HURWITZ UND DIE EULERSCHE IDENTITÄT

FRANZ LEMMERMEYER

Zusammenfassung. In diesem Artikel begeben wir uns auf eine Reise von der schulischen Vektorgeometrie über Linienkoordinaten zur Komposition quadratischer Formen. Bindeglied ist die heute kaum noch bekannte Plückerrelation, die im Hurwitzschen Beweis der Produktformel für Summen von vier Quadraten ebenso auftaucht wie in der elementaren Geometrie des Raums und der Gaußschen Komposition binärer quadratischer Formen.

In ihrem Beitrag [14] präsentiert Nicola Oswald den folgenden Zugang zum Eulerschen Produktsatz für Summen von vier Quadraten, den Hurwitz am Abend des 28. August 1896 im Bett gefunden hat. Hurwitz geht aus vom Fall $n = 4$ der Lagrangeschen Identität

$$\sum_{1 \le i < k \le n} (x_i y_k - x_k y_i)^2 = ||x||^2 ||y||^2 - (x \cdot y)^2$$

für Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ und dem Standard-Skalarprodukt $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$; führt man hier die Bezeichnungen $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ ein, so schreibt sich dieser Spezialfall in der Form

$$p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = (x_1^2 + \ldots + x_4^2)(y_1^2 + \ldots + y_4^2) - (x_1 y_1 + \ldots + x_4 y_4)^2.$$

Oswald bemerkt, dass Hurwitz „unmittelbar aus der Definition“ folgert, dass

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 \tag{1}$$

ist. Addiert man das Doppelte dieser Gleichung zur Identität von Lagrange, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(p_{12} + p_{34})^2 &+ (p_{13} + p_{42})^2 + (p_{14} + p_{23})^2 \\ &= (x_1^2 + \ldots + x_4^2)(y_1^2 + \ldots + y_4^2) - (x_1 y_1 + \ldots + x_4 y_4)^2,\end{aligned}$$

also die Eulersche Produktformel

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) &= (x_1 y_1 + x_2 x_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)^2 \\ &+ (p_{12} + p_{34})^2 + (p_{13} + p_{42})^2 + (p_{14} + p_{23})^2.\end{aligned}$$

Für einen direkten Beweis der Gleichung (1) betrachten wir die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} .$$

Diese hat offenbar Determinante 0; entwickelt man nach den 2×2-Minoren, erhält man nach Laplace

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{smallmatrix}\right| \\ &\quad + \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right| \\ &= 2\Big(\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{smallmatrix}\right| \cdot \left|\begin{smallmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{smallmatrix}\right|\Big) \\ &= 2(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}). \end{aligned}$$

Wegen $p_{24} = -p_{42}$ ist dies die von Hurwitz angeführte Identität.

Unklar bleibt in [14], wie Hurwitz diese Identität (1) im Bett gefunden haben kann, und warum er die Größen p_{ik} „Linienkoordinaten“ nennt. Dies möchte ich im Folgenden erklären.

Im ersten Teil behandle ich auf wenigen Seiten den Schulstoff der vektoriellen Geometrie im $\mathbb{R}^3$; § 2 ist der Plückerform der Geradengleichung gewidmet, und in § 3 führe ich den den Begriff der Linienkoordinaten ein. Im letzten Teil gehe ich auf die Plückerrelation im Zusammenhang mit der Komposition binärer quadratischer Formen ein.

1. Etwas Schulmathematik

Die Vektorgeometrie in der Schule beschränkt sich auf die Beschreibung von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ unter Benutzung von Skalar- und Kreuzprodukten. wir wollen auf den folgenden drei Seiten zeigen, wie man die wesentlichen Inhalte knapp und bündig herleiten kann.

Wir definieren das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ durch $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ und bemerken, dass damit $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$ ist. Am rechtwinkligen Dreieck liest man ohne Probleme ab, dass genau dann $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gilt, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist (der Nullvektor steht damit senkrecht af alle Vektoren).

Um einen Vektor $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$ zu finden, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, hat man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_1c_1 & + & a_2c_2 & + & a_3c_3 & = & 0 \\ b_1c_1 & + & b_2c_2 & + & b_3c_3 & = & 0 \end{array}$$

zu lösen. Eliminiert man c_3, so folgt

$$(a_1b_3 - a_3b_1)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 = 0.$$

Setzt man, um Brüche zu vermeiden, $c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$, so folgt $c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$ und $c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$. Mit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2b_3 - a_3b_2 \end{smallmatrix}\right)$$

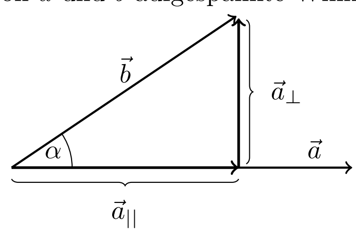
rechnet man nach, dass $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ist. Weiter hat man natürlich $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ zu beachten.

Bei der Herleitung der etwas tiefer liegenden Beziehungen verwende ich konsequent die Multiplikation von Gleichungen mit Vektoren. Ich möchte zuerst das an einem ganz einfachen Beispiel vorführen:

Satz 1. *Der Winkel*[1] α*, der von zwei Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aufgesapnnt wird, ist gegeben durch*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Gegeben sind zwei Vektoren linear unabhängige $\vec{a}$ und $\vec{b}$; wir schreiben $\vec{b}$ als Summe eines zu $\vec{a}$ parallelen Vektors $\vec{a}_{||}$ und eines zu $\vec{a}$ senkrechten Vektors $\vec{a}_\perp$. Dabei ist $\vec{a}_{||} = r\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$. Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem r positiv und damit der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Winkel spitz ist:



Die Gleichung $\vec{b} = r\vec{a} + \vec{a}_\perp$ multiplizieren wir jetzt skalar mit $\vec{a}$. Wegen $\vec{a}\cdot\vec{a}_\perp = 0$ erhalten wir

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = r\vec{a}\cdot\vec{a} = r|\vec{a}|^2.$$

Für den Winkel α gilt daher die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{r|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{r|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

wie behauptet. Den Fall eines stumpfen Winkels behandelt man analog.

