Maass

Sonderabdruck (Nicht im Handel)
aus „Mathematische Zeitschrift", Band 51, Heft 3
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg
1948

Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe.

Von

H. Maaß in Heidelberg.

Unter einer hyperabelschen Transformation S verstehen wir n simultane Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} & \beta^{(\nu)} \\ \gamma^{(\nu)} & \delta^{(\nu)} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

mit reellen $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}, \gamma^{(\nu)}, \delta^{(\nu)}$ und der Determinante $\alpha^{(\nu)}\delta^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}\gamma^{(\nu)} = 1$. Für S wählen wir die abkürzende Bezeichnung

$$(1) \qquad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

und kommen überein, daß eine Relation zwischen Größen, die ihrer Natur nach mit dem Konjugiertenindex ν behaftet sein müssen, in gleicher Weise für alle Konjugierten gilt, wenn der Index ν nicht mit angegeben ist. Unsere Forderungen bezüglich S lauten also:

$$(2) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell und } \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Wir wählen n komplexwertige Veränderliche $\tau^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{T}$ den Bereich

$$(3) \qquad \Im\mathrm{m}\, \tau > 0.$$

Die hyperabelsche Transformation S bildet $\mathfrak{T}$ vermöge

$$(4) \qquad \tau \to \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

auf sich ab. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von hyperabelschen Transformationen ist in $\mathfrak{T}$ dann und nur dann diskontinuierlich, wenn $\mathfrak{G}$ keine infinitesimalen Transformationen enthält, d. h. wenn es in $\mathfrak{G}$ keine gegen die Identität konvergierende Folge von Transformationen gibt [1]). Wenn im folgenden von maximalen diskontinuierlichen Erweiterungsgruppen $\mathfrak{G}$ die Rede sein wird, so ist damit gemeint, daß $\mathfrak{G}$ als Abbildungsgruppe für $\mathfrak{T}$ keiner diskontinuierlichen Erweiterung mehr fähig ist. Somit wird also

[1]) H. Maass, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse 1940. 2. Abhandlung.

die Frage gar nicht berührt, ob **G** die Transformationen E_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), definiert durch

$$(5)\qquad E_k^{(k)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_k^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \nu \neq k,$$

und ihre Potenzprodukte enhält. Wir werden bei unseren Betrachtungen ohne diese Transformationen auskommen, indem wir festsetzen, daß stets $\sqrt{\omega} > 0$ sein soll, wenn $\omega > 0$ ist (für alle Konjugierten von ω).

Die (engere) Hilbertsche Modulgruppe **M** zu einem total reellen Zahlkörper Z vom Grad n besteht aus den Transformationen (1) mit ganzzahligen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subset Z$ und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Die Konjugierten von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind nun im gewöhnlichen Sinne der algebraischen Zahlentheorie zueinander konjugiert. **M** ist in $\mathfrak{T}$ diskontinuierlich. Die Frage nach den diskontinuierlichen Erweiterungsgruppen von **M** wird in dieser Note vollständig beantwortet. Wir bezeichnen mit **H** die schon von Hurwitz angegebene Gruppe der Transformationen

$$(6)\qquad S = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \dfrac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix},$$

wobei die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ in Z derart zu wählen sind, daß die Koeffizienten von S *ganz* algebraisch werden und $\alpha\delta - \beta\gamma = \omega > 0$ gilt. Es ergibt sich dann folgendes Resultat: *Jede diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* **M** *ist in* **H** *enthalten;* **H** *ist demnach die einzige maximale diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* **M**.

