Franz Lemmermeyer

Polynome

Thomas Sonar hat in der MI 57 [11] eine Begräbnisrede auf die Schulanalysis gehalten. Dass das, was heute auf der Schule unter diesem Namen firmiert, eine sinnlose Übung in realitätsfremder Pseudomathematik ist, ist unbestritten. Dennoch bin ich über seine Forderung, die Reste der Analysis aus dem Unterricht zu verbannen, etwas erschrocken, denn wenn man nach der Abschaffung der Algebra und der Geometrie auch noch die Differentialrechnung entsorgt, ist man inhaltlich irgendwo auf dem Stand, den die alten Babylonier vor mehr als 4000 Jahren erreicht hatten.

Zugegeben: Die Pläne Werner Heymanns[1] zur Abschaffung des Mathematikunterrichts haben sich durchgesetzt; bundesweit haben Leitideen, Kompetenzen und Pseudoanwendungen fast alle mathematischen Inhalte aus der Schule verdrängt. Im Abitur 2019 in Baden-Württemberg bestand der erste Teil der Analysis-Aufgabe im wesentlichen aus dem Ablesen von Punkten und Steigungen aus einem mitgelieferten Schaubild. Wer glaubt, dass noch weniger Mathematik kaum möglich ist, wird durch den „qualitativen Einstieg“ in die Analysis[2] eines Besseren belehrt.

Angesichts dieser Aussichten kommt die Forderung nach Abschaffung der Analysis wohl zu spät. Wer seinen Schülern hin und wieder zeigen möchte, was ein Beweis ist, steht vor dem Problem, dass es an allen Ecken und Enden an präziser Sprache und den notwendigen Begriffen fehlt: Folgen, Reihen und Grenzwerte sind in Baden-Württemberg unbekannte Wesen, und Monotonie, Extrem- und Wendepunkte werden nicht definiert. Vielleicht ist es daher an der Zeit, an ein algebraisches Surrogat der Analysis zu erinnern, nämlich die Behandlung von Polynomfunktionen mit algebraischen Mitteln. Hier lässt sich tatsächlich der ein oder andere Beweis mit den heute noch zur Verfügung stehenden spärlichen Mitteln der Schulmathematik führen (also ohne Grenzwerte und mit ganz wenig Ungleichungen), jedenfalls wenn man es einrichten kann, binomische Formeln und Polynomdivision bereitzustellen.

Als kleines Sahnehäubchen beweisen wir zum Schluss den Satz, dass es kein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, das nur Primzahlwerte annimmt.

[1] W. Heymann, *Allgemeinbildung und Mathematik*, Habilitation Univ. Bielefeld, 1995. Sein Vorschlag von „Sieben Jahre sind genug“ wurde schnell von anderen Didaktikern aufgegriffen; Fritz Nestle von der PH Ludwigsburg, der später den Mathematikunterricht mit Hilfe des Computerspiels World of Warcraft attraktiv machen wollte, plädierte in *Mathematik in der Schule* **33** (1995), Heft 12, für die Abschaffung des Mathematikunterrichts nach 7 Jahren, etwa deswegen, weil es zu wenig Lehrer für einen guten Mathematikunterricht gebe.

[2] Susanne Prediger erhielt 2019 den mit 50.000 Euro dotierten Preis der Stiftung Polytechnische Gesellschaft für ihr Konzept zum sprachbildenden Mathematikunterricht. Wie der aussieht, kann man ihrer Webseite `https://sima.dzlm.de/unterricht/unterrichtsmaterialien` entnehmen.

1. Rechnen mit Polynomen

Die Grundtechniken für das Rechnen mit Polynomen sind der Satz von Vieta und die Polynomdivision, und damit zusammenhängend das Horner-Schema. Zusammen mit einer Vertrautheit mit Ungleichungen reicht dies aus, um die Analysis für Polynomfunktionen auf eine solide Grundlage zu stellen.

Satz von Vieta

Im einfachsten Fall einer quadratischer Gleichung $x^2+px+q=0$ besagt der Satz von Vieta, dass deren Lösungen x_1 und x_2 den Gleichungen

$$x_1+x_2=-p \quad \text{und} \quad x_1x_2=q$$

genügen. Sind die Lösungen ganzzahlig und hat q nicht zu viele Teiler, dann kann man die Lösungen damit oft sehr schnell bestimmen.

Wenn man den Satz von Vieta als Mittel zur Zeitersparnis einführt, kommt von Schülerseite eher früher als später die Frage, ob diese Technik auch für die Berechnung von Nullstellen von Gleichungen $2x^2+5x-7=0$ funktioniert, bei denen der Koeffizient von x^2 nicht 1 ist. Der Ansatz $2x^2+5x-7=(2x-a)(x-b)$ liefert sofort $a \in \{\pm 1, \mp 7\}$, und weil $x=1$ Lösung ist, muss $b=-7$ und $a=1$ sein. Mit quadratischer Ergänzung kommt man ohne Probieren ans Ziel. Wir machen dies erst am Beispiel $x^2-8x+15=0$ vor:

$$x^2-8x+15=(x-4)^2-16+15=(x-4)^2-1^2=(x-4-1)(x-4+1)=(x-5)(x-3).$$

Die quadratische Ergänzung nebst Anwendung der dritten binomischen Formel funktioniert natürlich allgemein:

$$\begin{aligned}
2x^2+5x-7 &= 2(x^2+\tfrac{5}{2}-\tfrac{7}{2}) = 2([x+\tfrac{5}{4}]^2-\tfrac{25}{16}-\tfrac{7}{2}) \\
&= 2([x+\tfrac{5}{4}]^2-\tfrac{81}{16}) = 2([x+\tfrac{5}{4}]^2-(\tfrac{9}{4})^2) \\
&= 2(x+\tfrac{5}{4}+\tfrac{9}{4})(x+\tfrac{5}{4}-\tfrac{9}{4}) = 2(x+\tfrac{7}{2})(x-1) = (2x+7)(x-1).
\end{aligned}$$

Wer mehr Angst vor Brüchen als vor zweistelligen Zahlen hat kann das Polynom erst mit 8 multiplizieren:

$$16x^2+40x-56=(4x+5)^2-25-56=(4x+5)^2-9^2=(4x+14)(4x-4)=8(2x+7)(x-1).$$

Polynomdivision

Polynomdivision ist das wohl wichtigste Hilfsmittel beim Rechnen mit Polynomen. Division eines Polynoms durch einen linearen Term $x-a$ liefert $f(x)=g(x)(x-a)+b$ mit einem Quotienten g und einem Rest b; durch Einsetzen von $x=a$ folgt dann $b=f(a)$, also $f(x)=g(x)(x-a)+f(a)$.

Insbesondere kann man f genau dann durch $x-a$ teilen, wenn $f(a)=0$ ist. Weil der Grad von g um 1 kleiner ist als der von f, folgt daraus, dass ein Polynom f vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt.

Satz 1. *Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen. Insbesondere ist das einzige Polynom, das an unendlich vielen Stellen den Wert* 0 *annimmt, das Nullpolynom.*

Die Polynomdivision funktioniert im Wesentlichen wie die schriftliche Division, die inzwischen aber nicht mehr als bekannt vorausgesetzt werden kann und daher zuvor erklärt werden muss. Die Division $(3x^3 - 4x^2 - 8) : (x-2)$ führt man dann wie folgt durch:

Wir rechnen:

$$\begin{array}{rrrrl}
3x^3 & -\,4x^2 & & -\,8 & = (x-2)(3x^2+2x+4) \\
3x^3 & -\,6x^2 & & & \\
\hline
& 2x^2 & & & \\
& 2x^2 & -\,4x & & \\
\cline{2-3}
& & 4x & -\,8 & \\
& & 4x & -\,8 & \\
\cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

(wegen $f(0) = 0$ geht die Division auf).

Horner-Schema

Polynomdivisionen lassen sich mit dem Horner-Schema durchführen. Das Horner-Schema ist auch zur sparsamen Berechnung von Funktionswerten nützlich. Um etwa den Funktionswert $f(2)$ für die Funktion $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 8$ zu bestimmen, braucht man $3+2 = 5$ Multiplikationen (3 für $3 \cdot x \cdot x \cdot x$ und 2 für $4 \cdot x \cdot x$) und 2 Additionen. Schreibt man das Polynom aber in der Form $f(x) = (3 \cdot x - 4) \cdot x \cdot x - 8$, so braucht man nur 3 Multiplikationen und 3 Additionen, hat also 2 Multiplikationen eingespart.