Wendet man Satz 1 auf ein rechtwinkliges Dreieck an, bekommt man den Kosinussatz geschenkt:

Korollar 1. *In einem von zwei Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aufgespannten Dreieck mit den Seitenlängen* $a = |\vec{a}|$*,* $b = |\vec{b}|$ *und* c *gilt, wenn* α *den von* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aufgesapnnten Winkel bezeichnet, die Gleichung*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Mit $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ erhält man

$$c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

wie behauptet.

Für das Kreuzprodukt gilt eine zu $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ analoge Gleichung, die man ohne große Mühe aus der Lagrange-Identität erhält:

Satz 2. *Für Vektoren im* $\mathbb{R}^3$ *gilt die Lagrange-Identität*

$$|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 = (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2.$$

Daraus folgt

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\alpha|;$$

insbesondere ist $|\vec{a}\times\vec{b}|$ *gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aufgespannten Dreiecks.*

[1] Wie immer bemüht sich die Schulmathematik genau an den Stellen um sprachliche Genauigkeit, wo es nichts bringt; ich werde daher nicht von der „Größe der Weite des Winkels α“ sprechen.

Setzt man $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, so lautet die Lagrange-Identität

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &\quad + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.\end{aligned}$$

Diese kann man einfach nachrechnen. Die Aussage über $|\vec{a} \times \vec{b}|$ folgt dann aus Satz 1 und dem trigonometrischen Satz von Pythagoras $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ebenen. Ist eine Ebenengleichung $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$ gegeben, so liefert die skalare Multiplikation mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ die Normalengleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$. Umgekehrt kann man zeigen, dass jeder Vektor $\vec{x}$, der dieser Gleichung genügt, auch die Ausgangsgleichung erfüllt. Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{n}$ sind nämlich linear unabhängig: aus $r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{n} = 0$ folgt durch skalare Multiplikation mit $\vec{n}$ sofort $t = 0$, und weil $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ohnehin linear unabhängig sind, folgt die Behauptung.

Schreibt man jetzt $\vec{x} - \vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{n}$ und setzt dies in die Normalengleichung ein, so folgt

$$0 = (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{n}) \cdot \vec{n} = t \cdot |\vec{n}|^2,$$

also $t = 0$ und damit $\vec{x} - \vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v}$ wie behauptet.

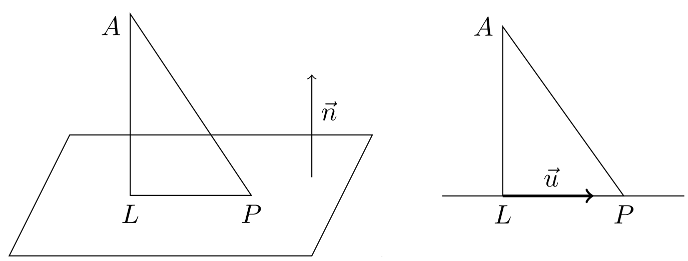


Abbildung 1. Abstand eines Punkts A zu einer Ebene (links) bzw. einer Geraden (rechts)

Ist ein Punkt A mit Ortsvektor $\vec{a}$ gegeben und ist L sein Lotfußpunkt auf E, kann man den Abstand d von A zu E wie folgt bestimmen. Sei $\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ der Einheitsnormalenvektor zu $\vec{n}$ und das Vorzeichen so gewählt, dass $\overrightarrow{LA} = d\vec{n}_0$ für den (positiven) Abstand d gilt. Aus der Vektorkette

$$0 = \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PL} + d\vec{n}_0 + \vec{p} - \vec{a}$$

folgt durch skalare Multiplikation mit $\vec{n}_0$

$$0 = \overrightarrow{PL} \cdot \vec{n}_0 + d|\vec{n}_0|^2 + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = d + (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0.$$

Daraus folgt

$$d = (\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0.$$

Dies ist die Hessesche Abstandsformel:

Satz 3. *Ist eine Ebenengleichung $E : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$ gegeben, erhält man die Normalenform der Ebenengleichung durch skalare Multiplikation dieser Gleichung mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Ersetzt man $\vec{n}$ durch den Einheitsvektor $\vec{n}_0$, erhält man die Hessesche Normalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$. Den Abstand d eines Punkts A zu E erhält man, indem man in diese Normalenform den Ortsvektor $\vec{a}$ von A einsetzt: $d = |(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$.*

Abstand windschiefer Geraden. Sind $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ zwei windschiefe Geraden, und sind A und B Punkte auf g und h so, dass AB das gemeinsame Lot auf beide Geraden ist, dann betrachten wir die Vektorkette $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} = 0$. Hierbei ist $\overrightarrow{AB} = d\vec{n}_0$, wo $|d|$ den gesuchten Abstand der beiden Geraden bezeichnet und $\vec{n}_0$ der Einheitsvektor des Normalenvektors $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist. Skalare Multiplikation mit $\vec{n}_0$ liefert wegen $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$ und $\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{BQ} \cdot \vec{n}_0 = 0$ die Gleichung $d = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_0 = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$.

Satz 4. *Sind die beiden Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ windschief, dann ist ihr Abstand d gegeben durch*

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

wo $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist.

Lineare Gleichungssysteme. Wir bemerken nebenbei, dass sich mit Hilfe des Kreuzprodukts auch lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten lösen lassen, wenn die Lösung eindeutig ist. Dazu schreibt man

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & a_3x_3 & = & a \\ b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & = & b \\ c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & = & b \end{array}$$

in der Form

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und multipliziert die letzte Gleichung skalar mit $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$, um x_1 zu erhalten. Im Wesentlichen steckt dahinter die Cramersche Regel nebst der Beobachtung

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right).$$

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass man sofort nach der Multiplikation mit $\vec{n}$ sieht, ob man sich verrechnet hat.

Ist die Lösungsmenge dagegen eine Gerade, so erhält man deren Richtungsvektor als $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, weil dieser in beiden Ebenen liegen muss und folglich auf beide Normalenvektoren senkrecht steht. Eine partikuläre Lösung findet man schnell, wenn man etwa eine der Koordinaten gleich 0 setzt.

