Maaß

[1]

ÜBERREICHT VOM VERFASSER

ABHANDLUNGEN

AUS DEM

MATHEMATISCHEN SEMINAR

DER

HANSISCHEN UNIVERSITÄT

HERAUSGEGEBEN VON

E. ARTIN — W. BLASCHKE — E. HECKE

SONDERABDRUCK AUS BAND 12, HEFT 1

HANS MAASS:

BEWEIS DES NORMENSATZES
IN EINFACHEN HYPERKOMPLEXEN SYSTEMEN

VERLAG B. G. TEUBNER
LEIPZIG
1937

Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen.

Von HANS MAASS in Hamburg.

Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen.

Von HANS MAASS in Hamburg.

Es sei $\mathfrak{S}_k$ ein einfaches hyperkomplexes System $n$ten Grades über einem algebraischen oder $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper k als Grundbereich. Dabei ist

$$n = s \cdot t,$$

wenn s den Grad des Zentrums Z von $\mathfrak{S}$ über k und t^2 die Ordnung von $\mathfrak{S}$ über Z bedeutet. Das „allgemeine Element" Ξ von $\mathfrak{S}$ ist Nullstelle eines eindeutig bestimmten Polynoms $F(t)$ $n$ten Grades mit Koeffizienten aus k und höchstem Koeffizienten 1; den letzten Koeffizienten von $F(t)$ bezeichnet man bis auf das Vorzeichen als die Norm von Ξ:

$$N_{\mathfrak{S}/k}\Xi = (-1)^n F(0).$$

Ist K der Schiefkörper, der in $\mathfrak{S}$ enthalten ist, so gilt

Satz 1: *Wenn $\alpha\ (\subset k)$ Norm in K_k ist, dann auch in $\mathfrak{S}_k$ und umgekehrt.*

Beweis: Wegen

$$N_{\mathfrak{S}/k}\Xi = N_{Z/k}\, N_{\mathfrak{S}/Z}\Xi$$

kann man sich offenbar auf den Fall $Z = k$ beschränken. Wir bedienen uns der Darstellung von $\mathfrak{S}$ als Matrizenring über K:

$$\mathfrak{S} = K \times M_r, \qquad n = m \cdot r.$$

Aus

$$a \subset K, \qquad N_{K/k}\, a = N_{\mathfrak{S}/k} \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

folgt der eine Teil der Behauptung. Sei umgekehrt $N_{\mathfrak{S}/k}(a_{ik})$ vorgegeben. Dann bringt man die Matrix (a_{ik}) durch „elementare Umformungen" in geläufiger Weise auf Diagonalgestalt; das kann bewerkstelligt werden durch Links- und Rechtsmultiplikation mit Matrizen über K mit der Norm $(\pm 1)^m$. Es gilt dann also, wenn ω gleich der Anzahl der verwendeten Matrizen mit der Norm $(-1)^m$ ist,

$$N_{\mathfrak{S}/k}(a_{ik}) = (-1)^{m\omega} N_{\mathfrak{S}/k}\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{m\omega} \prod_{i=1}^{r} N_{\mathfrak{S}/k}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a_i & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{m\omega} \prod_{i=1}^{r} N_{K/k}\, a_i = N_{K/k}(-1)^{\omega}\, a_1\, a_2 \cdots a_r, \quad \text{q. e. d.}$$

Die Frage, wann eine Zahl $\alpha \subset k$ Norm in $\mathfrak{S}_k$ ist, läßt sich also schon in dem Schiefkörper, der im System $\mathfrak{S}$ enthalten ist, entscheiden.

Sei von jetzt k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Absolutgrades, $k_\mathfrak{p}$ die perfekte Erweiterung von k für eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k und bis auf weiteres $Z = k$. Wenn $\mathfrak{p}$ eine endliche Primstelle, so ist bekanntlich bei Beachtung von Satz 1 jede Zahl aus $k_\mathfrak{p}$ Norm in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$; das trifft auch zu für alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$, für welche $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$ voller Matrizenring über $k_\mathfrak{p}$ ist. Wenn dagegen für ein unendliches $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$ ein Schiefkörper vom Grad $m_\mathfrak{p} > 1$ (also $= 2$) steckt, so ist eine Zahl $\alpha \subset k_\mathfrak{p}$ genau dann Norm in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$, wenn

(1) $$\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{p}_\infty) \qquad (m_{\mathfrak{p}_\infty} = 2),$$

d. h. wenn α an der Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ positiv ist. Ist nun $\alpha \subset k$ Norm in $\mathfrak{S}_k$, so ist α natürlich an jeder Stelle Norm, d. h. α erfüllt die Vorzeichenbedingungen (1). Davon gilt die Umkehrung. Das ist die Aussage des Normensatzes, der nun zu beweisen ist. Herrn Artin verdanke ich die Weisung, dabei den folgenden Weg einzuschlagen: Wenn $\alpha \subset k$ Norm an jeder Stelle, so suche man einen zyklischen Körper Ω über k vom Grad n derart, daß