Die schematische Rechnung wird so durchgeführt: Man beginnt damit, in der oberen Zeile die Koeffizienten des Polynoms aufzuschreiben; in die linken Spalte der zweiten Zeile schreibt man eine 0, links davon in der dritten Zeile den Wert $x = 2$:

$$\begin{array}{crrrr}
& 3 & -4 & 0 & -8 \\
& 0 & & & \\
\hline
2 & & & &
\end{array}$$

Jetzt addiert man die Zahlen in der ersten Spalte und erhält $3 + 0 = 3$; diese 2 wird mit $x_0 = 2$ multipliziert und in die zweite Spalte der zweiten Zeile geschrieben; dieses Verfahren wird dann wiederholt, bis die Tabelle vollständig ausgefüllt ist.

$$\begin{array}{crrrr}
& 3 & -4 & 0 & -8 \\
& 0 & 6 & 4 & 8 \\
\hline
2 & 3 & 2 & 4 & 0
\end{array}$$

Die Zahl rechts unten ist der Funktionswert $f(2) = 0$.

Man überzeugt sich leicht davon, dass dieses Schema genau der Rechnung

$$f(2) = (3 \cdot 2 - 4) \cdot 2 \cdot 2 - 8$$

entspricht: zuerst wird $3 \cdot 2 = 6$ zur -4 addiert, das Ergebnis 2 zweimal mit 2 multipliziert und dann zur -8 addiert (solche Beweise durch Beispiel kommen in der Schulmathematik zu kurz).

Das Überraschende am Horner-Schema ist, dass die andern Zahlen in der unteren Zeile die Koeffizienten des Quotienten $f(x):(x-2)$ sind. Auch dies lässt sich bestätigen, wenn wir die Rechnungen im Horner-Schema mit der oben durchgeführten Polynomdivision vergleichen!

2. Was ist eine Tangente?

Unter den traurigen Resten der mathematischen Inhalte, welche die Schavanschen Reformen zu Beginn dieses Jahrhunderts an baden-württembergischen Gymnasien überlebt haben, ist die euklidische Geometrie kaum mehr vorhanden. Unsere Schüler hören in der Regel das Wort *Tangente* zum ersten Mal bei der Einführung in die Differentialrechnung in der zehnten Klasse, und selbst dort wird sie inmitten von Änderungsraten und der Rekonstruktion von Bestandsfunktionen im Zusammenhang mit den üblichen pseudomathematischen „Anwendungen" recht stiefmütterlich behandelt. In den üblichen Aufgaben soll das Gehirn der Schüler dahingehend getriggert werden, auf die Tangententaste des GTR zu drücken und die Nullstelle der Tangente zu berechnen, wenn in der Aufgabenstellung der Satz „Wir nehmen an, dass ab diesem Zeitpunkt die Änderungsrate konstant bleibt" erscheint; nach der Abschaffung des GTR im Abitur 2019 ist dies durch das Einzeichnen der Tangente in ein mitgeliefertes Schaubild ersetzt worden.

Didaktiker wie Gabriele Kaiser[3] sprechen in diesem Zusammenhang von der „Komplexität der kognitiven Prozesse, die zum Verstehen der Situation und zum Heranziehen der passenden mathematischen Theorie notwendig sind", andere (etwa Dieter Remus und Sebastian Walcher [10]) erkennen darin die Entkernung des Mathematikunterrichts.

Will man versuchen, den Begriff der Ableitung in Klasse 10 auf algebraischem Wege einzuführen, muss man dies in den unteren Klassen mit der Bereitstellung eines gesunden Begriffs von Tangenten vorbereiten. Am besten eignen sich dazu Tangenten an Kreise und Parabeln.

Die geometrische Definition von Tangenten lässt sich allerdings nicht direkt auf die Schaubilder von Polynomfunktionen übertragen. Man ist also dazu gezwungen, die Definition der Tangente (und der Ableitung) im Laufe der Zeit zu verallgemeinern. Dabei hat man zwei Ziele vor Augen: zum Einen möchte man möglichst viele Funktionen ableiten können, zum Andern muss die allgemeinere Definition in den bereits bekannten Spezialfällen das gewünschte Ergebnis liefern. Außerdem ist es wichtig, dass Tangente und Ableitung, wenn sie definiert sind, eindeutig festgelegt sind.

2.1 Tangenten an Kreise

Die Wörter Sekante und Tangente kommen aus dem Lateinischen: secare bedeutet schneiden, tangere berühren. In der Geometrie taucht die Tangente in Euklids Elementen nur als Tangente an den Kreis auf. Allgemeiner betrachtete Apollonios Tangenten an Kegelschnitte (Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln), und Archimedes solche an weitere Kurven.

In der zweiten Definition des dritten Buches schreibt Euklid:

[3] Siehe etwa G. Kaiser, A. Busse, *Hamburger Mathematikabitur im Kreuzfeuer der Kritik*, GDM Mitteilungen 97 (2014), 28–31.

Eine Gerade berührt einen Kreis, wenn sie ihn trifft, aber bei beliebiger Verlängerung nicht schneidet.

Tangenten an einen Kreis haben also genau einen, Sekanten zwei Schnittpunkte mit ihm gemeinsam.

Tangenten an Kreise kann man geometrisch behandeln. Zentrales Ergebnis ist der Satz, dass die Tangente in einem Punkt senkrecht auf den Radius steht. Dass die Orthogonale zum Radius eine Tangente ist, kann man relativ leicht beweisen; schwierig dagegen ist der Nachweis, dass es genau eine Tangente gibt, dass also Geraden, welche nicht senkrecht auf den Radius stehen, auch einen zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis besitzen müssen.

Analytisch ist die Sache einfacher. Es genügt hier, Kreise um den Ursprung zu betrachten; diese werden von der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschrieben. Ist $P(a|b)$ ein Punkt auf diesem Kreis, so müssen wir unter den Geraden durch P diejenige Gerade finden, welche den Kreis in keinem zweiten Punkt schneidet. Setzen wir $y = m(x-a)+b$ in die Kreisgleichung ein, finden wir die quadratische Gleichung in x

$$x^2 + (m(x-a)+b)^2 = r^2.$$

Wir wissen, dass $x = a$ eine Lösung dieser quadratischen Gleichung ist. Wir ersetzen also r^2 durch a^2+b^2 und schreiben die Gleichung so, dass wir die dritte binomische Formel anwenden können:

$$x^2 - a^2 + (m(x-a)+b)^2 - b^2 = 0.$$

Es ergibt sich

$$(x-a)(x+a) + (m(x-a))(m(x-a)+2b) = 0.$$

Hier sieht man, dass $x = a$ Lösung ist; die andere folgt aus der linearen Gleichung

$$x + a + m(m(x-a)+2b) = 0.$$

Damit $x = a$ die einzige Lösung ist, muss auch diese lineare Gleichung durch $x = a$ erfüllt werden. Einsetzen ergibt

$$2a + 2mb = 0, \quad \text{also} \quad m_t = -\frac{a}{b},$$

jedenfalls wenn nicht gerade $b = 0$ ist. Weil die Verbindungsgerade von Ursprung und P die Steigung $m_r = \frac{b}{a}$ hat, folgt

Satz 2. *Die Tangente an den Punkt P eines Kreises mit Mittelpunkt O steht senkrecht auf die Gerade OP.*

Aufgabe 1. *Zeige, dass dieser Satz auch gilt, wenn* $a = 0$ *oder* $b = 0$ *ist.*

Am Beispiel der Tangenten an Kreise sollte man unmissverständlich klar machen, dass es Tangenten schon gab, als das Konzept von Funktionen und deren Ableitungen überhaupt noch nicht abzusehen war. Dasselbe gilt für Tangenten an Parabeln, die wir als nächstes behandeln.

2.2 Tangenten an Parabeln

Dabei stellt sich erneut die Frage, wie wir die Tangente an eine Parabel definieren wollen. Die Definition, die im Falle von Kreisen noch funktioniert hat, bringt uns hier nicht weiter: Geraden parallel zur Symmetrieachse einer Parabeln schneiden diese in genau einem Punkt, sollten aber sicherlich keine Tangenten sein. Hier ist also noch zusätzlich zu fordern, dass etwa die Parabel ganz auf einer Seite der Tangente liegen soll.

Durch Verschieben des Scheitelpunkts in den Ursprung (selbstverständlich nehmen wir auch an, dass die Symmetrieachse parallel zur y-Achse verläuft) dürfen wir annehmen, dass die Parabel durch die Gleichung $y = ax^2$ gegeben ist. Um die Tangente im Punkt $P(r|s)$ mit $s = ar^2$ zu finden, betrachten wir die Geraden durch P; diese sind gegeben durch $y = m(x-r) + ar^2$. Schneiden mit der Parabel ergibt

$$m(x-r) + ar^2 = ax^2, \quad \text{also} \quad m(x-r) = a(x^2 - r^2) = a(x-r)(x+r).$$

Division durch $x - r$ ergibt $m = a(x+r)$, und damit $x = r$ die einzige Lösung dieser Gleichung ist, muss $m = a(r+r) = 2ar$ sein.