2. Die Plückerform der Geradengleichung

Auch in diesem Abschnitt geht es um die in der schulischen Vektorgeometrie behandelten Objekte, die wir aber mit Mitteln untersuchen, die heute kaum mehr bekannt sind. Zu Beginn verschaffen wir uns einige Identitäten, von denen wir weiter unten Gebrauch machen werden.

Die Identität von Lagrange ist ein Spezialfall ($\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b}$) der allgemeineren Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \tag{2}$$

Wenn man sich von den Gleichungen

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{3}$$

(dies lässt sich leicht nachrechnen; dahinter steckt die geometrische Aussage, dass $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ das orientierte Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats ist – das folgt leicht aus dem, was wir in Satz 1 und Satz 2 bewiesen haben) und

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{4}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{5}$$

überzeugt hat, kann man (2) ohne Probleme nachrechnen, indem man $\vec{u} = \vec{c}\times\vec{d}$ setzt:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{u} &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{u}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})) = \vec{a}\cdot(\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c}))\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Eine zur Hesseschen Abstandsformel analoge Formel erhält man für den Abstand eines Punkts zu einer Geraden, wenn man die weniger bekannte Plückersche Geradenform benutzt. Sind P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^3$, so legen sie eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ mit $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$ fest. Daraus folgt

$$\vec{x}\times\vec{u} = \vec{p}\times\vec{u} = \vec{p}\times(\vec{q}-\vec{p}) = \vec{p}\times\vec{q}.$$

Hier haben wir benutzt, dass $\vec{p}\times\vec{p} = 0$ ist.

Jeder Punkt auf der Geraden mit Ortsvektor $\vec{x}$ genügt der Gleichung $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{p}\times\vec{q}$. Umgekehrt ist aber jeder Punkt, welcher dieser Gleichung genügt, ein Punkt auf der Geraden g. Dies kann man so einsehen: aus $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{p}\times\vec{u}$ folgt $(\vec{x}-\vec{p})\times\vec{u} = 0$; also ist $\vec{x}-\vec{p}$ ein Vielfaches von $\vec{u}$, etwa $\vec{x}-\vec{p} = t\cdot\vec{u}$, und das war zu zeigen.

Es handelt sich bei $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{m}$ mit $\vec{m} = \vec{p}\times\vec{q}$ also um eine Geradengleichung; diese Form ist nach Julius Plücker benannt.

Um den Abstand eines Punktes A von der Geraden zu bestimmen (Abb. 1 rechts), bezeichnen wir den Lotfußpunkt von A auf g mit L und benutzen die Vektorkette

$$0 = \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AP}.$$

Vektormultiplikation mit $\vec{u}_0$ liefert wegen $\overrightarrow{PL}\times\vec{u} = 0$

$$0 = \overrightarrow{LA}\times\vec{u}_0 + (\vec{p}-\vec{a})\times\vec{u}_0.$$

Nun ist

$$|\overrightarrow{LA}\times\vec{u}_0| = |\overrightarrow{LA}|\cdot|\vec{u}_0| = |\overrightarrow{LA}|,$$

denn die beiden Vektoren $\overrightarrow{LA}$ und $\vec{u}_0$ sind orthogonal. Also folgt

$$d = |\overrightarrow{LA}| = |(\vec{a}-\vec{p})\times\vec{u}_0|.$$

Damit haben wir

Satz 5. *Aus der Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ einer Geraden g erhält man die Plückerform durch Vektormultiplikation mit $\vec{u}$ zu $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{p}\times\vec{u}$.*

Ersetzt man $\vec{u}$ durch den Einheitsvektor $\vec{u}_0$, erhält man die Plückersche Normalenform $(\vec{x}-\vec{p})\times\vec{u}_0 = 0$. Den Abstand d eines Punkts A zu g erhält man, indem man in diese Normalenform den Ortsvektor $\vec{a}$ von A einsetzt: $d = |(\vec{a}-\vec{p})\times\vec{u}_0|$.

Wir bemerken noch, dass die Plückerform einer Geradengleichung eine Gleichung zwischen Vektoren ist, also aus drei gewöhnlichen Gleichungen besteht. Jede einzelne dieser Gleichungen beschreibt eine (möglicherweise degenerierte) Gerade in einer der drei Koordinatenebenen.

In der Tat: Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ schreibt sich die Plückerform der Geraden g als

$$0 = (\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} u_3x_2 & - & u_2x_3 & = & u_3p_2 - u_2p_3 \\ u_1x_3 & - & u_3x_1 & = & u_1p_3 - u_3p_1 \\ u_2x_1 & - & u_1x_2 & = & u_2p_1 - u_1p_2. \end{array} \tag{6}$$

Wir können diese Gleichungen als Geradengleichungen in den Koordinatenebenen auffassen. Man erhält die senkrecht in die x_1x_2-Ebene projizierte Gerade g_{12} aus g, indem man die x_3-Koordinate vergisst:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & p_1 & + & tu_1 \\ x_2 & = & p_2 & + & tu_2 \end{array}$$

Elimination von t ergibt dann die Geradengleichung $u_2x_1 - u_1x_2 = u_2p_1 - u_1p_2$ in der x_1x_2-Ebene.

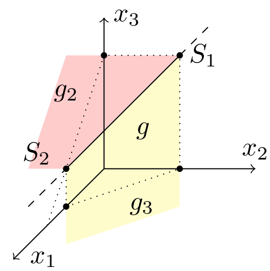


Abbildung 2. Gerade g mit Spurpunkten $S_1(0|1|1.5)$ und $S_2(1|0|0.5)$, der in die x_1x_2- bzw. x_1x_3-Ebenen projizierten Geraden g_3 und g_2, sowie die entsprechenden Ebenen E_3 (gelb) und E_2 (rot) mit Schnittgerade g.

Alternativ können wir die drei Gleichungen als Ebenengleichungen auffassen. Ergänzt man die Gerade g, falls sie nicht zur x_3-Achse parallel ist, durch E_3 : $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{e}_3$ mit $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Ebene E_3, dann findet man als deren Normalenvektor $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und als Ebenengleichung die dritte Gleichung in (6), nämlich $E_3 : u_2x_1 - u_1x_2 = u_2p_1 - u_1p_2$. Diese Ebene E_3 enthält g und ist parallel zur x_3-Achse. Damit haben wir

Satz 6. *Die drei Gleichungen der Plückerform einer Geradengleichung beschreiben die drei Geraden in den Koordinatenebenen, welche durch senkrechte Projektion aus g entstehen.*

Alternativ beschreiben diese Gleichungen drei Ebenen, welche parallel zur x_1-, x_2- bzw. x_3-Achse sind und die Gerade g als gemeinsame Gerade enthalten.