1. α Norm in $k_\mathfrak{p} \cdot \Omega / k_\mathfrak{p}$ für jede Stelle $\mathfrak{p}$,
2. Ω Zerfällungskörper von $\mathfrak{S}$

ist. Da der Normensatz für zyklische Körper gilt, hat das zur Folge:

$$\alpha = N_{\Omega/k}\, a \text{ und } \Omega \subset \mathfrak{S},$$

also

$$\alpha = N_{\mathfrak{S}/k}\, a.$$

Zerfällt eine Primstelle $\mathfrak{p}$ in Ω in Primstellen $f_\mathfrak{p}$ ten Grades, ist $e_\mathfrak{p}$ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ und $m_\mathfrak{p}$ der Grad des $\mathfrak{p}$-adischen Schiefkörpers in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$, so ist die 2. Bedingung gleichwertig mit der Forderung

$$m_\mathfrak{p} / e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \text{ mit } m_\mathfrak{p} > 1.$$

Die Existenz von Ω folgt nun direkt aus dem von Herrn GRUNWALD[1]) bewiesenen Existenztheorem: Es sei gegeben

1. ein algebraischer Zahlkörper k endlichen Grades,
2. eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_r \text{ (direktes Produkt)},$$

$\mathfrak{G}_i$ zyklisch von der Ordnung $l_i^{\nu_i}$, l_i Primzahl,

3. ein System $\mathfrak{M}$ von endlich vielen Primstellen $\mathfrak{p}_i$ aus k, $i = 1, \cdots, n$,
4. den $\mathfrak{p}_i$ zugeordnet $\chi_i(\alpha) \subset \mathfrak{G}$, für $\alpha \neq 0$ aus k, mit den Eigenschaften
   a) $\chi_i(\alpha_1 \alpha_2) = \chi_i(\alpha_1)\, \chi_i(\alpha_2)$,
   b) es existiert eine (früheste) Potenz $\mathfrak{f}_i$ von $\mathfrak{p}_i$, der Führer von χ_i, so daß $\chi_i(\alpha_0) = 1$, sobald $\alpha_0 \equiv 1\ (\mathfrak{f}_i)$ ist.

Dann gibt es unendlich viele abelsche Körper Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ über k derart, daß

$$\left(\frac{\alpha,\, \Omega}{\mathfrak{p}_i}\right) = \chi_i(\alpha) \quad \text{für } i = 1, \cdots, n.$$

Ω ist Klassenkörper über k nach einer Idealgruppe aus k mit dem Führer $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i$. Bei der Wahl der endlichen Primstellen $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_r$ kann man erreichen, daß der Trägheitskörper von $\mathfrak{q}_i$, $i = 1, \cdots, r$, zur Gruppe $\mathfrak{G}_i\ (\subset \mathfrak{G})$ im Sinne der Galoisschen Theorie gehört.

$\alpha_0 \subset k$ sei Norm in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$ für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von k und sei außerdem prim zu allen $\mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{p} > 1$. Zu α_0 konstruieren wir nun auf Grund des soeben genannten Theorems einen geeigneten zyklischen Körper Ω. In $\mathfrak{M}$ nehmen wir alle endlichen $\mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{p} > 1$, alle Primteiler von α_0 und alle reellen unendlichen $\mathfrak{p}$ auf und erklären für alle $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}$ die Funktion $\chi_\mathfrak{p}(\alpha)$ wie folgt. Es sei

1. $\mathfrak{G} = \{\sigma\}$ zyklisch von der Ordnung n,
2. $\alpha \subset k$, $\alpha \neq 0$, $\sigma_\mathfrak{p} = \sigma^{\frac{n}{m_\mathfrak{p}}}$,
   a) $\mathfrak{p}$ endlich,
   $$\alpha = \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\alpha)} \cdot \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \text{ prim zu } \mathfrak{p},$$
   b) $\mathfrak{p}$ unendlich,
   $$\nu_\mathfrak{p}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } \quad \alpha \equiv 1\ (\mathfrak{p}), \\ 1 & \phantom{\text{für}}\text{„} \quad -\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{p}), \end{cases}$$
3. für $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}$
   $$\chi_\mathfrak{p}(\alpha) = \sigma_\mathfrak{p}^{-\nu_\mathfrak{p}(\alpha)},$$

---

[1]) „Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper", Crelle Journal, **169**, 1932.

