelten O-Aussagen von der Art Gl. (95), denn $g(\tau)$ setzt sich aus EISENSTEIN-Reihen linear zusammen und für diese ist die Behauptung richtig, wie man auf Grund der FOURIER-Entwicklungen leicht feststellt.

Wir können nun jeder ganzen Form

$$g(\tau) = u(y) + \sum_{n \neq 0} a_n y^{\frac{1}{2}} \left[K_{r+\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q} y\right) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|n|}{Q} y\right)\right] e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} \tag{96}$$

der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), -1, r, 1\}$ ein Paar von DIRICHLET-Reihen zuordnen:

$$\varphi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{|n|^s}, \qquad \psi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n \operatorname{sgn} n}{|n|^s}. \tag{97}$$

Die Tatsache, daß diese Reihen in der s-Ebene irgendwo konvergieren, kommt in der zweiten der O-Aussagen (95) zum Ausdruck. Sei $\mathfrak{S}_1$ die lineare Schar der Funktionenpaare $(\varphi(s), \psi(s))$. Die Frage, ob $\mathfrak{S}_1$ eine Basis besitzt, die sich aus DIRICHLETschen Reihen mit EULERscher Produktentwicklung zusammensetzt, gibt im Falle $r > \frac{1}{2}$, $r \neq 1$ zu keinen tiefliegenden Erörterungen mehr Anlaß, da die ganzen Formen von den EISENSTEIN-Reihen erzeugt werden. Gewissen Linearkombinationen der Reihen $E_1(\tau, r; (a_1, a_2), \zeta)$, die mit jenen linear äquivalent sind, entsprechen die Paare der L-Reihenprodukte

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\chi_1(-1))\,(1+\chi_2(-1))}{(t_1 t_2)^s}\, L\left(s+r-\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(s-r-\frac{1}{2}, \chi_2\right), \\ &\quad \frac{(1+\chi_1(-1))\,(1-\chi_2(-1))}{(t_1 t_2)^s}\, L\left(s+r-\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(s-r-\frac{1}{2}, \chi_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Dabei ist t_i ein beliebiger Teiler von Q, χ_i ein beliebiger Charakter modulo Q/t_i $(i = 1, 2)$ und

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Zum Beweis sind hier dieselben Überlegungen anzustellen, die an anderer Stelle[3] für die EISENSTEIN-Reihen der Funktionenklasse $\{\mathsf{M}(Q), 0, r, 1\}$ einen analogen Satz ergaben. Ordnet man jeder ganzen Funktion

$$g(\tau) = u(y) + \sum_{n \neq 0} a_n y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi |n|}{Q} y\right) e^{\frac{2\pi i n}{Q} x} \tag{99}$$

der Klasse $\{\mathsf{M}(Q), 0, r, 1\}$ in derselben Weise ein Paar von DIRICHLET-Reihen $(\varphi(s), \psi(s))$ zu und bezeichnet man mit $\mathfrak{S}_0$ die lineare Schar dieser Paare, so folgt im Fall $r > 1$ auf Grund von Satz 6 und eines in [3] bewiesenen Satzes, daß $\mathfrak{S}_0$ von den Paaren

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(1+\chi_1(-1))(1+\chi_2(-1))}{(l_1 l_2)^s} L\left(s+r-\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(s-r+\frac{1}{2}, \chi_2\right),\\ &\frac{(1-\chi_1(-1))(1-\chi_2(-1))}{(l_1 l_2)^s} L\left(s+r-\frac{1}{2}, \chi_1\right) L\left(s-r+\frac{1}{2}, \chi_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

erzeugt wird.

Wir wenden uns nun der Thetagruppe T zu und bestimmen die ganzen Formen in den Klassen

$$\{\mathsf{T}, -1, r, v_\vartheta^{2+4\alpha}\} \; (r > \tfrac{1}{2}, r \neq 1), \; \{\mathsf{T}, 0, r, v_\vartheta^{4\alpha}\} \; (r > 1). \tag{101}$$

Ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ der Gruppe T in der Halbebene $y > 0$ wird durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x \leqq 2, \quad |\tau| \geqq 1, \quad |\tau - 2| \geqq 1, \quad y > 0$$

beschrieben. Er besitzt zwei inäquivalente parabolische Spitzen, nämlich ∞ und 1. Die Multiplikatorsysteme $v_\vartheta^{2+4\alpha}$, v_ϑ^4 sind in der Spitze ∞ unverzweigt, in 1 verzweigt; $v_\vartheta^8 = 1$ ist in ∞ und 1 unverzweigt. Da die Formenklassen (101) als Teilscharen der Klassen $\{\mathsf{M}(4), -1, r, 1\}$ bzw. $\{\mathsf{M}(2), 0, r, 1\}$ keine Spitzenformen enthalten, so ist die Maximalzahl unabhängiger ganzer Formen in jeder der Klassen (101) gleich der Anzahl der parabolischen Spitzen von $\mathfrak{F}$, in denen das zugehörige Multiplikatorsystem unverzweigt ist. Diese Anzahl ist gleich 2 für v_ϑ^8 und gleich 1 in allen anderen Fällen. Ganze Formen der gewünschten Art hat man in den Linearkombinationen

$$\left.\begin{aligned}E_1(\tau, r; \alpha) &= E_1(\tau, r; (0, 1), 4) + E_1(\tau, r; (2, 1), 4) +\\ &\quad + (-1)^\alpha i\,[E_1(\tau, r; (1, 0), 4) + E_1(\tau, r; (1, 2), 4)],\\ E_0(\tau, r; \alpha) &= E_0(\tau, r; (0, 1), 2) + (-1)^\alpha E_0(\tau, r; (1, 0), 2),\\ E_0(\tau, r) &= E_0(\tau, r; (1, 1), 2) \qquad (\text{zu } \alpha \equiv 0\ (2)).\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Um das Verhalten dieser Formen gegenüber den Substitutionen der Thetagruppe zu prüfen, genügt es, das Verhalten gegenüber den erzeugenden Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

festzustellen, was auf Grund der Transformationsformel (28) ohne weiteres möglich ist. Die FOURIER-Entwicklungen der Reihen (102) können nach Gl. (93), (94) sowie entsprechenden Gleichungen in [3] berechnet werden. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}
E_1(\tau, r; \alpha) &= \zeta_1(1+2r, 1, 4)\, y^r + (-1)^\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+1)} \zeta_1(2r, 1, 4)\, y^{-r} + \\
&\quad + \frac{\pi^{r+1}}{2^{\frac{3}{2}+2r}\Gamma(r+1)} \sum_{n \neq 0} |n|^{\frac{1}{2}} \Bigg[\operatorname{sgn} n \sum_{\substack{ab=2n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{a}{b}\right|^r + (-1)^\alpha \sum_{\substack{ab=2n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{b}{a}\right|^r \Bigg] \times \\
&\quad \times y^{\frac{1}{2}} \left[K_{r+\frac{1}{2}}(\pi |n| y) + \operatorname{sgn} n\, K_{r-\frac{1}{2}}(\pi |n| y)\right] e^{\pi i n x}, \\
E_0(\tau, r; \alpha) &= \zeta_0(2r, 1, 2)\, y^r + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(r)} \times \\
&\qquad \times \left[\zeta_0(2r-1, 0, 2) + (-1)^\alpha \zeta_0(2r-1, 1, 2)\right] y^{1-r} + \\
&\quad + \frac{\pi^r}{2^{r-\frac{1}{2}}\Gamma(r)} \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab=n \\ a \equiv 0\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r-\frac{1}{2}} + (-1)^\alpha \sum_{\substack{ab=n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left|\frac{b}{a}\right|^{r-\frac{1}{2}} \Bigg] y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}(\pi |n| y)\, e^{\pi i n x}, \\
{}^*E_0(\tau, r) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(r)} \zeta_0(2r-1, 1, 2)\, y^{1-r} + \\
&\quad + \frac{\pi^r}{2^{r-\frac{1}{2}}\Gamma(r)} \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab=n \\ a \equiv 1\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r-\frac{1}{2}} \Bigg] y^{\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}(\pi |n| y)\, e^{\pi i n x}.
\end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Den normierten Formen

$$2^{\frac{3}{2}+2r} \pi^{-r-1}\, \Gamma(r+1)\, E_1(\tau, r; \alpha), \qquad 2^{r-\frac{1}{2}} \pi^{-r}\, \Gamma(r)\, E_0(\tau, r; \alpha),$$
$$2^{r-\frac{1}{2}} \pi^{-r}\, \Gamma(r)\, {}^*E_0(\tau, r),$$