Grundaufgaben. Will man mit der Plückerform rechnen, muss man die üblichen Grundaufgaben lösen können.

Umwandeln in Parameterform. Es genügt, die Schnittgerade der drei Ebenen zu berechnen, deren Gleichungen (1) in der Plückerform enthalten sind. Weil der Richtungsvektor der Geraden bereits bekannt ist, brauchen wir nur eine einzige Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems. Wir machen dies an einem Beispiel vor. Dazu sei eine Gerade $g : \vec{x} \times \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ in Plückerform gegeben. Ausrechnen des Kreuzprodukts liefert

$$\left(\begin{smallmatrix} -x_2-2x_3 \\ x_3+x_1 \\ 2x_1-x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Setzt man $x_3 = 0$, erhält man $x_2 = -2$ und $x_1 = -3$. Damit ist $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein Stützvektor der Geraden, und in der Tat ist $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Punktprobe. Ein Punkt A liegt genau dann auf der Geraden $g : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$, wenn $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{m}$ ist. Dies ist klar; aus $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$ und $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{m}$ folgt $(\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{u} = 0$, also ist $\vec{x} - \vec{a} = t\vec{u}$ und folglich A auf der Geraden g.

Lage Gerade-Ebene. Eine Gerade $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{m}$ liegt genau dann in der Ebene $\vec{x}\cdot\vec{n} = d$, wenn $\vec{m} \times \vec{n} = d\vec{u}$ und $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ist.

In der Tat: Damit eine Gerade in der Ebene E liegt, muss der Richtungsvektor senkrecht auf $\vec{n}$ stehen, also $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sein. Weiter muss die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ für jeden Punkt der Geraden gelten.

Bilden wir das Kreuzprodukt von $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$ mit $\vec{n}$, so folgt nach (4)

$$\vec{m} \times \vec{n} = (\vec{x} \times \vec{u}) \times \vec{n} = (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{u} = d\vec{u}$$

wie behauptet.

Sind umgekehrt diese Gleichungen erfüllt, so ist die Gerade wegen $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ parallel zur Ebene; zu zeigen ist, dass ein Punkt auf der Geraden (also mit $\vec{p}\times\vec{u} = \vec{m}$) auch auf der Ebene liegt (also $\vec{p} \cdot \vec{n} = d$ gilt). Dies folgt aber aus

$$d\vec{u} = \vec{m} \times \vec{n} = (\vec{p} \times \vec{u}) \times \vec{n} = \vec{n} \times (\vec{u} \times \vec{p}) = (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{p})\vec{n}$$

Nun sind $\vec{u}$ und $\vec{n}$ orthogonal und $\neq 0$, also linear unabhängig; folglich muss $\vec{u}\cdot\vec{p} = 0$ und $\vec{p} \cdot \vec{n} = d$ sein. Das war zu zeigen.

Schnitt zweier Geraden. Zwei Geraden $\vec{x} \times \vec{u}_1 = \vec{m}_1$ und $\vec{x} \times \vec{u}_2 = \vec{m}_2$ liegen genau dann in einer Ebene, wenn $\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{m}_1 = 0$ gilt. Ist $\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2 \neq 0$, dann ist der Schnittpunkt gegeben durch $\vec{p} = \frac{\vec{m}_1\times\vec{m}_2}{\vec{m}_1\cdot\vec{u}_2} = \frac{\vec{m}_2\times\vec{m}_1}{\vec{m}_2\cdot\vec{u}_1}$.

Sind die Geraden parallel, liegen sie immer in einer Ebene; in diesem Fall düfren wir $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ wählen, und wegen $\vec{m}_1 = \vec{p}_1 \times \vec{u}_1$ und $\vec{m}_2 = \vec{p}_2 \times \vec{u}_1$ ist $\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{m}_1 = 0$.

Sind die Geraden nicht parallel und liegen sie in einer gemeinsamen Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$, dann können wir $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ wählen. Sei $\vec{p}$ der Ortsvektor des Schnittpunkts der beiden Geraden; dann gilt $\vec{p} \times \vec{u}_1 = \vec{m}_1$ und $\vec{p} \times \vec{u}_2 = \vec{m}_2$. Also folgt

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_2 + \vec{m}_2 \cdot \vec{u}_1 = (\vec{p} \times \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 + (\vec{p} \times \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 = \vec{p} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) - \vec{p} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0.$$

Für den Schnittpunkt gilt $\vec{p} \times \vec{u}_1 = \vec{m}_1$ und $\vec{p} \times \vec{u}_2 = \vec{m}_2$. Also ist

$$\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = (\vec{p} \times \vec{u}_1) \times \vec{m}_2 = \vec{u}_2(\vec{p} \cdot \vec{m}_2) - \vec{p}(\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2) = -\vec{p}(\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2).$$

Auflösen nach $\vec{p}$ ergibt die Behauptung.

Schnittpunkt Gerade-Ebene. Der Schnittpunkt einer Geraden $g : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$ und einer zu g nicht parallelen Ebene $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ ist gegeben durch

$$\vec{x} = \frac{d\vec{u} + \vec{n} \times \vec{m}}{\vec{n} \cdot \vec{u}}.$$

Der Ortsvektor $\vec{x}$ des Schnittpunkts erfüllt $\vec{x} \cdot \vec{n} = d$ und $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$; Vektormultiplikation der Geradengleichung mit $\vec{n}$ ergibt

$$\vec{m} \times \vec{n} = (\vec{x} \times \vec{u}) \times \vec{n} = (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{u} - (\vec{n} \cdot \vec{u})\vec{x} = d\vec{u}(\vec{n} \cdot \vec{u})\vec{x}.$$

Auflösen nach $\vec{x}$ liefert das Ergebnis.