Die Gleichung der entsprechenden Geraden ist daher $y = 2ar(x-r) + ar^2$, und zum Nachweis der Behauptung, dies sei die Tangente an die Parabel, fehlt noch die Einsicht, dass die Parabel ganz auf einer Seite der Geraden liegt. Im Falle von $a > 0$ müssen wir also nachweisen, dass

$$ax^2 \geq 2ar(x-r) + ar^2$$

gilt, mit Gleichheit für $x = r$. Vereinfachen liefert

$$ax^2 - 2arx + ar^2 \geq 0, \quad \text{also} \quad a(x-r)^2 \geq 0,$$

und diese Ungleichung ist ganz offenbar richtig.

Satz 3. *Die Steigung der Tangente an die Parabel $y = ax^2$ in $P(r|ar^2)$ ist gegeben durch $m = 2ar$; weiter geht die Tangente durch die Punkte P und $Q(0|-ar^2)$.*

2.3 Tangenten an Polynomfunktionen

Die bisherigen Definitionen einer Tangente versagen alle bei der kubischen Parabel $y = x^3$ im Punkt $(0|0)$, denn keine Gerade durch den Ursprung verläuft so, dass das Schaubild der Funktion ganz auf einer Seite der Geraden liegt.

Im Falle einer durch $f(x) = ax^2$ gegebenen Parabel schauen wir uns noch einmal die Gleichung $y = 2ar(x-r) + ar^2$ der Tangente an. Schneiden von Gerade und Parabel muss auf eine Gleichung mit einer einzigen Lösung führen, und das ist in der Tat der Fall: Gleichsetzen führt sofort auf $ax^2 = 2ar(x-r) + ar^2$, also $a(x-r)^2 = 0$.

Wir können daher eine Tangente an die durch $f(x) = ax^2$ gegebene Parabel als diejenige Gerade definieren, bei welcher die Schnittgleichung eine doppelte Lösung besitzt. Diese Definition ist zwar geometrisch erst einmal wenig aussagekräftig, aber algebraisch so einfach, dass wir sehr gut damit arbeiten können.

Außerdem lässt sich diese Definition sofort auf Polynome

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

höheren Grades übertragen: Wir nennen eine Gerade $y = mx + b$ Tangente an das Schaubild von $y = f(x)$ in $(a|f(a))$, wenn die Gleichung $f(x) = mx + b$ eine doppelte Lösung $x = a$ besitzt, wenn also $f(x) - mx - b = (x-a)^2 g(x)$ für ein geeignetes Polynom g gilt. Schreibt man die Gerade in der Form $y = m(x-a) + f(a)$, so folgt

$$f(x) - f(a) = m(x-a) + g(x)(x-a)^2. \tag{1}$$

In diesem Fall nennen wir $m = f'(a)$ die Ableitung von f in $x = a$.

Satz 4. *Ist f ein Polynom und $a \in \mathbb{R}$, dann genügt die Ableitung $f'(a)$ der Gleichung*

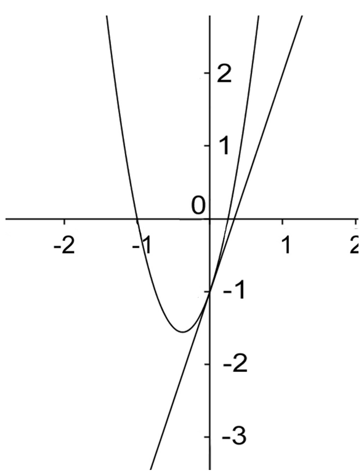
$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + g(x)(x-a)^2$$

für ein geeignetes Polynom g.

Aufgabe 2. *Zeige, dass $f'(a)$ dadurch eindeutig festgelegt ist.*

3. Tangenten an Polynomfunktionen

Wie bestimmt man die Tangente an das Schaubild von $y = x^2 + 3x - 1$ in $P(0|-1)$? Betrachtet man die Tangente als diejenige Gerade, welche das Schaubild von f am besten approximiert, dann wird man sagen, dass x^2 für sehr kleine x gegenüber $3x - 1$ vernachlässigbar ist und die Tangente daher durch $y = 3x - 1$ gegeben ist. Will man diese Überlegung exakt machen, kommt man um Ungleichungen oder Grenzwerte nicht herum.



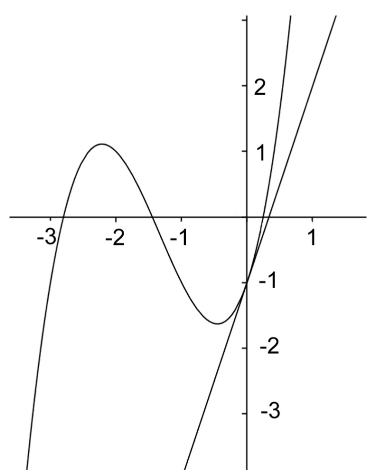


Abbildung 1: Tangenten in $x = 0$ an die Schaubilder von $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$ und $g(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$

Eine eher algebraische Definition der Tangente erhält man durch die Forderung, dass Funktion und Tangente sich in P nicht nur schneiden, sondern berühren sollen: wählt man einen zweiten Punkt Q auf dem Schaubild von f und lässt diesen auf P zulaufen, so wird die Sekante durch P und Q zur Tangente in P, wenn P und Q zusammenfallen, wenn also $x = 0$ eine doppelte

Nullstelle der Gleichung $f(x) = mx + b$ ist. Offenbar hat aber $x^2 + 3x - 1 = 3x - 1$ eine solche doppelte Nullstelle.

Dasselbe gilt für alle Polynomfunktionen:

Satz 5. *Die Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ besitzt in $x = 0$ die Tangente $y = a_1 x + a_0$.*

Offenbar hat die Gleichung $f(x) = a_1 x + a_0$ nämlich eine doppelte Nullstelle in $x = 0$, weil die Gleichung auf

$$x^2(a_n x^{n-2} + \ldots + a_3 x + a_2) = 0$$

hinausläuft.

Selbstverständlich kann man mit dieser Definition der Tangente die Tangentengleichung an beliebigen Stellen bestimmen – man kann sie aber nicht mehr direkt an der Gleichung der Funktion „ablesen“. Dies ist nur dann möglich, wenn man den Punkt, um den es geht, auf die y-Achse verschiebt, die Tangentengleichung abliest, und diese dann wieder an die ursprüngliche Stelle zurück schiebt.

Wollen wir etwa die Tangente an das Schaubild von $f(x) = x^2 + 3x - 1$ in $x = 1$ bestimmen, berechnen wir

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 3(x+1) - 1 = x^2 + 5x + 3,$$

erhalten die Gleichung der Tangente $t(x) = 5x + 3$ an das verschobene Schaubild; nach dem Zurückschieben wird daraus $t(x-1) = 5(x-1) + 3 = 5x - 2$.

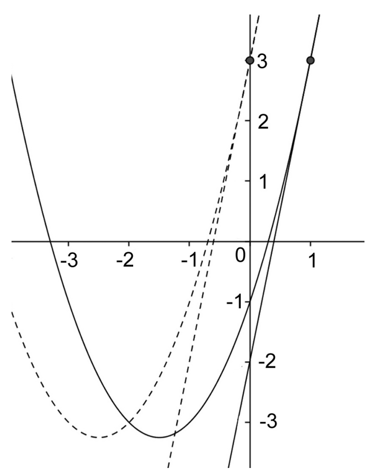


Abbildung 2: Tangente an das Schaubild von $f(x) = x^2 + 3x - 1$ in $x = 1$ und an das um 1 nach links verschobene Schaubild, das von $f(x+1) = x^2 + 5x + 3$.

Wenn wir also nur die Steigung der Tangente in $x = 1$ bestimmen wollen, reicht es, diese als den Koeffizienten von x in $f(x+1)$ abzulesen.

Satz 6. *Der Wert der Ableitung $f'(a)$ der Polynomfunktion $f(x)$ in $x = a$ ist gleich dem Koeffizienten von x in $f(x+a)$.*

Jetzt können wir die Ableitung einiger einfacher Polynomfunktionen bestimmen.

Aufgabe 3. *Bestimme die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f(x) = x^3 - 2x + 1$ in $x = 0$ und $x = 1$.*

Aufgabe 4. *In welchem Punkt hat die Parabel $f(x) = x^2 + x + 1$ Steigung 9?*

Aufgabe 5. *Zeige, dass für Polynomfunktionen f der hier benutzte Ableitungsbegriff mit dem üblichen übereinstimmt, dass also $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ gleich dem Koeffizienten von x in $f(x+a)$ ist.*

Aufgabe 6. *Sei f eine Polynomfunktion mit Näherungsparabel g im Punkt $P(a|f(a))$. Zeige, dass dann f und g dieselbe Tangente in P besitzen.*

3.1 Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$

Um die Tangentensteigung von $f(x) = x^2$ in $x = a$ zu berechnen, verschieben wir das Schaubild von f und betrachten $g(x) = f(x+a) = (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Diese Funktion hat die Tangente $t(x) = 2ax + a^2$ in $x = 0$, also hat f die Tangente $y = t(x-a) = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$. Die Steigung von f in $x = a$ ist also $m = 2a$, folglich ist $f'(x) = 2x$.