d. h. also

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathfrak{p} & \text{für unendliches } \mathfrak{p} \text{ mit } m_\mathfrak{p} = 2, \\ \mathfrak{p}^0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu gibt es also einen zyklischen Körper Ω mit den oben genannten Eigenschaften. α_0 ist Norm in $k_\mathfrak{p} \cdot \Omega / k_\mathfrak{p}$ für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von k. Nach Konstruktion ist dies nämlich richtig für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i$, $i = 1, \cdots, r$, d. h. es ist

$$\left(\frac{\alpha_0,\, \Omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i, \qquad i = 1, \cdots, r.$$

Da das Produkt über alle Normenrestsymbole gleich 1 ist, so folgt also

$$\prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_0,\, \Omega}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1.$$

Nun ist α_0 prim zu den $\mathfrak{q}_i$, also ist $\left(\frac{\alpha_0,\, \Omega}{\mathfrak{q}_i}\right)$ aus der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{q}_i$; es gilt daher auch

$$\left(\frac{\alpha_0,\, \Omega}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad \text{für } i = 1, \cdots, r,$$

d. h. die erste Forderung wird von Ω erfüllt. Ω ist auch Zerfällungskörper, da für $m_\mathfrak{p} > 1$

$$m_\mathfrak{p} = e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}$$

gilt. Sei nun α eine beliebige Zahl aus k, die die Vorzeichenbedingungen (1) erfüllt. Wir bestimmen ein total negatives $\beta \subset k$, welches genau durch die erste Potenz aller endlichen $\mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{p} > 1$ teilbar ist. Dann ist $\Omega = k(\sqrt[n]{\beta})$ Zerfällungskörper von $\mathfrak{S}$, also maximalkommutativer Körper aus $\mathfrak{S}$. Alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{p} > 1$ sind in Ω vollverzweigt; es gilt daher, wenn $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Ω ist,

$$N_{\Omega/k}\, \mathfrak{P} = \mathfrak{p}.$$

Man findet nun ohne Mühe ein total positives $\alpha_\mathfrak{p} \subset k$, welches in Ω/k Norm ist, genau einmal durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist und zu den $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{q} > 1$ prim ist:

$$\alpha_\mathfrak{p} = N_{\Omega/k}\, A_\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{S}/k}\, A_\mathfrak{p}.$$

Wenn also

$$\alpha = \prod_{m_\mathfrak{p} > 1} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{a},$$

so ist

$$\alpha' = \alpha \prod_{m_\mathfrak{p} > 1} \alpha_\mathfrak{p}^{-\nu_\mathfrak{p}}$$

prim zu den $\mathfrak{p}$ mit $m_\mathfrak{p} > 1$ und erfüllt ebenfalls die Vorzeichenbedingungen (1). Es ist daher α' und mithin α Norm in $\mathfrak{S}_k$. Damit ist der

Normensatz bewiesen. Er ist auch noch dann richtig, wenn Z eine zyklische Erweiterung von k ist. Wir führen diesen Fall in folgender Weise auf den Fall $Z = k$ zurück.

Sei $\alpha \subset k$ Norm in $\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}}$ für jede Stelle $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{S}_{k_\mathfrak{p}} = \mathfrak{S}_\mathfrak{p}, \qquad Z_{k_\mathfrak{p}} = Z_\mathfrak{p},$$

$$\alpha = N_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} = N_{Z_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}/Z_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}.$$

ε_i, $i = 1, \cdots, s t^2$, mögen eine k-Basis von $\mathfrak{S}_k$ bilden. Man hat dann eine Darstellung

$$A_\mathfrak{p} = \sum_i \bar{\alpha}_i \varepsilon_i \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}_i \subset k_\mathfrak{p}.$$

$\bar{\alpha}_i$ werde durch $\alpha_i \subset k$ $\mathfrak{p}$-adisch gut approximiert. Wenn

$$B_\mathfrak{p} = \sum_i \alpha_i \varepsilon_i,$$

dann liegt

$$b_\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{S}/Z} B_\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}/Z_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{p}$$

$\mathfrak{p}$-adisch in der Nähe von $N_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}/Z_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}$. Gemeint ist dabei: Stellt man beide Ausdrücke durch eine k-Basis von Z dar, so stimmen die Koeffizienten beider Formen $\mathfrak{p}$-adisch gut überein. Dann folgt aber, daß $N_{\mathfrak{S}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}$ durch $N_{\mathfrak{S}/k} B_\mathfrak{p}$ gut approximiert wird. Es ist also gezeigt:

$$\alpha \equiv N_{Z/k} b_\mathfrak{p} \, (\mathfrak{p}^\nu) \tag{2}$$

ist für alle $\mathfrak{p}$ und vorgegebenes ν lösbar. Daraus folgt:

$$\alpha = N_{Z/k} b. \tag{3}$$

Ist σ ein erzeugender Automorphismus von Z/k, so ist b durch Gleichung (3) bis auf eine $(1-\sigma)$te Potenz einer Zahl $a \subset Z$ eindeutig bestimmt. Wir werden a so bestimmen, daß für alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{P}_\infty$ von Z, für die der Grad $m_{\mathfrak{P}_\infty}$ des $\mathfrak{P}_\infty$-adischen Schiefkörpers in $\mathfrak{S}_{Z_{\mathfrak{P}_\infty}}$ gleich 2 ist,

$$b\, a^{1-\sigma} \equiv 1 \, (\mathfrak{P}_\infty) \qquad (m_{\mathfrak{P}_\infty} = 2) \tag{4}$$

gilt. Da $b_\mathfrak{p}$ Norm in $\mathfrak{S}_Z$ ist, so folgt

$$b_\mathfrak{p} \equiv 1 \, (\mathfrak{P}_\infty), \quad \text{falls } m_{\mathfrak{P}_\infty} = 2. \tag{5}$$

Die reelle Primstelle $\mathfrak{P}_\infty$ sei ein Teiler der Primstelle $\mathfrak{p}_\infty$ von k:

$$\mathfrak{p}_\infty = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_s \qquad (\mathfrak{P}_\infty = \mathfrak{P}_1).$$

Wenn dann

$$m_{\mathfrak{P}_k} = 2 \quad \text{für } k = 1, \cdots, s$$

ist, so folgt aus (2), (3) und (5)

$$N_{Z/k} b \equiv 1 \, (\mathfrak{p}_\infty). \tag{6}$$

Es seien nun

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_{i1}\,\mathfrak{P}_{i2}\cdots\,\mathfrak{P}_{is} \qquad (i = 1, \cdots, v)$$

alle reellen unendlichen Primstellen aus k, die in Z einen Teiler $\mathfrak{P}$ mit $m_{\mathfrak{P}} = 2$ haben. Der Bewertung $\mathfrak{P}_{ik}$ entspreche der Isomorphismus $\sigma^{k-1}\tau_i$ von Z. Wir bestimmen a zunächst so, daß

$$(7) \qquad b\,a^{1-\sigma} \equiv 1\ (\mathfrak{P}_{ik}) \quad \text{für } i = 1, \cdots, v,\ k = 1, \cdots, s,\ k \neq k_i,$$

wobei k_i gleich s ist, wenn $m_{\mathfrak{P}_{ik}} = 2$ für $k = 1, \cdots, s$, und sonst so ausgewählt wird, daß $m_{\mathfrak{P}_{ik_i}} = 1$. Die Kongruenzen (7) bedeuten, daß

$$a^{(1-\sigma)\sigma^{k-1}\tau_i} = a^{\sigma^{k-1}\tau_i - \sigma^k\tau_i} \text{ für } i = 1, \cdots, v,\ k = 1, \cdots, s,\ k \neq k_i$$

bei gewöhnlicher Bewertung ein bestimmtes Vorzeichen erhält. Ein a mit diesen Eigenschaften ist leicht zu finden. Man braucht ja in der Reihe der Absolutkonjugierten von a nur den Zeichenwechsel geeignet vorzuschreiben. Die noch fehlenden Kongruenzen

$$b\,a^{1-\sigma} \equiv 1\ (\mathfrak{P}_{is}) \qquad (m_{\mathfrak{P}_{ik}} = 2,\ k = 1, \cdots, s)$$

sind dann eine Folge von (6) und (7). $b\,a^{1-\sigma}$ ist nun Norm in $\mathfrak{S}_{Z_{\mathfrak{P}}}$ für alle Stellen $\mathfrak{P}$ von Z, so daß also

$$b\,a^{1-\sigma} = N_{\mathfrak{S}/Z}\,A$$

und

$$\alpha = N_{Z/k}\,b = N_{Z/k}\,b\,a^{1-\sigma} = N_{\mathfrak{S}/k}\,A.$$

Wir fassen zusammen.

Satz 2: *Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches hyperkomplexes System über einem algebraischen Zahlkörper k als Grundbereich und ist das Zentrum Z von $\mathfrak{S}$ eine zyklische Erweiterung von k, so ist $\alpha \subset k$ genau dann Norm eines Elements aus $\mathfrak{S}$, wenn α an jeder Stelle von k Norm ist.*

Hamburg, Juni 1936.

Zusatz bei der Korrektur: Die Frage nach den Normen aus einem Schiefkörper wurde erstmalig erörtert von den Herren H. Hasse und O. Schilling: „Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper" (Crelle Journal, **174**, 1936). Bei Benutzung der gleichen Hilfsmittel wird in dieser Arbeit, auf die mich Herr Artin aufmerksam machte, der Normensatz nur unter einschränkenden Bedingungen für den Grundkörper bewiesen.