Schnittgerade von Ebenen. Die Schnittgerade g zweier Ebenen $E_1 : \vec{x} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ und $E_2 : \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ ist gegeben durch $g : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{m}$ mit $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ und $\vec{m} = d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2$.

Weil die Schnittgerade in beiden Ebenen liegt, müssen die Gleichungen $\vec{m} \times \vec{n}_1 = d_1\vec{u}$ und $\vec{m} \times \vec{n}_2 = d_2\vec{u}$ gelten. Elimination von $\vec{u}$ liefert $d_2\vec{m} \times \vec{n}_1 - d_1\vec{m} \times \vec{n}_2 = 0$, also $\vec{m} \times (d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2) = 0$. Also muss $d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2$ ein Vielfaches von $\vec{m}$ sein, etwa $d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2 = t\vec{m}$. Damit folgt

$$t\vec{m} \times \vec{n}_1 = (d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2) \times \vec{n}_1 = d_1\vec{n}_1 \times \vec{n}_2;$$

andererseits ist $\vec{m} \times \vec{n}_1 = d_1\vec{u}$. Also muss $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = t\vec{u}$ sein.

Damit haben wir $t\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ und $t\vec{m} = d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2$. Weil es auf skalare Vielfache nicht ankommt, können wir also einfach $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ und $\vec{m} = d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2$ setzen.

Abstand windschiefer Geraden. Der Abstand der beiden Geraden $\vec{x} \times \vec{u}_1 = \vec{m}_1$ und $\vec{x} \times \vec{u}_2 = \vec{m}_2$ ist gegeben durch

$$d = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{m}_1|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}.$$

Dies rechnen wir einfach nach: Bezeichnen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ Punkte auf den beiden Geraden, ist also $\vec{p}_1 \times \vec{u}_1 = \vec{m}_1$ und $\vec{p}_2 \times \vec{u}_2 = \vec{m}_2$, und setzen wir $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, so folgt

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{m}_1 &= \vec{u}_1 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{u}_2) + \vec{u}_2 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{u}_1) = -\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{p}_2) - \vec{u}_2 \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{p}_1) \\
&= -(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{p}_2 - (\vec{u}_2 \times \vec{u}_1) \cdot \vec{p}_1 = (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{p}_1 - (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{p}_2 \\
&= (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{n}.
\end{aligned}$$

Nach Division durch $|\vec{n}|$ folgt die Behauptung aus Satz 4.

3. Linienkoordinaten

Nachdem wir uns von der Nützlichkeit der Plückerform einer Geraden überzeugt haben, kommen wir nun zu Linienkoordinaten; diese heißen bisweilen auch Plücker-Koordinaten und spielen bei der Beschreibung von Graßmann-Mannigfaltigkeiten eine große Rolle. In diesem Abschnitt setzen wir eine Vertrautheit mit den Grundtatsachen projektiver Räume und homogener Koordinaten voraus (eigentlich reicht die Definition des reellen projektiven Raums auf wikipedia).

Gegeben seien die beiden Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ und $Q(y_1, y_2, y_3)$; sind diese verschieden, dann legen sie eine Gerade fest, und man nennt $\vec{u} = \vec{p} - \vec{q} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \end{pmatrix}$ einen Richtungsvektor und $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{q}$ das Moment der Geraden g durch P und Q.

Man rechnet leicht nach, dass die Wahl anderer Punkte auf g der Multiplikation von $\vec{u}$ und $\vec{m}$ mit einem Skalar entspricht. Ersetzt man etwa $\vec{q}$ durch $\vec{q'} = \vec{q} + t(\vec{p} - \vec{q})$, so folgt

$$\begin{aligned} \vec{p} - \vec{q'} &= \vec{p} - \vec{q} - t(\vec{p} - \vec{q}) = (1-t)(\vec{p} - \vec{q}), \\ \vec{p} \times \vec{q'} &= \vec{p} \times [\vec{q} + t(\vec{p} - \vec{q})] = \vec{p} \times \vec{q} - t\vec{p} \times \vec{q} = (1-t)\vec{p} \times \vec{q}. \end{aligned}$$

Diese Tatsache erlaubt es uns, die Koordinaten der beiden Größen $\vec{p} - \vec{q} = \left(\begin{smallmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{p} \times \vec{q} = \left(\begin{smallmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p_{23} \\ p_{31} \\ p_{12} \end{smallmatrix}\right)$ als einen wohldefinierten Punkt

$$G = [p_1 - q_1 : p_2 - q_2 : p_3 - q_3 : p_{23} : p_{31} : p_{12}] \in \mathbb{PR}^5$$

aufzuffassen. Betten wir den $\mathbb{R}^3$ durch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : 1]$ in den $\mathbb{PR}^3$ ein und homogenisieren, dann schreibt sich G in der Form

$$G = [p_{14} : p_{24} : p_{34} : p_{23} : p_{31} : p_{12}] \in \mathbb{PR}^5.$$

Jede Gerade in $\mathbb{PR}^3$ entspricht damit einem Punkt $G \in \mathbb{PR}^5$; allerdings entspricht nicht jedem solchen Punkt eine Gerade im $\mathbb{PR}^3$. Dies liegt daran, dass für die Plücker-Koordinaten $\vec{p} - \vec{q}$ und $\vec{p} \times \vec{q}$ die Beziehung

$$(\vec{p} - \vec{q}) \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) - \vec{q} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

gelten muss. Daher genügen die Koordinaten jedes Punktes G, der von einer Geraden herkommt, der Plückerrelation

$$p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} + p_{34}p_{12} = 0.$$

Die Plücker-Matrix. Sind $P = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ und $Q = [y_1 : y_2 : y_3 : y_4]$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{PR}^3$, so nennt man die schiefsymmetrische Matrix

$$L = PQ^T - P^TQ = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ p_{12} & 0 & -p_{23} & -p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & -p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

mit $p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$ die Plücker-Matrix zu P und Q. Diese beschreibt die Gerade durch P und Q, weil ihre Einträge die Plücker-Koordinaten dieser Gerade sind.