Für $f(x) = x^n$ folgt aus der Binomialentwicklung von $(x+a)^n$, dass

$$f(x+a) = x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} a + \ldots + \binom{n}{1} x a^{n-1} + a^n$$

und damit $f'(a) = \binom{n}{1} a^{n-1} = n a^{n-1}$ ist. Die Verwendung der Binomialentwicklung lässt sich bekanntlich vermeiden: Schreibt man $(x+a)^n = x^n + \ldots + c_1 x a^{n-1} + a^n$, so ist

$$m = c_1 a^{n-1} = \frac{(x+a)^n - a^n}{x}\Big|_{x=0},$$

wobei $h(x)|_{x=a} = h(a)$ die Auswertung von h in $x = a$ bedeutet. Jetzt benutzt man die leicht zu beweisende Identität

$$r^n - s^n = (r-s)(r^{n-1} + r^{n-2}s + \ldots + rs^{n-1} + s^n)$$

und findet

$$\frac{(x+a)^n - a^n}{x}\Big|_{x=0} = (x+a)^{n-1} + (x+a)^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\Big|_{x=0} = na^{n-1},$$

also $f'(x) = nx^{n-1}$ wie erwartet.

3.2 Ableitungsregeln

Weil Polynome Linearkombinationen von Monomen der Form $f(x) = x^n$ sind, können wir die Ableitung jeder Polynomfunktion berechnen, wenn wir wissen, wie man Summen von Polynomen und Produkte von Polynomen mit Konstanten ableitet. Die Herleitung dieser Regeln macht keinerlei Probleme und geht nicht über etwas Buchhaltung hinaus:

Satz 7. *Für Polynome f, g und Konstanten c gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \textit{und} \quad (cf)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Es reicht, diese Formeln für $a=0$ zu bestätigen; der allgemeine Fall folgt durch Verschieben. Sei daher

$$f(x)=f_0+f_1x+\ldots+f_nx^n \quad \text{und} \quad g(x)=g_0+g_1x+\ldots+g_mx^n, \tag{2}$$

dann ist

$$(f+g)(x)=f_0+g_0+(f_1+g_1)x+(f_2+g_2)x^2+\ldots,$$

wegen $f'(0)=f_1$ und $g'(0)=g_1$ also $(f+g)'(0)=f_1+g_1=f'(0)+g'(0)$.

Entsprechend ist $(cf)(x)=cf_nx^n+\ldots+cf_1x+cf_0$ und damit $(cf)'(0)=c\cdot f'(0)$.

Aufgabe 7. *Zeige, dass ein Polynom f genau dann eine doppelte Nullstelle in $x=a$ besitzt, wenn $f(a)=f'(a)=0$ ist.*

Auch die Produktregel folgt sehr einfach:

Satz 8. *Sind f und g Polynome, so gilt* $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

Seien f und g wie in (2). Dann ist

$$(fg)(x)=f_mg_nx^{m+n}+\ldots+(f_1g_0+f_0g_1)x+f_0g_0.$$

Also gilt

$$(fg)'(0)=f_1g_0+f_0g_1=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

wie behauptet.

Der Beweis der Kettenregel wird etwas durchsichtiger, sobald wir im nächsten Abschnitt die Taylorentwicklung von Polynomen besprochen haben.

3.3 Kriterien für Extrempunkte

So wie Tangenten an eine Polynomfunktion f in einem Punkt $P(a|f(a))$ Näherungsgeraden sind, also Geraden g, für welche die Gleichung $f(x)-g(x)=0$ eine doppelte Nullstelle in $x=a$ besitzen, sind Näherungsparabeln solche Parabeln $h(x)$, für welche $f(x)-h(x)$ eine dreifache Nullstelle in $x=a$ besitzen.

Für große Werte von x verhält sich die Funktion $f(x)=x^4-3x^2+1$ wie $g(x)=x^4$ (d.h. der Term mit dem höchsten Exponenten dominiert) wegen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\Big(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\Big)=1.$$

Für kleine Werte von x dagegen dominiert der Anteil mit den kleinsten Exponenten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2+1}{-3x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{-3x^2+1}+\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+1}{-3x^2+1}=1.$$

Insbesondere muss f in $x=0$ ein lokales Maximum besitzen, weil f für kleine Werte von x aussieht wie die nach unten offene Parabel $g(x)=-3x^2+1$.

Die Gleichung der Näherungsparabel in $x=a$ hängt nur von $f(a)$, $f'(a)$ und $f''(a)$ ab:

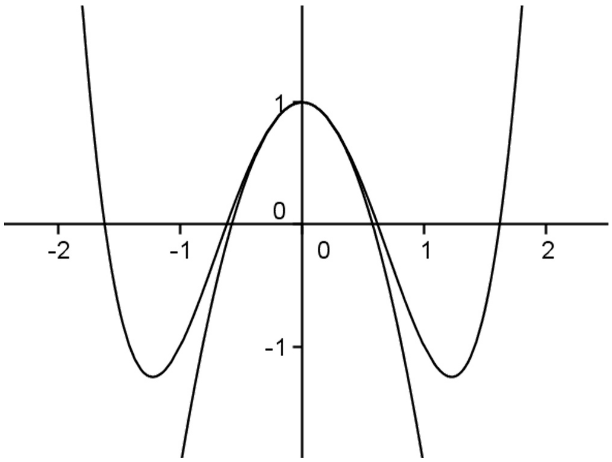


Abbildung 3: Schaubild von $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ und der Näherungsparabel $y = 1 - 3x^2$.

Aufgabe 8. *Zeige: ist $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots$ die Taylorentwicklung eines Polynoms f um $x = a$, dann ist*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

deren Näherungsparabel, falls nicht gerade $f''(a) = 0$ ist.

Allgemein findet man

Satz 9. *Sei $P(a|f(a))$ ein Punkt, in welchem eine Polynomfunktion $f(x)$ eine waagrechte Tangente, also Steigung $f'(a) = 0$, besitzt. Dann ist P*

- *ein Hochpunkt, falls $f''(a) < 0$, und*
- *ein Tiefpunkt, falls $f''(a) > 0$ ist.*

Beim Beweis dürfen wir uns auf $a = 0$ beschränken; der allgemeine Fall folgt durch Verschieben. Offenbar ist die Näherungsparabel an

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

in $x = 0$ gleich $h(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Diese ist nach oben geöffnet, wenn $a_2 > 0$, und nach unten, wenn $a_2 < 0$ ist. Wegen

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots + 6a_3 x + 2a_2$$

ist aber $a_2 = \frac{1}{2}f''(0)$. Im Falle $f''(0) > 0$ ist die Näherungsparabel nach oben geöffnet, folglich liegt in diesem Fall ein Tiefpunkt vor.

Will man etwas weniger intuitiv vorgehen, wird man um einige Abschätzungen nicht herumkommen. Wir wollen $(a|f(a))$ einen echten Tiefpunkt der Polynomfunktion f nennen, wenn für alle hinreichend kleinen Werte von $h \neq 0$ gilt: $f(a+h) > f(h)$. Wie oben dürfen wir uns auf den Fall $a = 0$ beschränken. Mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ gilt, wenn $a_1 = f'(0) = 0$ ist,

$$f(h) = f(0) + a_2 h^2 + h^3(a_3 + a_4 h + \ldots + a_n h^{n-3}).$$

Unser Ziel ist es, den Ausdruck in der Klammer für kleine Werte von h betragsmäßig klein zu machen. Dabei nehmen wir $|h| < 1$ an; dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$|a_3 + a_4 h + \ldots + a_n h^{n-3}| \leq |a_3| + |a_4||h^2| + \ldots + |a_n| \cdot |h^{n-3}| < |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| =: M.$$

Also ist $|a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n| < M|h|^3$ für alle h mit $|h| < 1$. Wenn wir jetzt zeigen können, dass $|a_2 h^2| > M|h|^3$ für alle hinreichend kleinen Werte von h ist, dann gilt

$$|a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n| < M|h|^3 < |a_2|h^2.$$