Die wesentlichen Begriffsbildungen und Hilfsmittel zum Beweis dieses Satzes sind in [1]) entwickelt worden. Es sei an die Definition einer parabolischen Spitze erinnert. In einer vorgelegten diskontinuierlichen Gruppe **G** bestimme man die Untergruppe der affinen Transformationen

$$(7)\qquad S = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Kommen unter diesen n unabhängige Translationen ($\lambda^2 = 1$) und $n-1$ hyperbolische Transformationen mit unabhängigen Multiplikatoren λ^2 vor, so heißt $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ parabolische Spitze von **G**. Wir setzen fest, daß der Begriff der parabolischen Spitze gegenüber Transformationen von $\mathfrak{T}$ in sich invariant sein soll. Die Bezeichnung Translation ($\lambda^2 = 1$) verwenden wir gleichzeitig für S und α.

Folgende Bemerkung wird uns gelegentlich von Nutzen sein. Die Transformation

$$(8)\qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei in einer vorgelegten Transformationsgruppe **G** enthalten. Das ist

z. B. der Fall, wenn $\mathbf{M} \subset \mathbf{G}$ ist. Gilt dann für einen festen Koeffizienten bzw. für eine feste Zeile oder Spalte einer beliebigen Transformation aus $\mathbf{G}$ eine gewisse Aussage, so ist diese auch für alle Koeffizienten bzw. alle Zeilen und Spalten der Transformationsmatrix richtig. Das folgt im wesentlichen daraus, daß $\mathbf{G}$ mit (1) auch

$$(9)\quad TS = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix},\quad ST^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix},\quad TS^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

enthält.

Wir legen noch folgende Bezeichnungen fest: Es sei
h die Idealklassenzahl von Z,
$\mathfrak{o}$ der Bereich der ganzen Zahlen in Z,
$\mathfrak{a}_i\ (i = 1, 2, \ldots, h)$ ein volles Repräsentantensystem der Idealklassen von Z.
$\mathfrak{a}_i$ werde erzeugt von den Körperzahlen γ_i, δ_i; die Zahlen α_i, β_i seien in Z derart bestimmt, daß $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$ ist. Schließlich sei

$$(10)\qquad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^{h} S_i \mathbf{M}, \quad S_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

Mit $\underline{S}$ bezeichnen wir die zweite Zeile der Transformation S, und $\mathbf{N}$ verwenden wir als Normzeichen in der üblichen Weise.

Der Beweis des oben formulierten Satzes wird nun auf eine Reihe von Hilfssätzen reduziert.

Hilfssatz 1. *Sind $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ und $A^{-1}\infty$ parabolische Spitzen einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe $\mathbf{G}$ und ist*

$$S \subset A\mathbf{G}, \quad \underline{S} = (\gamma, \delta),$$

so ist entweder $\gamma = 0$ oder $|\mathbf{N}\gamma| > \varkappa_1 > 0$ mit einer nur von A und $\mathbf{G}$ abhängigen positiven Konstanten $\varkappa_1$.

Beweis: s. [1]) S. 13.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathbf{G}$ Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe $\mathbf{G}_1$ und ∞ parabolische Spitze von $\mathbf{G}$ (also auch von $\mathbf{G}_1$). Mit $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{A}_1$ bezeichnen wir die affinen Untergruppen von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_1$. Dann läßt sich der Multiplikator λ_1^2 einer Transformation aus $\mathbf{A}_1$ als Quotient zweier Translationen ϱ und σ aus $\mathbf{A}$ darstellen:*

$$(11)\qquad \lambda_1^2 = \frac{\varrho}{\sigma}.$$

Die Konjugierten von λ_1^2 sind algebraische Einheiten.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer nur von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_1$ abhängigen natürlichen Zahl m derart, daß das m-fache $m\varrho_1$ einer Translation ϱ_1 aus $\mathbf{A}_1$ eine Translation ϱ aus $\mathbf{A}$ wird. Dazu wählen wir eine Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ für die Translationen in $\mathbf{A}$ und machen den Ansatz