auf die der Satz 4 und das analoge Theorem über Wellenfunktionen (Satz 1 in [3]) mit $\lambda = 2$, $q = N = 1$, $c_{11} = (-1)^\alpha$ anwendbar sind, können Paare von DIRICHLETschen Reihen zugeordnet werden, die in entsprechender Reihenfolge mit

$$(\varphi_1(s, r; \alpha), \psi_1(s, r; \alpha)), \qquad (\varphi_0(s, r; \alpha), \psi_0(s, r; \alpha)), \qquad ({}^*\varphi_0(s, r), {}^*\psi_0(s, r))$$

bezeichnet werden sollen. Sei

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) \frac{1}{n^s}. \tag{104}$$

Einfache Umformungen ergeben dann

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(s,r;\alpha) &= \sum_{n \neq 0} |n|^{\frac{1}{2}} \Bigg[\operatorname{sgn} n \sum_{\substack{ab = 2n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{a}{b}\right|^r + (-1)^{\alpha} \sum_{\substack{ab = 2n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{b}{a}\right|^r\Bigg] |n|^{-s} \\
&= (-1)^{\alpha}\, 2^{r+2}\, \zeta\left(s - r - \tfrac{1}{2}\right) L\left(s + r - \tfrac{1}{2}\right), \\
\psi_1(s,r;\alpha) &= \sum_{n \neq 0} |n|^{\frac{1}{2}} \Bigg[\sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{a}{b}\right|^r + \operatorname{sgn} n\, (-1)^{\alpha} \sum_{\substack{ab = 2n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left(\frac{-1}{a}\right) \left|\frac{b}{a}\right|^r\Bigg] |n|^{-s} \\
&= 2^{-r+2}\, \zeta\left(s + r - \tfrac{1}{2}\right) L\left(s - r - \tfrac{1}{2}\right), \\
\varphi_0(s,r;\alpha) &= \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 0\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}} + (-1)^{\alpha} \sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}}\Bigg] |n|^{-s} \\
&= 4\left[-\left(1 + (-1)^{\alpha}\right) 2^{-s-r+\frac{1}{2}} + \left((-1)^{\alpha} + 2^{1-2s}\right)\right] \times \\
&\qquad\qquad \times \zeta\left(s - r + \tfrac{1}{2}\right) \zeta\left(s + r - \tfrac{1}{2}\right), \\
\psi_0(s,r;\alpha) &= \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 0\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}} + (-1)^{\alpha} \sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 1\,(2)}} \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}}\Bigg] \operatorname{sgn} n\, |n|^{-s} = 0, \\
\varphi_0(s,r) &= \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 1\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}}\Bigg] |n|^{-s} \\
&= -4\left(1 - 2^{-s-r+\frac{1}{2}}\right)\left(1 - 2^{-s+r+\frac{1}{2}}\right) \zeta\left(s - r + \tfrac{1}{2}\right) \zeta\left(s + r - \tfrac{1}{2}\right), \\
\psi_0(s,r) &= \sum_{n \neq 0} \Bigg[\sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv 1\,(2)}} (-1)^b \left|\frac{b}{a}\right|^{r - \frac{1}{2}}\Bigg] \operatorname{sgn} n\, |n|^{-s} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Auf Grund der bisherigen Feststellungen können nunmehr folgende Sätze ausgesprochen werden:

Satz 7. *Es sei r ein reeller, nicht ganz rationaler Parameter ($> \frac{1}{2}$) und $\varphi(s)$, $\psi(s)$ ein Funktionenpaar mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$(s - \frac{3}{2} - r)\,\varphi(s)$, $(s - \frac{3}{2} + r)\,\psi(s)$ sind ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.*

2. *Für*

$$\xi(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s+r+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-r-\frac{1}{2}}{2}\right) \varphi(s),$$

$$\eta(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s-r+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r-\frac{1}{2}}{2}\right) \psi(s)$$

ist

$$\xi(2-s) = (-1)^\alpha \eta(s).$$

3. *Es existieren Entwicklungen in* Dirichlet-*Reihen*

$$\varphi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{|n|^s}, \qquad \psi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n \operatorname{sgn} n}{|n|^s},$$

die irgendwo konvergieren.

