Über automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen

Von Hans *Maaß* in Heidelberg

Zwischen den automorphen Funktionen einer Variablen zu gewissen Grenzkreisgruppen und den Dirichletschen Reihen besteht, wie Herr *Hecke* gezeigt hat, ein wichtiger Zusammenhang, der durch die *Mellin*transformation vermittelt wird und der sich für das Studium der analytischen Funktionen, die eine Dirichletreihenentwicklung gestatten und gewissen Funktionalgleichungen genügen, als ungemein fruchtbar erwies. Die in Frage kommenden Funktionalgleichungen sind von dem Typus, wie er bei den Zetafunktionen der algebraischen Zahlkörper auftritt. Jedoch wird verlangt, daß der in der Funktionalgleichung auftretende Gammafaktor im wesentlichen mit $\Gamma(s)$ übereinstimmt. Um in dieser Hinsicht eine größere Allgemeinheit zu erzielen, scheint der Übergang zu automorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen notwendig zu sein. Ein möglicher Ansatz bietet sich in folgender Gestalt dar:

Es seien $x_0, x_1, \ldots, x_k$ reelle Variable. Im Bereich $x_k > 0$ mit der Metrik

$$ds^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_k^2}{x_k^2}$$

betrachten wir automorphe Lösungen der Differentialgleichung

(1) $\Delta g + \dfrac{r^2 + \frac{k^2}{4}}{x_k^{k+1}}\, g = 0$ (Δ = Beltramischer Operator, r = Parameter).

Wir nehmen an, daß sich $g = g(x)$ ($x = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ als Vektor aufgefaßt) bezüglich gegebener Translationen

$$x \to x + a \qquad (a = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, 0\}),$$

die ein k-dimensionales Gitter $\mathfrak{t}$ bilden mögen, invariant verhält:

(2) $$g(x + a) = g(x) \quad \text{für } a \in \mathfrak{t}.$$

Bei geeigneter Voraussetzung über das Verhalten von $g(x)$ für $x_k \to \infty$ besitzt $g(x)$ als Lösung von (1) eine Entwicklung der Art

(3) $$g(x) = u(x_k) + \sum_{b \neq 0} a(b)\, x_k^{\frac{k}{2}} K_{ir}(2\pi\,|b|\,x_k)\, e^{2\pi i b x},$$

wobei $u(x_k)$ eine elementare Funktion von x_k bedeutet, $b = \{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$ alle von 0 verschiedenen Vektoren eines durch $\mathfrak{t}$ eindeutig bestimmten k-dimensionalen Gitters durchläuft und $|b| = \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_{k-1}^2}$, $bx = b_0 x_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{k-1} x_{k-1}$

gesetzt ist. Verlangen wir noch die Invarianz von $g(x)$ bezüglich der Spiegelung am Einheitskreis:

$$g\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = g(x), \tag{4}$$

so ergeben sich im Falle $k > 1$ auf Grund eines wichtigen Identitätssatzes für Lösungen von (1) die mit (4) gleichwertigen Funktionalgleichungen

$$F\left(\frac{1}{x_k}, P_n\right) = F(x_k, P_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

wobei

$$F(x_k, P_n) = u_n(x_k) + \sum_{b \neq 0} P_n(b)\, a(b)\, x_k^{\frac{k}{2}+n}\, K_{ir}(2\pi |b| x_k),$$

$$u_n(x_k) = \begin{cases} u(x_k) & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

und $P_n(b) = P_n(b_0, b_1, \ldots, b_{k-1})$ eine beliebige Kugelfunktion n-ten Grades bedeutet. Der Übergang zu den Dirichletschen Reihen wird durch die Mellintransformation geleistet:

$$\xi(s, P_n) = 4 \int_0^\infty (F(t, P_n) - u_n(t))\, t^{2s - \frac{k}{2} - 1}\, dt \tag{6}$$

$$= \frac{\Gamma\left(s + \frac{n+ir}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{n-ir}{2}\right)}{\pi^{2s+n}} \sum_{b \neq 0} \frac{P_n(b)\, a(b)}{|b|^{2s+n}}.$$

Für diese Funktionen bestehen gemäß (5) die Funktionalgleichungen

$$\xi(s, P_n) = \xi\left(\frac{k}{2} - s, P_n\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Durch den bekannten Mechanismus der Integralumkehrung:

$$F(t, P_n) - u_n(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{\xi(s, P_n)}{t^{2s - \frac{k}{2}}}\, ds$$

gelangen wir schließlich von den Dirichletschen Reihen

$$\sum_{b \neq 0} \frac{P_n(b)\, a(b)}{|b|^{2s+n}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

über die Funktionalgleichungen (7) und (5) zu der automorphen Funktion $g(x)$ mit der Invarianz (2) und (4) zurück.