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i, \quad \varrho_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega_i$$

mit ganzrationalen x_i und reellen ξ_i. Zu vorgegebenem positiven ε lassen sich die ganzrationalen Zahlen $m, x_1, \ldots, x_n$ so bestimmen, daß

$$m > 0, \quad |m\xi_i - x_i| < \varepsilon \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bei kleinem ε ist dann $m\xi_i = x_i$ zu schließen, da $\mathbf{G}_1$ keine infinitesimalen Translationen von der Art $m\varrho_1 - \varrho$ enthält. Da die Translationen in $\mathbf{A}_1$ eine n-gliedrige Basis besitzen, kann die natürliche Zahl m offenbar so gewählt werden, daß generell für alle ϱ_1 die Translation $m\varrho_1 = \varrho$ in $\mathbf{A}$ liegt. Wenn nun

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \sigma_1\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu\lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} \subset \mathbf{A}_1, \quad \lambda^2 = 1,$$

dann liegt auch

$$(13) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu\lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \sigma_1\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & -\mu\lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_1^2\sigma_1\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

in $\mathbf{A}_1$; d. h. mit σ_1 ist auch $\varrho_1 = \lambda_1^2\sigma_1$ eine Translation in $\mathbf{A}_1$. Daraus ergibt sich nun leicht, wie in [1]) näher ausgeführt ist, daß die Konjugierten von λ_1^2 algebraische Einheiten darstellen. $\varrho = m\varrho_1$ und $\sigma = m\sigma_1$ sind Translationen in $\mathbf{A}$, so daß $\lambda_1^2 = \frac{\varrho}{\sigma}$ ist, q. e. d.

Hilfssatz 3. *Sind γ^*, δ^* zwei nicht zugleich verschwindende Zahlen aus $\mathfrak{o}$, dann gibt es eine Transformation $S_0 \subset \mathbf{K}$ derart, daß*

$$(14) \qquad \underline{S_0} = (\gamma_0, \delta_0), \quad \gamma_0 = \varrho\gamma^*, \quad \delta_0 = \varrho\delta^*, \quad |\varrho| < \varkappa_2$$

mit einer nur von Z abhängigen positiven Konstanten $\varkappa_2$.

Beweis: s. [1]) S. 20.

Hilfssatz 4. *Wenn $\mathbf{M}$ Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe $\mathbf{G}$ ist, dann ist jede Transformation S aus $\mathbf{G}$ von der Gestalt*

$$(15) \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega \subset Z, \ \omega > 0.$$

Überdies gibt es eine feste nur von $\mathbf{G}$ abhängige algebraische Zahl μ derart, daß μS ganze algebraische Koeffizienten hat; d. h. die Transformationen von $\mathbf{G}$ haben beschränkte Nenner.

Beweis. Zu einer Transformation

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \mathbf{G}$$

bestimmen wir $\gamma^*, \delta^* \subset \mathfrak{o}$ derart, daß

$$|\gamma^* a + \delta^* c| < \frac{\sqrt[n]{\varkappa_1}}{\varkappa_2}, \quad (\gamma^*, \delta^*) \neq (0, 0).$$

Nach Hilfssatz 3 gibt es dann eine Transformation $S_0 = S_i L \subset \mathbf{K}$ $(L \subset \mathbf{M})$ mit $\underline{S_0} = (\gamma_0, \delta_0)$, so daß $\underline{S_0} S = (\gamma_0 a + \delta_0 c, *)$ ist mit

$$|\mathsf{N}(\gamma_0 a + \delta_0 c)| = |\mathsf{N}\varrho|\,|\mathsf{N}(\gamma^* a + \delta^* c)| < \varkappa_1 .$$

Zufolge Hilfssatz 1 ist dann $\gamma_0 a + \delta_0 c = 0$ oder auch

$$a = \alpha r, \quad c = \gamma r \quad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \subset Z.$$