Dual dazu beschreibt ein Punkt $E = [n_1 : n_2 : n_3 : d]^T$ eine Ebene $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{smallmatrix}\right)$ im $\mathbb{R}^3$. Man rechnet leicht nach, dass das Produkt $X = L \cdot E$ den Schnittpunkt der Geraden L und der Ebene E liefert, falls L und E nicht parallel sind.

Eine Gerade L kann man als Schnittgerade zweier Ebenen auffassen. Diese wird dann von der zu L dualen Matrix $\widetilde{L}$ beschrieben, wo

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & p_{34} & p_{24} & p_{23} \\ p_{34} & 0 & p_{14} & -p_{13} \\ p_{24} & -p_{14} & 0 & p_{12} \\ -p_{23} & p_{13} & -p_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Man rechnet dann nach, dass

$$\widetilde{L}L = (p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})E$$

ist, nach der Plücker-Relation also $\widetilde{L}L = 0$.

Plücker-Matrizen sind eine andere Möglichkeit, die 6 Plücker-Koordinaten p_{ij} in ein mathematisches Objekt zu verpacken. Für das, was wir hier über Geometrie gesagt haben, spielen sie keine große Rolle. Wir werden aber am Ende des Abschnitts über die Komposition quadratischer Formen auf die Plücker-Matrizen zurückkommen.

Der Hurwitzsche Beweis. Was den „im Bett gefundenen" Beweis von Hurwitz angeht, ist klar, dass jemand, der Plückers Theorie der Linienkoordinaten kennt, nur einzusehen brauchte, dass sich bei Addition der Plückerrelation zur Lagrangeschen Identität der Eulersche Satz über Produkte von Summen von vier Quadraten ergeben *muss.*

Für einen Zahlentheoretiker wie Hurwitz gab es neben der Theorie der Linienkoordinaten noch einen weiteren Grund, die Plückerrelation gesehen zu haben, nämlich die Gaußsche Komposition binärer quadratischer Formen.

4. Komposition quadratischer Formen

Die Plückerrelation spielt eine zentrale Rolle bei der Komposition binärer quadratischer Formen. Darunter verstehen wir homogene Formen zweiten Grades in zwei Variablen $Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$; bei Gauß war der mittlere Koeffizient B immer gerade, was beim direkten Vergleich unserer Formeln mit den Gaußschen berücksichtigt werden muss. Auf diesen Formen operiert die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Matrizen S mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1 wie folgt: ist $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so setzen wir

$$Q|_S = Q' \quad \text{mit} \quad Q' = (A', B', C') = Q(ax+by, cx+dy).$$

Damit ist $Q|_{ST} = (Q|_S)|_T$; weiter rechnet man leicht nach, dass die Diskriminante Δ unter S invariant ist, dass also $\Delta = B^2 - 4AC = {B'}^2 - 4A'C'$ gilt. Man nennt zwei Formen Q und Q' derselben Diskriminante äquivalent, wenn es ein $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $Q' = Q|_S$. Zu den fundamentalen Einsichten von Gauß gehören die folgenden:

- Äquivalente Formen stellen dieselben Primzahlen dar;
- Die Anzahl der Äquivalenzklassen von Formen der Diskriminante Δ ist endlich; für die Diskriminante $\Delta = -4$ beispielsweise existiert nur eine Klasse, die von $Q(x,y) = x^2 + y^2$ repräsentiert wird.
- Die Äquivalenzklassen primitiver Formen (das sind Formen (A,B,C) mit $\mathrm{ggT}(A,B,C) = 1$) bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition.

Die beiden ersten Aussagen gehen im wesentlichen auf Lagrange zurück. Die dritte Aussage gehört zu den ganz großen Ideen der Gaußschen Disquisitiones; wir wollen hier erklären, wie sich zwei Formen komponieren lassen – den Nachweis, dass dies eine Gruppenoperation liefert, werden wir aber schuldig bleiben.

Die einfachste Komposition zweier quadratischer Formen ist die Produktformel für die Summen zweier Quadrate:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

Etwas weniger offensichtlich ist die Lage bei Formen der Diskriminante -20; hier gibt es zwei Äquivalenzklassen von formen, die von $Q_0(x,y) = x^2 + 5y^2$ und $Q_1(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ repräsentiert werden. Hier hat Fermat beobachtet, dass Primzahlen der Form $p \equiv 3, 7 \bmod 20$ nicht von Q_0 dargestellt werden, ein Produkt zweier solcher Primzahlen dagegen schon: So ist etwa $3 \cdot 7 = 21 = 1^2 + 5 \cdot 2^2$. Euler und Lagrange haben diese Beobachtung dadurch erklärt, dass solche Primzahlen von Q_1 dargestellt werden (es gilt beispielsweise $3 = Q_1(0,1)$ und $7 = Q_1(1,1)$) und dass

$$Q_1(x_1, y_1) \cdot Q_1(x_2, y_2) = Q_0(x_3, y_3)$$

ist mit

$$x_3 = 2x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + 3y_1y_2, \quad y_3 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Legendre [10] hat bemerkt, dass sich etwas Ähnliches bei beliebigen Formen derselben Diskriminante durchführen lässt. Beispielsweise betrachtete er die Form $Q = (5, 6, 10)$ der Diskriminante -164 (damals sprach man noch von der Determinante 41) und bemerkte[2], dass sowohl

$$(5x_1^2 + 6x_1y_1 + 10y_1^2)(5x_2^2 + 6x_2y_2 + 10y_2^2) = X_1^2 + 41Y_1^2,$$

als auch

$$(5x_1^2 + 6x_1y_1 + 10y_1^2)(5x_2^2 + 6x_2y_2 + 10y_2^2) = 2X_2^2 + 2X_2Y_2 + 21Y_2^2$$

mit

$$\begin{aligned} X_1 &= 5x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10y_1y_2 & \qquad Y_1 &= x_1y_2 - x_2y_1, \\ X_2 &= -x_1x_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 4y_1y_2 & \qquad Y_2 &= x_1x_2 - 2y_1y_2 \end{aligned}$$

gilt. Legendre definierte damit eine zweiwertige Komposition von Äquivalenzklassen quadratischer Formen, sodass einerseits $[Q][Q] = [Q_0]$ mit $Q_0 = (1, 0, 41)$, andererseits auch $[Q][Q] = [Q_1]$ mit $Q_1 = (2, 2, 21)$ ist; die beiden Formen Q_0 und Q_1 repräsentieren verschiedene Äquivalenzklassen, weil Q_0 die 1 darstellt, Q_1 dagegen nicht.