Wegen $h \neq 0$ ist $m|h|^3 < |a_2|h^2$ gleichbedeutend mit

$$|h| < \frac{|a_2|}{M} = \frac{|f''(0)|}{2M}.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 10. *Ist $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ für ein Polynom f vom Grad n, dann gilt für alle $h \neq 0$ mit $|h| < 1$ und $|h| < \frac{|f''(a)|}{2M}$, wo $M = |f'''(a)| + |f^{(4)}(a)| + \ldots + |f^{(n)}(a)|$ ist, die Ungleichung $f(a+h) \geq f(a)$. Insbesondere ist $(a|f(a))$ in diesem Fall ein Tiefpunkt von f.*

Aufgabe 9. *Sei f ein Polynom mit $f'(a) = f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$. Zeige, dass f in $(a|f(a))$ einen Sattelpunkt besitzt.*

Aufgabe 10. *Sei f ein Polynom mit $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$. Zeige:*

1. *Ist n ungerade, dann besitzt f in $(a|f(a))$ einen Sattelpunkt.*
2. *Ist n gerade, dann besitzt f in $(a|f(a))$ einen Extrempunkt, und zwar einen Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) wenn $f^{(n)}(a) < 0$ (bzw. $f^{(n)}(a) > 0$) ist.*

Aufgabe 11. *Zeige mit Differentialrechnung: Ist $h(x)$ eine differenzierbare Funktion und $f(x) = x^2 h(x) + mx + b$, dann ist $y = mx + b$ die Gleichung der Tangente in $x = 0$.*

4. Der Satz von Taylor für Polynome

In diesem Abschnitt leiten wir die Taylorentwicklung von Polynomen her und wenden sie auf den Beweis der Kettenregel an.

4.1 Die Taylorentwicklung von Polynomen

Im Falle von Polynomfunktionen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ist der Satz von Taylor fast eine Trivialität. Wir schreiben $g(x) = f(x+a) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ und erhalten daraus wieder f, wenn wir die Verschiebung rückgängig machen:

$$f(x) = g(x-a) = b_n (x-a)^n + \ldots + b_1 (x-a) + b_0.$$

Für später merken wir vor, dass wenn die Koeffizienten a_j von f ganze Zahlen sind, dies auch für die b_j von g gilt, da beim Entwickeln von $(a+x)^k$ keine Brüche auftreten.

Die Zahlen b_j lassen sich nun leicht bestimmen. Einsetzen von $x = a$ liefert $b_0 = f(a)$. Leitet man die Gleichung einmal ab und setzt dann $x = a$, so folgt $b_1 = f'(a)$. Zweimaliges Ableiten ergibt $b_2 = \frac{1}{2} f''(a)$ usw., und wir finden

Satz 11. *Jedes Polynom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ lässt sich „um $x = a$“ entwickeln:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(x-a)^n. \quad (3)$$

Hat f ganzzahlige Koeffizienten, dann sind die Koeffizienten in (3) ebenfalls ganze Zahlen.

Neben der Bestimmung der Taylorentwicklung eines Polynoms durch Verschieben bzw. durch Berechnung der Ableitungen gibt es auch noch die Methode durch das fortgesetzte Horner-Schema. Wir wollen alle drei Methoden an einem kleinen Beispiel erläutern. Sei dazu $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

- Verschiebung: $f(x+2) = (x+2)^3 - 2(x+2)^2 + 3(x+2) - 4 = x^3 + 4x^2 + 7x + 2$ ergibt $f(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 2$. Diese Methode verlangt Kenntnisse der Binomialentwicklung.

- Ableitung: Auf $f(2) = 2$, $f'(2) = 7$, $f''(2) = 8$ und $f'''(2) = 6$ ergibt sich sofort

$$f(x) = \frac{6}{3!}(x-2)^3 + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + 7(x-2) + 2 = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 2.$$

- Fortgesetztes Horner-Schema: Polynomdivision $f(x) : (x-2)$ mit dem Horner-Schema liefert die ersten drei Zeilen der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 3 & -4 \\
 & 0 & 2 & 0 & 6 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
 & 0 & 2 & 4 & \\
\hline
2 & 1 & 2 & 7 & \\
 & 0 & 2 & & \\
\hline
2 & 1 & 4 & &
\end{array}$$

  Dem ersten Horner-Schema entnehmen wir $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (x-2)(x^2+3) + 2$. In den nächsten beiden Zeilen steht dann $x^2 + 3 = (x-2)(x+2) + 7$, und schließlich ist $x + 2 = x - 2 + 4$. Also ist

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 + 3x - 4 &= (x-2)(x^2+3) + 2 = (x-2)((x-2)(x+2)+7) + 2 \\
&= (x-2)((x-2)((x-2)+4)+7) + 2 \\
&= (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 2,
\end{aligned}$$

  d.h. die Koeffizienten der Taylorentwicklung sind gerade die jeweils letzten Zahlen im fortgesetzten Horner-Schema.

Aufgabe 12. *Betrachte die Entwicklung*

$$(x+1)^n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Zeige, dass aus $f(0) = 1$, $f'(0) = n$, $f''(0) = n(n-1)$ usw.

$$a_0 = 1,\ a_1 = n,\ a_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, \quad \textit{und allgemein} \quad a_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

folgt.

Aufgabe 13. *Bilde das Produkt der beiden Taylorentwicklungen*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$
$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots.$$

und leite durch Berechnung des Produkts die Produktregeln für höhere Ableitungen her.

4.2 Die Kettenregel

Für die Kettenregel ist $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$ zu beweisen. Wir schreiben

$$f(x) = f_m x^m + \dots + f_1 x + f_0 \quad \text{und} \quad g(x) = g_n x^n + \dots + g_1 x + g_0$$

und entwickeln f um g_0:

$$f(x) = f(g_0) + f'(g_0)(x - g_0) + \frac{1}{2} g''(0)(x-g_0)^2 + \dots.$$

Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g_0) + f'(g_0)(g(x) - g_0) + \frac{1}{2} g''(0)(g(x) - g_0)^2 + \dots.$$

Die rechte Seite enthält nur einen linearen Term, und zwar im zweiten Summanden. Hier ist

$$f'(g_0)(g(x) - g_0) = f'(g_0)(g_m x^m + \dots + g_1 x),$$

folglich ist der lineare Term der Entwicklung von $(f \circ g)(x)$ um $x = 0$ gleich $f'(g_0) g_1 x$. Also ist

$$(f \circ g)'(0) = f'(g_0) g_1 = f'(g(0)) \cdot g'(0)$$

wie behauptet.

Satz 12 (Kettenregel)**.** *Sind f und g Polynomfunktionen, so gilt*

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

5. Der Satz von Goldbach

Die zahlentheoretischen Begriffe, die Schüler in der Unterstufe zu einem sicheren Rechnen mit Brüchen brauchen, nämlich Primzahlen, Primfaktorzerlegung, größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache, wurden in Baden-Württemberg mit der Schavanschen Schulreform Anfang dieses Jahrtausends restlos entsorgt. Inzwischen gibt es in der Mittelstufe unserer Gymnasien zahlreiche Schüler, denen selbst der Zahlenraum bis 20, auf den Herget und Konsorten[4] das Rechnen ohne technische Hilfsmittel beschränkt haben, Probleme bereiten.

[4] Herget et al., *Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?*, MNU **54** (8), S. 458-464; vgl. auch die Diskussion in den Computer-Algebra-Rundbriefen 27 und 28. In ihrer Veröffentlichung schlagen sie vor, dass die Gleichung $x - 6 = 0$ auch künftig noch ohne Computerunterstützung gelöst werden können sollte, komplizierte Gleichungen wie $5x - 6 = 2x + 15$ dagegen nur noch mit Technologie. Der Lehrplan von Sachsen orientiert sich expressis verbis an den Vorschlägen von Herget. Wie sehr Texas Instruments das deutsche Bildungssystem gekapert hat, kann man erkennen, wenn man die Vorschläge in E. Lehmann, *Mathematik mit CAS im Grundkurs Unterricht – Strategien – Klausuren – Abitur* (`http://home.snafu.de/mirza/CAS-Projekt-2-Handreichung-2005.pdf` mit den heutigen Pseudoanwendungen von Pseudomathematik auf Pseudoprobleme in den Abiturprüfungen sämtlicher Bundesländer vergleicht.

Man versucht deswegen, hier vorsichtig umzusteuern: Die Sätze über besondere Punkte im Dreieck sind im neuen Bildungsplan ebenso wieder enthalten wie Primzahlen und ggT, und selbst die von Schavan abgeschafften Leistungskurse wurden 2019 wieder eingeführt, wenn auch nur dem Namen nach: der Lehrplan der Leistungskurse wird der bisherige Lehrplan sein, die Grundkurse werden abgespeckt[5].