Auf Grund einer eingangs gemachten Bemerkung können wir nun schließen, daß

$$S = \begin{pmatrix} \alpha r & \beta s \\ \gamma r & \delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} u & \tilde{\beta} u \\ \tilde{\gamma} v & \tilde{\delta} v \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ in Z liegen. Sind die Koeffizienten einer Zeile von S beide von 0 verschieden, so folgt $s = \mu r$, $\mu \subset Z$, so daß wir $r = s$ annehmen können. Die Determinantenrelation $ad - bc = 1$ zieht dann

$$r = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad \text{mit} \quad \omega = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

nach sich. Es bleibt noch $b = c = 0$ und $a = d = 0$ zu diskutieren. Wir dürfen uns offenbar auf den ersten Fall beschränken. a^2 ist dann der Multiplikator einer affinen Transformation und als solcher nach Hilfssatz 2 eine Einheit ω in Z, so daß $a = \frac{\omega}{\sqrt{\omega}}$, $d = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ist. Der erste Teil des Hilfssatzes ist damit bewiesen.

Wir wählen nun eine feste Transformation $Q_i \subset \mathbf{G}$ derart, daß

$$S_i Q_i = \begin{pmatrix} \mu_i & * \\ 0 & \mu_i^{-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

ist. Mit

$$S_0 S = S_i L S = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

wird

$$Q_i^{-1} L S = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\mu_i} & * \\ 0 & \frac{\mu_i}{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

und diese Transformation liegt in $\mathbf{G}$. Hilfssatz 2 besagt dann, daß $\frac{\lambda^2}{\mu_i^2} = \varepsilon$ eine Einheit in Z ist. Aus

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = L^{-1} S_i^{-1} \begin{pmatrix} \mu_i \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

ersehen wir schließlich, daß a, c beschränkte Nenner haben; denn für i kommen höchstens h-Werte in Frage. Da die Beschränktheit der Nenner auch für b, d ausgesprochen werden kann, ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Hilfssatz 5. *Sei* $\mathbf{M}$ *Untergruppe einer Transformationsgruppe* $\mathbf{G}$. *Die Koeffizienten der Transformationen aus* $\mathbf{G}$ *mögen in Z liegen und beschränkte Nenner haben, dann ist* $\mathbf{M} = \mathbf{G}$.

Beweis. Es werde angenommen, daß $\mathbf{G}$ eine Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit gebrochenen Koeffizienten enthält. Daraus ist ein Widerspruch abzuleiten. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß α ein gewisses Primideal $\mathfrak{p}$ in einer negativen Vielfachheit e_α enthält und daß die Vielfachheiten $e_\beta, e_\gamma, e_\delta$, mit denen $\mathfrak{p}$ in β, γ, δ steckt, mindestens so groß sind wie e_α:

$$e_\alpha \leqq e_\beta, e_\gamma, e_\delta.$$

Indem wir S durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varrho & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \alpha\sigma \\ \gamma + \alpha\varrho & \delta + \gamma\sigma + \beta\varrho + \alpha\varrho\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

ersetzen, kann durch geeignete Wahl von $\varrho, \sigma \subset \mathfrak{o}$ in jedem Falle erreicht werden, daß

$$e_\alpha = e_{\alpha^*}, \quad e_\alpha < e_{\beta^*}, \quad e_\alpha < e_{\gamma^*}, \quad e_\alpha \leqq e_{\delta^*}$$

ist. Wir wollen demnach annehmen, daß bereits

$$e_\alpha < e_\beta,\ e_\gamma \quad \text{und} \quad e_\alpha \leqq e_\delta$$

gilt, und erkennen dann, daß die Nenner der Koeffizienten von $S^m (m \to \infty)$ bezüglich $\mathfrak{p}$ nicht beschränkt sind. Das ist mit den Voraussetzungen für $\mathbf{G}$ nicht verträglich, q. e. d.

Hilfssatz 6. *Sei* $\mathbf{M}$ *Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathbf{G}$, *dann ist* $\mathbf{M}$ *Normalteiler von* $\mathbf{G}$.