In der Sekundärliteratur über die Komposition quadratischer Formen wird bisweilen der Eindruck erweckt, als habe die Zweiwertigkeit von Legendres Komposition etwas damit zu tun, dass dieser nicht Äquivalenzklassen bezüglich der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ betrachtet hat, sondern auch Substitutionen mit Determinante -1 zugelassen hat. Wie das obige Beispiel zeigt, ist das nicht richtig.

Vielmehr musste sich Gauß an einer anderen Stelle um die richtige Wahl der Vorzeichen kümmern. Ist nämlich

$$Q_1(x_1, y_1)Q_2(x_2, y_2) = Q_3(x_3, y_3)$$

mit

$$\begin{aligned} x_3 &= p_1x_1x_2 + p_2x_1y_2 + p_3y_1x_2 + p_4y_1y_2, \\ y_3 &= q_1x_1x_2 + q_2x_1y_2 + q_3y_1x_2 + q_4y_1y_2, \end{aligned}$$

so betrachtet Gauß (ohne die später eingeführte Sprache der Matrizen und Determinanten) in Artikel 235 die 2×4-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$

und ihre Unterdeterminanten

$$\begin{array}{lllllllll} P & = & p_1q_2 - p_2q_1 & Q & = & p_1q_3 - p_3q_1 & R & = & p_1q_4 - p_4q_1 \\ S & = & p_2q_3 - p_3q_2 & T & = & p_2q_4 - p_4q_2 & U & = & p_3q_4 - p_4q_3. \end{array}$$

[2]Ich habe mir die Freiheit genommen, manche Kleinigkeiten abzuändern, um die Darstellung möglichst einfach zu halten.

Im Falle des ersten Beispiels von Legendre ist etwa

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Unterdeterminanten sind

$$P = 5, \quad Q = -5, \quad R = 0, \quad S = -6, \quad T = -10, \quad U = 10.$$

Gauß rechnet allgemein nach, dass es ganze Zahlen $n, n' \in \{-1, +1\}$ gibt[3] mit

$$\begin{array}{rcl} P & = & A_1 n', \quad R - S \;=\; B_1 n', \quad U \;= C_1 n', \\ Q & = & A_2 n, \quad R + S \;=\; B_2 n, \quad T \;= C_2 n, \end{array} \tag{7}$$

wo $Q_1 = (A_1, B_1, C_1)$ und $Q_2 = (A_2, B_2, C_2)$ die beiden Ausgangsformen sind. In obigem Beispiel ist also $n' = 1$ und $n = -1$.

Gauß nennt die Form Q_3 aus Q_1 und Q_2 direkt komponiert, wenn $n = n' = 1$ ist. Die Form Q_3 erhält man aus M durch

$$A_3 = q_2 q_3 - q_1 q_4, \quad B_3 = p_1 q_4 + q_1 p_4 - p_2 q_3 - p_3 q_2, \quad C_3 = p_2 p_3 - p_1 p_4. \tag{8}$$

Im zweiten Beispiel von Legendre ist

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und eine kleine Rechnung zeigt, dass dies eine direkte Komposition ist (also $n = n' = 1$ gilt) und damit $[(5, 6, 10)] \cdot [(5, 6, 10)] = [(2, 2, 21)]$ ist.

Dann zeigt Gauß, dass die Äquivalenzklassen der primitiven Formen (solche, deren Koeffizienten keinen gemeinsamen Teiler > 1 besitzen) mit Diskriminante Δ eine Gruppe bilden; das neutrale Element der Klassengruppe wird dabei von $(1, 0, \frac{-\Delta}{4})$ bzw. von $(1, 1, \frac{1-\Delta}{4})$ repräsentiert, je nachdem $\Delta \equiv 0$ oder $\Delta \equiv 1 \bmod 4$ ist. Weiter ist mit $Q = (A, B, C)$ die zu $[Q]$ inverse Klasse repräsentiert durch $Q' = (A, -B, C)$.

Wenn man die „magische Matrix“ M vorliegen hat, ist das Nachrechnen, dass $[Q_1][Q_2] = [Q_3]$ ist, kein Problem. Anders sieht es aus, wenn nur Q_1 und Q_2 gegeben sind. Das große Problem bei der Komposition von Formen ist die Konstruktion dieser Matrix aus Q_1 und Q_2.

Seien also zwei quadratische Formen Q_1 und Q_2 derselben Diskriminante gegeben. Dann liefern die Gaußschen Gleichungen (7) mit $n = n' = 1$, also

$$\begin{array}{rcl} P & = & A_1, \quad R - S \;=\; B_1, \quad U \;= C_1, \\ Q & = & A_2, \quad R + S \;=\; B_2, \quad T \;= C_2, \end{array} \tag{9}$$

die Plückerschen Koordinaten P, Q, R, S, T und U, welche der Plücker-Relation $PU - QT + RS = 0$ genügen; diese ist nämlich, wie man sofort nachrechnet, gleichbedeutend damit, dass

$$B_1^2 - 4A_1 C_1 = B_2^2 - 4A_2 C_2$$

ist, dass also die beiden Formen Q_1 und Q_2 dieselbe Diskriminante besitzen.

Jetzt betrachtet Smith die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & P & Q & R \\ -P & 0 & S & T \\ -Q & -S & 0 & U \\ -R & -T & -U & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & U & -T & S \\ -U & 0 & R & -Q \\ T & -R & 0 & P \\ -S & Q & -P & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[3]Gauß betrachtet die Sache etwas allgemeiner als wir hier; bei ihm sind n und n' beliebige ganze Zahlen.

Die dazugehörigen Gleichungen stehen alle schon bei Gauß in Art. 236, wie man schnell erkennt, wenn man die Gaußschen an', …, cn' gemäß den Formeln in Art. 235 durch P, …, U ersetzt.