Dann ist mit konstantem c

$$\varphi(s) = c\, 2^r \zeta(s-r-\tfrac{1}{2})\, L(s+r-\tfrac{1}{2}),$$
$$\psi(s) = c\,(-1)^\alpha\, 2^{-r} \zeta(s+r-\tfrac{1}{2})\, L(s-r-\tfrac{1}{2}).$$

Satz 8. *Es sei r ein reeller, nicht ganz rationaler Parameter (> 1) und $\varphi(s)$, $\psi(s)$ ein Funktionenpaar mit folgenden Eigenschaften:*

1. $(s-\frac{1}{2}-r)(s-\frac{3}{2}+r)\,\varphi(s)$, $\psi(s)$ *sind ganze Funktionen von s von endlichem Geschlecht.*

2. *Für*

$$\xi(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s-r+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r-\frac{1}{2}}{2}\right) \varphi(s),$$

$$\eta(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s-r+\frac{3}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+r+\frac{1}{2}}{2}\right) \psi(s)$$

ist

$$\xi(1-s) = (-1)^\alpha \xi(s), \qquad \eta(1-s) = (-1)^{\alpha+1} \eta(s).$$

3. *Es existieren Entwicklungen in* Dirichlet-*Reihen*

$$\varphi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{|n|^s}, \qquad \psi(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n \operatorname{sgn} n}{|n|^s},$$

die irgendwo konvergieren.

Dann ist mit konstantem c_1 und c_2

$$\varphi(s) = [c_1(1+(-1)^\alpha)\, 2^{-s} + c_2(1+(-1)^\alpha\, 2^{1-2s})] \times$$
$$\times\, \zeta(s-r+\tfrac{1}{2})\, \zeta(s+r-\tfrac{1}{2}), \qquad \psi(s) = 0.$$

§ 5. Anwendungen auf indefinite quadratische Formen.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine symmetrische m-reihige Matrix mit rationalen Zahlen als Elementen und $\mathfrak{x}$ der Spaltenvektor mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Den Betrag der Determinante von $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit S. Ferner sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine indefinite quadratische Form und $M(\mathfrak{S}, t)$ das von Siegel[1] eingeführte Maß der Darstellungen einer natürlichen Zahl t durch diese Form. Eine reelle Substitution möge die Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ in

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \cdots - y_m^2$$

überführen. Unter der Voraussetzung

$$m \equiv 0\,(2), \quad n \equiv 1\,(2), \quad 1 \leqq n \leqq m-1, \quad m \geqq 4 \tag{106}$$

lassen sich die von Siegel aufgestellten Funktionalgleichungen der Zetafunktionen

$$\zeta(\mathfrak{S}, s) = \sum_{t=1}^{\infty} M(\mathfrak{S}, t)\, t^{-s} \tag{107}$$

durch elementare Umformungen auf die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} R_1(\mathfrak{S}, s) &= (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} R_\varepsilon\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right), \\ R_0(\mathfrak{S}, s) &= (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} R_{1-\varepsilon}\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

bringen, wenn $\varepsilon = \frac{m}{2} - 2\left[\frac{m}{4}\right]$ und

$$\left.\begin{aligned} R_1(\mathfrak{S}, s) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s+1-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \frac{m}{4}\right) [\zeta(\mathfrak{S}, s) + \zeta(-\mathfrak{S}, s)], \\ R_0(\mathfrak{S}, s) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1 - \frac{m}{4}\right) [\zeta(\mathfrak{S}, s) - \zeta(-\mathfrak{S}, s)] \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

gesetzt wird.

Um nun einen Zusammenhang mit den Wellenfunktionen herzustellen, ist eine Disjunktion nach der Restklasse von m mod 4 erforderlich.

1. $m \equiv 0\,(4)$, $\varepsilon = 0$. Wir ersetzen in den allgemeinen Formeln s durch $s + \frac{m}{4} - 1$. An Stelle von Gl. (108) tritt dann die Funktionalgleichung

$$\xi(\mathfrak{S}, 2-s) = (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \eta(\mathfrak{S}^{-1}, s) \tag{110}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\xi(\mathfrak{S},s)&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m}{4}-1}R\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{s+\frac{m}{4}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{m}{4}}{2}\right)\times\\&\qquad\times\left[\zeta\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)+\zeta\left(-\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)\right],\\ \eta(\mathfrak{S},s)&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m}{4}-1}R_0\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{s-\frac{m}{4}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{m}{4}+1}{2}\right)\times\\&\qquad\times\left[\zeta\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)-\zeta\left(-\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-1\right)\right].\end{aligned}\right\}\quad(111)$$

Eine weitere, nicht mehr hingeschriebene Funktionalgleichung entsteht aus Gl. (110), indem man hierin $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{S}^{-1}$ und S durch S^{-1} ersetzt.