5.1 Goldbachs Polynom

Schüler, die den Begriff einer Primzahl nie kennengelernt haben, werden die folgende Frage schwerlich interessant finden:

> *Gibt es ein Polynom $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten, für das alle Werte $f(x)$ mit $x \in \mathbb{Z}$ Primzahlen sind?*

Christian Goldbach hat diese Frage in einem Brief an Leonhard Euler vom September 1743 ([6, Letter 73]) negativ beantwortet:

> *Ob es zwar sehr leicht ist zu demonstriren, dass eine formula algebraica hujusmodi $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ etc. lauter numeros primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coefficientes a, b, c, etc. mögen numeri integri quicunque seyn, so gibt es doch formulas, welche vor vielen andern eine Menge numerorum primorum in sich halten; dergleichen ist die series $xx + 19x - 19$, so in den ersten 47 terminis nur vier numeros non primos hat.*

In seiner heute seltsam anmutenden Mischung aus Deutsch und Latein bemerkt Goldbach, dass er leicht zeigen könne, dass es kein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit ganzen Koeffizienten a_i gibt, das an ganzzahligen Stellen nur Primzahlwerte annimmt, und dass es dennoch Polynome gibt, die sehr viele Primzahlwerte annehmen, wie etwa $f(x) = x^2 + 19x - 19$. In der Tat findet man

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
2	23	8	197	14	443
3	47	9	233	15	491
4	73	10	271	16	541
5	101	11	311	17	593
6	131	12	353	18	647
7	163	13	397	19	703

und bis auf $f(19) = 19 \cdot 37$ sind dies allesamt Primzahlwerte.

Die Goldbachsche Behauptung lässt sich tatsächlich mit einfachsten zahlentheoretischen Mitteln beweisen; Euler hat später selbst einen solchen Beweis veröffentlicht.

[5] Allerdings wurde im Wesentlichen nur die Stundenzahl von 4 auf 3 gekürzt; dass man die Kettenregel im Basisfach nur noch für Verkettungen mit linearen Funktionen bespricht, ist inhaltlich keine Entlastung. Vermutlich wird man den Lehrplan hier deutlich stärker ausdünnen, wenn die ersten Basiskurse miserable Ergebnisse in der verpflichtend mündlichen Abiturprüfung eingefahren haben.

Wir wollen hier einen ganz einfachen Beweis dieses Satzes anführen. Schaut man sich einige zusammengesetzte Funktionswerte von $f(x) = x^2 + 19x - 19$ genauer an, etwa $f(25) = 1081 = 23 \cdot 47$, so sieht man, dass $23 = f(2)$ und $47 = f(3)$ ist. Auch $f(3) \cdot f(4) = 47 \cdot 73 = 3431 = f(50)$ ist ein zusammengesetzter Funktionswert. Tatsächlich findet man

$$f(x)f(x+1) = x^4 + 40x^3 + 381x^2 - 380x - 19 = f(x^2 + 20x - 19).$$

Insbesondere haben wir damit unendlich viele zusammengesetzte Werte des Polynoms f gefunden. Der Schlüssel zum Beweis einer allgemeinen Formel steckt in der Beobachtung, dass

$$f(x^2 + 20x - 19) = f(x + f(x))$$

ist. In der Tat: Setzt man in der Taylorschen Formel für Polynome

$$f(x+h) = f(x) + a_1(x)h + a_2(x)h^2 + \ldots + a_n(x)h^n$$

einfach $h = f(x)$, dann folgt

$$\begin{aligned} f(x + f(x)) &= f(x) + a_1(x)f(x) + a_2(x)f(x)^2 + \ldots + a_n(x)f(x)^n \\ &= f(x)[1 + a_1(x) + a_2(x)f(x) + \ldots + a_n(x)f(x)^{n-1}], \end{aligned}$$

und wenn man x so groß wählt, dass beide Faktoren auf der rechten Seite betragsmäßig > 1 sind, hat man unendlich viele zusammengesetzte Funktionswerte gefunden, und zwar einschließlich einer nicht trivialen Faktorisierung.

Im Goldbachschen Beispiel sind $f(19)$ und $f(38)$ aus trivialen Gründen zusammengesetzt; der obige Satz liefert die zusammengesetzten Funktionswerte $f(25) = f(2 + f(2))$ und $f(36) = f(-f(-1) - 1)$.

5.2 Die Faktorisierung von Gérardin

Der obige Beweis des Satzes von Goldbach ist aus meiner Beschäftigung mit einer kleinen Bemerkung von André Gérardin (1879–1953) in [3] entstanden, wonach die Zahlen der Form $2a^2 - 1$ für $a = 9$, 89, 881 zusammengesetzt sind. Diese Zahlen werden nicht von unseren obigen Ergebnissen abgedeckt, weil 9 und 89 nicht die Form $f(n) = 2n^2 - 1$ haben. Die Überlegungen von oben liefern beispielsweise mit $f(x) = 2x^2 - 1$:

$$f(x + f(x)) = (2x^2 - 1)(4x^2 + 4x - 1).$$

Mit Hilfe der Online Encyclopedia of Integer Sequences findet man schnell heraus, dass die Gérardinschen Zahlen Lösungen der diophantischen Gleichung $3a^2 - 2b^2 = 1$ waren:

a	b
9	11
89	109
881	1079

Mit $3x^2 - 2y^2 = 1$ findet man jetzt

$$9(2x^2 - 1) = 3(4y^2 - 1) = 3(2y - 1)(2y + 1), \quad \text{also} \quad 2x^2 - 1 = \frac{(2y-1)(2y+1)}{3},$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Auch diese Zerlegung lässt sich etwas verallgemeinern: ist r eine positive natürliche Zahl und sind a und b ganze Zahlen mit $a-b=r$, dann gilt

$$a(bx^2-r) = abx^2-ar = b(by^2+r)-ar = b^2y^2-(a-b)r = (by)^2-r^2 = (by-r)(by+r)$$

für alle ganzzahligen Lösungen von $ax^2-by^2=r$.

Aufgabe 14. *Zeige direkt, dass für $f(x)=ax+b$ der Ausdruck $f(x+f(x))$ das Produkt zweier Terme ist.*

Aufgabe 15. *Zeige, dass es unendlich viele zusammengesetzte Werte von $f(x)=4x^2+1$ gibt.*

Aufgabe 16. *Das Eulersche Polynom x^2+x+41 liefert Primzahlwerte für $x=0,1,2,\ldots,39$. Benutze den obigen Satz, um zusammengesetzte Werte $f(x)$ für einige kleine Werte von $x \geq 40$ zu finden.*

Aufgabe 17. *Zeige, dass man weitere Familien zusammengesetzter Werte einer Polynomfunktion finden kann, wenn man in der Taylor-Entwicklung h durch $x+q(x)f(x)$ ersetzt, wo $q(x)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.*

Aufgabe 18. *Zeige, dass 5 die einzige Primzahl der Form n^4+4 für eine natürliche Zahl n ist.*

Aufgabe 19. *Zeige, dass $f(x)=\frac{x^2+x+2}{2}$ für $x \in \mathbb{Z}$ nur ganzzahlige Werte annimmt, und rechne nach, dass die Faktoren von*

$$f(x+f(x)) = \frac{x^2+x+2}{2} \cdot \frac{x^2+5x+8}{2}$$

ebenfalls nur ganzzahlige Werte annehmen.

6. Existenzsätze

Auch im Falle von Polynomfunktionen gibt es Fragen, die ein genaueres Vorgehen erfordern. Dass die Funktion $f(x)=x^2-2$ eine Nullstelle besitzt beruht auf Eigenschaften der reellen Zahlen. Im Falle von Polynomfunktionen lassen sich die Schwierigkeiten bei den Beweisen der wichtigsten Mittelwertsätze zu Beginn vermeiden, wenn man den Fundamentalsatz der Algebra annimmt.

6.1 Fundamentalsatz der Algebra

Zum Beweis von Existenzsätzen braucht man die Lösbarkeit von Gleichungen. Im Falle von Polynomen läuft dies auf den Fundamentalsatz der Algebra hinaus, den man auf der Schule nur motivieren kann. Im Wesentlichen besagt er, dass man jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in lineare und quadratische Faktoren zerlegen kann, wobei die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben:

Satz 13. *Jedes Polynom $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ mit reellen Koeffizienten lässt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) in der Form*

$$f(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_r)p_1(x)\cdots p_s(x) \tag{4}$$

schreiben; hierbei sind die $p_j(x) = x^2 + b_j x + c_j$ quadratische Polynome mit negativer Diskriminante $b_j^2 - 4c_j < 0$. Außerdem ist $n = r + 2s$.

Aufgabe 20. *Zeige mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra: Ist f ein Polynom mit $f(a)f(b) < 0$, dann besitzt f eine Nullstelle im Intervall (a,b).*

Der Satz von Rolle, wonach die Ableitung f' einer Polynomfunktion f mit $f(a) = f(b)$ im Intervall (a,b) eine Nullstelle besitzt, folgt ebenfalls aus dem Fundamentalsatz der Algebra, allerdings mit deutlich mehr Mühe. Dazu nimmt man an, dass $f(a) = f(b) = 0$ ist und f in (a,b) keine Nullstelle mehr besitzt; dann setzt man $f(x) = (x-a)^r(x-b)^s g(x)$ und zeigt, dass f' in (a,b) das Vorzeichen wechselt.