Beweis. Sei $S \subset \mathbf{G}$, $L \subset \mathbf{M}$. Nach Hilfssatz 4 liegen die Koeffizienten der Transformation SLS^{-1} in Z. Die Transformationen der aus SLS^{-1} und $\mathbf{M}$ erzeugten Gruppe $\mathbf{G}_1$ haben beschränkte Nenner, da $\mathbf{G}_1$ in $\mathbf{G}$ liegt und die Aussage für $\mathbf{G}$ zutrifft. Nach Hilfssatz 5 ist dann $\mathbf{G}_1 = \mathbf{M}$, also $SLS^{-1} \subset \mathbf{M}$, q. e. d.

Hilfssatz 7. *Sei* $\mathbf{M}$ *Normalteiler einer Transformationsgruppe* $\mathbf{G}$, *dann ist* $\mathbf{G}$ *in* $\mathbf{H}$ *enthalten.*

Beweis. Sei

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \mathbf{G},$$

so daß

$$S \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & 1 + ac \end{pmatrix} \subset \mathbf{M}, \tag{20}$$

also $ac, c^2 \subset \mathfrak{o}$ ist. Da c vor den anderen Koeffizienten nicht ausgezeichnet ist, ergibt sich, daß alle Koeffizienten von S ganz algebraisch sind. Überdies ist aus analogen Gründen auch $dc \subset \mathfrak{o}$, und aus $ac \cdot dc - bc \cdot c^2 = c^2$ ersehen wir, daß $bc \subset \mathfrak{o}$ ist. Mithin liegen die Zahlen $\alpha = ac$, $\beta = bc$, $\gamma = c^2$, $\delta = dc$ und $\omega = c^2$ in $\mathfrak{o}$, so daß unter der unwesentlichen Voraussetzung $c \neq 0$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \subset \mathbf{H}$$

zu schließen ist, q. e. d.

Satz. *Sei* $\mathbf{M}$ *Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathbf{G}$. *Dann ist*

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{H}, \tag{21}$$

d. h. $\mathbf{H}$ *ist die maximale diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* $\mathbf{M}$. *Die Faktorgruppe* $\mathbf{H}/\mathbf{M}$ *ist isomorph der Gruppe der singulären total positiven Zahlverbände in Z. Die Ordnung der Faktorgruppe ist*

$$(\mathbf{H} : \mathbf{M}) = 2^{e_0}, \tag{22}$$

wobei e_0 *die zu 2 gehörige Basiszahl der engeren Idealklassengruppe von Z ist.*

Beweis. $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ ergibt sich sofort aus den Hilfssätzen 6 und 7. Zwischen den Restklassen S mod $\mathbf{M}$ der Faktorgruppe $\mathbf{H}/\mathbf{M}$ und den zu ω gehörigen Zahlverbänden besteht zufolge (6) offenbar eine eineindeutige isomorphe Beziehung. Aus (6) ergibt sich auch die Idealgleichung $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta) = (\sqrt{\omega})$; also ist $\omega = \mathfrak{a}^2$ eine singuläre total positive Zahl. Die oben angegebene Ordnung der Faktorgruppe $\mathbf{H}/\mathbf{M}$ wird aus bekannten Relationen der algebraischen Zahlentheorie ermittelt.

Nach einer Bemerkung von Herrn PETERSSON hat Herr HECKE einen (unveröffentlichten) Beweis dafür erbracht, daß die rationale Modulgruppe nicht erweiterungsfähig ist. Herr PETERSSON hat als erster die Frage nach der Erweiterungsfähigkeit von Grenzkreisgruppen in voller Allgemeinheit aufgeworfen und sie für eine umfangreiche Klasse von derartigen Gruppen mit elementar-arithmetischen Methoden beantwortet[2]).

[2]) H. PETERSSON, Über die eindeutige Bestimmung und die Erweiterungsfähigkeit von gewissen Grenzkreisgruppen, Hamburger Abhandlungen **12** (1938), S. 180—199.

(Eingegangen am 4. Oktober 1944.)