Speziell für $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}=x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n+1}^2-\cdots-x_m^2$ ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^{-1}$ und $S=1$, so daß auf diesen Fall Satz 7 mit $r=\frac{m}{4}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ und $\alpha=\frac{n-1}{2}+\frac{m}{4}$ angewendet werden kann, denn die übrigen Voraussetzungen von Satz 7 sind nun erfüllt, wie aus den Untersuchungen von SIEGEL hervorgeht.

2. $m\equiv 2\,(4)$, $\varepsilon=1$. In den Gl. (108) u. (109) ersetzen wir s durch $s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}$. Die Funktionalgleichungen nehmen dann die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\xi(\mathfrak{S},1-s)&=(-1)^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}}S^{-\frac{1}{2}}\xi(\mathfrak{S}^{-1},1-s),\\ \eta(\mathfrak{S},1-s)&=(-1)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{4}}S^{-\frac{1}{2}}\eta(\mathfrak{S}^{-1},s)\end{aligned}\right\}\qquad(112)$$

an mit

$$\left.\begin{aligned}\xi(\mathfrak{S},s)&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m}{4}-\frac{1}{2}}R_1\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{m}{4}+\frac{1}{2}}{2}\right)\times\\&\qquad\times\left[\zeta\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)+\zeta\left(-\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)\right],\\ \eta(\mathfrak{S},s)&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m}{4}-\frac{1}{2}}R_0\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{s+\frac{m}{4}+\frac{1}{2}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{m}{4}+\frac{3}{2}}{2}\right)\times\\&\qquad\times\left[\zeta\left(\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)-\zeta\left(-\mathfrak{S},s+\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\}\quad(113)$$

Wählen wir speziell wieder $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}=x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n+1}^2-\cdots-x_m^2$, so kann jetzt Satz 8 mit $r=\frac{m}{4}>1$, $\alpha=\frac{n}{2}-\frac{m}{4}$ angewendet werden.

Damit ist ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von analytischen Identitäten für die Zetafunktionen $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ beschrieben. Auf Grund der letzten Bemerkungen ergibt sich insbesondere

Satz 9. *Es sei* $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \cdots - x_m^2$, $m \equiv 0\ (2)$, $n \equiv 1\ (2)$, $1 \leq n \leq m-1$. *Mit gewissen Konstanten* c, c_1, c_2 *ist dann*

$$\left.\begin{aligned} \zeta(\mathfrak{S}, s) + \zeta(-\mathfrak{S}, s) &= c\, 2^{\frac{m}{2}-1} \zeta\left(s - \frac{m}{2} + 1\right) L(s), \\ \zeta(\mathfrak{S}, s) - \zeta(-\mathfrak{S}, s) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{m}{4}} c\, \zeta(s)\, L\left(s - \frac{m}{2} + 1\right) \end{aligned}\right\} \text{ für } m \equiv 0\,(4),\ m \geq 8,$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta(\mathfrak{S}, s) + \zeta(-\mathfrak{S}, s) &= \Big[c_1\Big(1 + (-1)^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}}\Big) 2^{-s} + \\ &\quad + c_2\Big(1 + (-1)^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}}\, 2^{1-2s}\Big)\Big] \zeta(s)\, \zeta\left(s - \frac{m}{2} + 1\right), \\ \zeta(\mathfrak{S}, s) - \zeta(-\mathfrak{S}, s) &= 0. \end{aligned}\right\} \text{ für } m \equiv 2\,(4),\ m \geq 6.$$

Mit Hilfe einer Residuenbestimmung lassen sich die Koeffizienten c, c_1, c_2 ermitteln; dabei treten die von SIEGEL eingeführten Gruppenmaße $\mu(\mathfrak{S})$ auf, deren Kenntnis allerdings vorausgesetzt werden muß.