Als eine weitere Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra notieren wir die folgende

Proposition 1. *Sei $I = [A,B]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist $f(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $f(x) \geq C$ für alle $x \in I$.*

Zum Beweis schreibt man $f(x)$ wie in (4). Die Polynome $p_j(x)$ besitzen Tiefpunkte (quadratische Ergänzung) mit positiver y-Koordinate, d.h. es gilt $p_j(x) \geq c_j$ für positive Konstanten $c_j > 0$. Sind $x_1 \leq \ldots \leq x_r$ die reellen Nullstellen von f, dann gibt es drei Möglichkeiten: a) $B < x_1$; b) $x_r < A$ oder c) es gibt ein x_j mit $x_j < A < B < x_{j+1}$. Wir behandeln exemplarisch den letzten Fall. Ist $i \leq j$, so gilt $x - x_i \geq A - x_i$; für $j \geq i$ ist dagegen $x_i - x \geq x_i - B$ für alle $x \in I$, und die Anzahl solcher Indizes ist wegen $f(x) > 0$ gerade. Also ist

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x-x_1)\cdots(x-x_r)p_1(x)\cdots p_s(x) \\ &\geq a_n(A-x_1)\cdots(A-x_j)(x_{j+1}-B)\cdots(x_r-B)c_1\cdots c_s. \end{aligned}$$

Wenn wir die Konstante auf der rechten Seite C nennen, sind wir fertig.

6.2 Der Monotoniesatz

Viele intuitiv einsichtige Aussagen in der Analysis lassen sich nur unter Zuhilfenahme von Mittelwertsätzen beweisen. Beschränkt man sich auf Polynome, wird die Sache deutlich einfacher. So ist etwa der Beweis des nächsten Satzes für Polynome trivial:

Satz 14. *Ist f ein Polynom mit $f'(x) = 0$, dann ist $f(x) = c$ konstant.*

Dies ist klar, denn die Ableitung von $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ist genau dann das Nullpolynom, wenn $a_n = \ldots = a_1 = a_0 = 0$ ist (hier geht Satz 1 ein).

Der Beweis des Zusammenhangs zwischen Monotonie und Ableitung erfordert dagegen etwas mehr als reine Formalitäten. Wir nennen eine Funktion f streng monoton fallend (steigend) auf einem Intervall I, wenn aus $x_1 < x_2$ für $x_1, x_2 \in I$ immer $f(x_1) > f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) folgt. Die beiden folgenden Aufgaben sind formale Übungen:

Aufgabe 21. *Ist f auf einem Intervall I streng monoton fallend, dann ist die Funktion g mit $g(x) = -f(x)$ auf I streng monoton steigend.*

Aufgabe 22. *Ist f auf den Intervallen $I = [A,B]$ und $[B,C]$ streng monoton steigend, dann auch auf dem Intervall $[A,C]$.*

Mit der klassischen Definition der Monotonie beweisen wir nun den fundamentalen

Satz 15. *Sei f ein nicht konstantes Polynom. Genau dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I = [A,B]$, wenn f auf I streng monoton steigend ist.*

Eine Richtung ist dabei relativ einfach zu bekommen: Sei f streng monoton steigend, $a \in I$ fest mit $a < B$; für alle $b \in I$ mit $a < b < B$ gilt dann $f(b) - f(a) \geq 0$. Wegen $f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + g(a)(b-a)^2$ ist dies zu $0 \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + g(a)(b-a)$ äquivalent. Lässt man jetzt $b \to a$ gehen, folgt $f'(a) \geq 0$. Man kann die letzte einfache Grenzwertbetrachtung auch eliminieren, wenn man für einen Beweis durch Widerspruch $f'(a) < 0$ annimmt und $b-a$ so klein macht, dass die obige Ungleichung falsch wird.

Bevor wir die andere Richtung beweisen, stellen wir eine Ungleichung bereit. Wir wissen, dass

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = (x-a)^2 g(x)$$

für ein Polynom g ist. Weil f auf I beschränkt ist, gibt es eine Konstante K (die von f und I abhängt), sodass $|g(x)| \leq K$ für alle $x \in I$ gilt. Damit haben wir bewiesen:

Lemma 1. *Ist f ein Polynom, I ein endliches Intervall und $a \in I$, dann gilt*

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq K(x-a)^2 \tag{5}$$

für alle $x \in I$ und eine geeignete nur von f und I abhängige Konstante K.

Aufgabe 23. *Zeige: Sind f und g Polynome, und gilt (5) mit Konstanten K und L, dann gilt (5) auch für $f+g$ mit der Konstante $K+L$.*

Wir bemerken am Rande, dass die Gültigkeit der Ungleichung (5) für Polynome in einer Umgebung von a gleichbedeutend mit der Differenzierbarkeit in $x = a$ ist. Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man die Differenzierbarkeit auf alle Funktionen ausweiten, die auf der Schule eine Rolle spielen.

Für die andere Richtung sei jetzt $I = [A,B]$ ein abgeschlossenes Intervall, auf dem $f'(x) \geq 0$ ist. Nach Aufg. 22 genügt es, die Behauptung für Teilintervalle $[A,B]$ zu zeigen, in derem Innern f' strikt positiv ist. Für alle u,v mit $A < u < v < B$ gibt es dann eine (von u und v abhängige) Konstante $C > 0$ mit $f'(x) \geq C > 0$ für alle $x \in [u,v]$. Jetzt unterteilen wir das Intervall $[u,v]$ in Teilintervalle der Länge $\leq \frac{C}{K}$. Für alle $x_1 < x_2$ in einem solchen Teilintervall folgt wegen $0 < x_2 - x_1 < \frac{C}{K}$ aus (5)

$$f(x_2) - f(x_1) \geq C(x_2 - x_1) - K(x_2 - x_1)^2 > 0.$$

Also ist f auf jedem Intervall $[u,v]$ und damit auf (A,B) streng monoton wachsend.

Jetzt ist nur noch zu zeigen, dass f streng monoton steigend bleibt, wenn man die Randpunkte mit einschließt. Um etwa $f(x) \leq f(B)$ für $A \leq x < B$ zu zeigen betrachten wir die Gleichung

$$f(B) - f(a) = f'(a)(B-a) + g(B)(B-a)^2.$$

Sei $M = g(B)$; die zu beweisende Ungleichung $f'(a)(B-a) + M(B-a)^2 \geq 0$ ist äquivalent zu $f'(a) + M(B-a) \geq 0$. Ist $M \geq 0$, so ist die Ungleichung trivialerweise richtig. Ist $M < 0$, ist die äquivalent zu $a \geq B - \frac{f'(a)}{|M|}$, ist also richtig für alle a, die hinreichend nahe bei B liegen.

Lösungen der Aufgaben

1. Ist etwa $a = 0$, so muss $b = \pm r$ sein. Wir wollen zeigen, dass die Gerade $y = r$ Tangente in $(0, r)$ ist. Schneiden mit dem Kreis liefert $x^2 + r^2 = r^2$, also $x^2 = 0$. Damit ist $(0, r)$ der einzige Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis, folglich ist die Gerade $y = r$ Tangente an den Kreis.

2. Wir nehmen an, es gäbe zwei Zahlen m_1 und m_2 und zwei Polynome g_1 und g_2 mit
$$f(x) - f(a) = m_1(x-a) + g_1(x)(x-a)^2,$$
$$f(x) - f(a) = m_2(x-a) + g_2(x)(x-a)^2.$$
Bildet man die Differenz der Gleichungen, erhält man
$$0 = (m_1 - m_2)(x-a) + (g_1(x) - g_2(x))(x-a)^2, \quad \text{also} \quad m_1 - m_2 + (g_1(x) - g_2(x))(x-a) = 0.$$
Diese Gleichung haben wir zwar durch Division mit $(x-a)$ erhalten, dennoch dürfen wir $x = a$ einsetzen, weil es eine Identität von Polynomen ist, welche naturgemäß für alle Werte von x gilt. Mit $x = a$ folgt dann sofort $m_1 = m_2$ und dann $g_1 = g_2$.

3. Aus $f(x) = x^3 - 2x + 1$ liest man die Gleichung der Tangente in $x = 0$ direkt ab: $y = -2x + 1$. Die Tangente in $x = 1$ ergibt sich aus $f(x+1) = x^3 + 2x^2 + x$ nach Zurückverschieben zu $y = x - 1$.

4. Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 9x + b$ muss eine doppelte Nullstelle besitzen. $0 = x^2 - 8x + b - 1 = (x-4)^2 + b - 17$ ergibt $b = 17$ und $x = 4$, also den Punkt $P(4|22)$ und die Tangente $y = 9x + 17$.

5. Sei $f(x+a) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Dann ist $f(a) = a_0$, folglich
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+a) - f(0)}{x} = a_1$$
wie behauptet.

6. Es genügt, die Aussage für $a = 0$ zu beweisen. Ist $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, so ist $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ deren Näherungsparabel (wenn $a_2 = 0$ ist, muss man statt Näherungsparabel das Wort Tangente lesen), und die Tangente von f und g in P ist $y = a_1 x + a_0$.

7. Sei $f(x) = (x-a)^r g(x)$ für ein $r \geq 0$ und ein Polynom g mit $g(a) \neq 0$. Aus $f(a) = 0$ folgt dann $r \geq 1$, und $f'(a) = 0$ liefert $r \geq 2$. Umgekehrt folgt aus $r \geq 2$ sofort $f(a) = f'(a) = 0$.

8. Offenbar ist $(x-a)^3$ ein Faktor von $f(x) - y$. Die Bedingung $f''(a) \neq 0$ garantiert, dass y Grad 2 hat.

9. Intuitiv ist das klar: die nichtlineare Näherungsfunktion minimalen Grades ist $f(x) = \frac{1}{6} f'''(a) x^3 + f(a)$, und diese besitzt einen Wendepunkt. Will man die Behauptung exakt nachrechnen, muss man zeigen, dass f links von a unterhalb und rechts von a oberhalb von der Tangente $y = f(a)$ (oder andersherum) verläuft. Die entsprechenden Ungleichungen beweist man wie im Falle von Satz 10.

10. Ist $n = 2k+1$ ungerade, so ist die Näherungsfunktion durch $g(x) = f(a) + c(x-a)^{2k+1}$ gegeben; diese wechselt in $x = a$ das Vorzeichen, also liegt ein Sattelpunkt vor. Ist $n = 2k$ dagegen gerade, so hat die Näherungsfunktion $g(x) = f(a) + c(x-a)^{2k}$ einen Hoch- bzw. Tiefpunkt in $x = a$, je nachdem $c = f^{(n)}(a)/n!$ negativ bzw. positiv ist.

11. Offenbar ist $f'(x) = 2xh(x) + x^2h'(x) + m$, also $f'(0) = m$. Wegen $f(0) = n$ ist $y = mx + b$ die Gleichung der Tangente.

12. Aus $f(0) = 1$ folgt sofort $a_0 = 1$. Aus $f'(x) = n(x+1)^{n-1} = nx^{n-1} + \ldots + a_1$ folgt entsprechend, dass $a_1 = f'(0) = n$ ist. Allgemein erhalten wir aus der Taylorentwicklung von $(x+1)^n$, dass
$$a_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$
gilt.

13. Multiplikation dieser Ausdrücke liefert
$$\begin{aligned} f(x)g(x) = f(a)g(a) &+ [f'(a)g(a) + f(a)g'(a)](x-a) \\ &+ \frac{f''(a)g(a) + 2f'(a)g'(a) + f(a)g''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &+ \frac{f'''(a)g(a) + 3f''(a)g'(a) + 3f'(a)g''(a) + g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \end{aligned}$$
Ein Vergleich mit der Taylor-Entwicklung von $h(x) = f(x)g(x)$ liefert die Beziehungen
$$\begin{aligned} h'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\ h''(a) &= f''(a)g(a) + 2f'(a)g'(a) + f(a)g''(a), \\ h'''(a) &= f'''(a)g(a) + 3f''(a)g'(a) + 3f'(a)g''(a) + f(a)g'''(a) \end{aligned}$$
und so weiter.

14. Es ist $f(x + f(x)) = a(x + ax + b) + b = (a^2 + a)x + ab + b = (a+1)(ax+b)$.

15. Es ist $f(4x^2 + x + 1) = f(x + f(x)) = (4x^2 + 1)(16x^2 + 8x + 5)$.

    Quadratische Ergänzung führt auf eine andere bekannte Zerlegung: Es ist

    $f(x^2) = 4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2+1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

16. Es ist $f(0) = 41$, also $f(0 + f(0)) = f(41) = 41\cdot 43$. Mit $f(1) = 43$ folgt entsprechend $f(44) = 43 \cdot 47$.

    Allgemeiner ist
$$f(x + f(x)) = f(x)f(x+1) = (x^2 + x + 41)(x^2 + 3x + 43).$$

17. Der Beweis verläuft genau wie oben:
$$\begin{aligned} f(x + q(x)f(x)) &= f(x) + a_1(x)q(x)f(x) + a_2(x)q(x)^2f(x)^2 + \ldots + a_n(x)q(x)^nf(x)^n \\ &= f(x)[1 + a_1(x)q(x) + a_2(x)q(x)^2f(x) + \ldots + a_n(x)q(x)^nf(x)^{n-1}]. \end{aligned}$$

18. Es ist $n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-(2n)^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$. Dies ist nur dann eine Primzahl, wenn einer der Faktoren gleich ± 1 ist, was nur für $n = 1$ der Fall ist.

19. Es ist $\frac{x^2+x+2}{2} = \frac{x(x+1)}{2} + 1$, und weil entweder x oder $x+1$ gerade ist, ist $\frac{x(x+1)}{2}$ eine ganze Zahl. Wegen $\frac{x^2+5x+8}{2} = \frac{x(x+1)}{2} + 2x + 4$ ist dies auch für den zweiten Faktor der Fall.

20. Schreibe f wie in (4) mit $x_1 \leq \ldots \leq x_r$. Weil $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, kann nicht $x_i < a < b < x_{i+1}$ sein. Also muss ein x_i zwischen a und b liegen.

21. Aus $f(x_1) > f(x_2)$ folgt $g(x_1) < g(x_2)$.

22. Klar.

23. Aus den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| &\leq K(x-a)^2 \\ |g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)| &\leq L(x-a)^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &|(f+g)(x)-(f+g)(a)-(f+g)'(a)(x-a)| \\ &\qquad \leq |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| + |g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)| \\ &\qquad \leq K(x-a)^2 + L(x-a)^2 = (K+L)(x-a)^2 \end{aligned}$$

nach der Dreiecksungleichung.

Nachwort

Es gibt in der Literatur inzwischen reichlich Vorschläge, wie man die Analysis an der Hochschule den Defiziten der Studienanfänger anpassen kann. Hingewiesen sei hier auf die Ideen von Hermann Karcher [4, 5] für seine Analysis-Vorlesungen aus dem Studienjahr 1999/2000. Weitere Bücher über Hochschulanalysis mit einem ähnlichen Zugang stammen von Lin [8] und Range [9]. Der lesenswerte Band [1] ist mir schon zuvor bekannt gewesen.

Was das Ableben der Schulanalysis angeht, sei Lesern mit starken Nerven die Diskussion [2] über Pläne für die Analysis in der Sekundarstufe II aus dem Jahre 1973 zur Lektüre anempfohlen.

Literatur

[1] K. Eriksson, D. Estep, C. Johnson, *Angewandte Mathematik: body and soul. Band 1, Ableitungen und Geometrie in* $\mathbb{R}^3$, Springer-Verlag 2004

[2] R. Fritsch, F. Raith (Hrsg.), *Tagungsbericht 44/1973*, `https://oda.mfo.de/bitstream/handle/mfo/1513/full-text.pdf?sequence=1&isAllowed=y`

[3] A. Gerardin, *Méthode inédite de découverte des facteurs d'un nombre composé de grandeur quelconque. Exemples simples*, L'Enseign. math. **21** (1920), 212–213

[4] H. Karcher, *Analysis mit gleichmäßigen Fehlerschranken*, `http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/MatheI_WS/ShellSkript.pdf`

[5] H. Karcher, *Argumente der Analysis II*, `http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/MatheII_SS/AnalysisII.pdf`

[6] F. Lemmermeyer, M. Mattmüller (Hrsg.), *Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach*, Springer-Verlag 2015

[7] F. Lemmermeyer, *Composite values of irreducible polynomials*, Elemente der Mathematik, erscheint

[8] Qun Lin, *Free calculus - a liberation from concepts and proofs*, World Scientific 2008

[9] M. Range, *What is calculus? From simple algebra to deep analysis*, World Scientific 2016

[10] D. Remus, S. Walter, *Die Entkernung des Mathematikunterrichts*, Profil, Juli-August 2016, 10–21; `http://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2016/09/7_8_2016_Remus_Walcher.pdf`

[11] Th. Sonar, *Der langsame Tod der Analysis. Eine Begräbnisrede*, Mathematik-Information 57 (2012), 6–13

Franz Lemmermeyer, Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell
hb3@ix.urz.uni-heidelberg.de