Die Plücker-Matrizen genügen der Relation $AB = BA = -(PU - QT + RS)E$, wo E die 4×4-Einheitsmatrix bezeichnet. Weil die Formen Q_1 und Q_2 dieselbe Diskriminante haben, ist $PU - QT + RS = 0$ und daher $AB = BA = 0$.

Gauß wählt nun einen Vektor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$ mit rationalen Koordinaten so, dass $A\vec{r} = \vec{q} = (q_1, \ldots, q_4)^T$ nicht der Nullvektor ist. Dann gibt es ein rationales Vielfaches von $\vec{q}$ derart, dass die q_j ganzzahlig und teilerfremd sind. Der euklidische Algorithmus verschafft Gauß dann ganze Zahlen s_j mit $q_1 s_1 + \ldots + q_4 s_4 = 1$. Jetzt setzt er $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_4)^T$ und schreibt $A\vec{s} = \vec{p}$ mit $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_4)^T$, und es bleibt zu zeigen, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte leistet. Nun ist aber

$$\begin{aligned} p_1 q_2 - p_2 q_1 &= (s_2 P + s_3 Q + s_4 R) q_2 + (s_1 P - s_3 S - s_4 T) q_1 \\ &= (s_1 q_1 + s_2 q_2 + s_3 q_3 + s_4 q_4) P \\ &\quad + s_3(-q_1 S + q_2 Q - q_3 P) + s_4(-q_1 T + q_2 R - q_4 P) \\ &= P. \end{aligned}$$

Hier haben wir folgende Beziehungen benutzt:

- $A\vec{s} = \vec{p}$;
- $s_1 q_1 + s_2 q_2 + s_3 q_3 + s_4 q_4 = 1$;
- $B\vec{q} = BA\vec{r} = 0$.

Die anderen Beziehungen rechnet man ebenso nach.

Natürlich muss man nun zeigen, dass alles wohldefiniert ist, dass die Komposition assoziativ ist, und dass die Komposition positiv definiter Formen wieder positiv definit ist; der Nachweis der Assoziativität ist hier, wie so oft, der unangenehmste Teil.

Wir beenden unsere Reise mit einem einfachen Beispiel. Gegeben seien die Formen $Q_1 = (2, 2, 21)$ und $Q_2 = (6, 2, 7)$ mit Diskriminante $\Delta = -164$. Die Plücker-Koordinaten, die sich aus diesen Formen ergeben, sind

$$\begin{array}{llll} P = A_1 = 2, & Q = A_2 = 6, & R = \frac{B_2 + B_1}{2} = 2, \\ S = \frac{B_2 - B_1}{2} = 0, & T = C_2 = 7, & U = C_1 = 21, \end{array}$$

die dazugehörigen Plücker-Matrizen daher

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 7 \\ -6 & 0 & 0 & 21 \\ -2 & -7 & -21 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 21 & -7 & 0 \\ -21 & 0 & 2 & -6 \\ 7 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -P2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{r} = (0, 1, 0, 0)^T$ erhält man dann $Q = A\vec{r} = (2, 0, 0, -7)^T$. Der euklidische Algorithmus versorgt uns mit einer Lösung $\vec{s}$ der Gleichung $2r_1 - 7r_4 = 1$, etwa $\vec{s} = (4, 0, 0, 1)^T$. Damit ist $A\vec{s} = (2, -1, -3, -8)^T$ und

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -8 \\ 2 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert

$$\begin{array}{rclrclrcl} P &=& M_{12}=2, & Q &=& M_{13}=6, & R &=& M_{14}=2 \\ S &=& M_{23}=0, & T &=& M_{24}=7, & U &=& M_{34}=21 \end{array}$$

wie verlangt. Aus (8) erhält man dann $A_3 = 19$, $B_3 = 30$, $C_3 = 14$ und damit die komponierte Form $Q_3(19, -30, 14)$. Reduktion dieser Form ergibt übrigens $(3, -2, 14)$.

5. Einige historische und literarische Bemerkungen

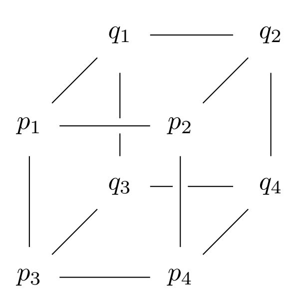
Linienkoordinaten. Die ersten Ideen zu seinen Linienkoordinaten hatte Plücker bereits 1830; sein Buch [16] über diese neue Geometrie ist aber erst nach seinem Tod zuerst von Clebsch und, nachdem dieser unerwartet früh gestorben war, von Klein herausgegeben worden. Auch Cayley [5] hat unabhängig von Plücker solche Linienkoordinaten betrachtet, seine ausführliche Arbeit [6] darüber aber erst nach Plückers Arbeit [15] aus dem Jahre 1865 veröffentlicht. Taton [23] hat darauf hingewiesen, dass die sechs Linienkoordinaten von Geraden bereits bei Gaspard Monge [13] auftauchen.

Eine sehr schöne Einführung in den Gedankenkreis von Julius Plücker mit modernen Methoden ist [18], das schon allein deswegen eine Pflichtlektüre sein sollte, weil es die von mir hochgeschätzten Artikelserien von Jim Blinn aufgreift (einer dieser Artikel, nämlich [2], befasst sich mit Linienkoordinaten und erklärt den Anfang von Cayleys Arbeit [6]). In der Robotik werden Linienkoordinaten auch heute noch gerne verwendet (siehe etwa [19] und [17, § 8.7]). Lösungen der Grundaufgaben für Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ findet man in der Vorlesung [22].

Cayleys Hyperdeterminanten und Bhargavas Würfel. Bei Gauß ist die Konstruktion der Matrix M auf eine fast undurchdringliche Art aufgeschrieben. Die Beschreibung der Gaußschen Komposition durch Smith [21, S. 235] (Mathews [12, § 138] hat diese Darstellung übernommen) ist viel klarer als das Gaußsche Original, was nicht zuletzt an den von Smith benutzten Plücker-Matrizen liegt. Für die Konstruktion der „magischen Matrix“ M gibt es verschiedene Methoden; in jüngerer Zeit hat sich Daniel Shanks damit beschäftigt (vgl. etwa [20] und [24]).

Die Plückerrelation $PU - QT + RS = 0$ steht nicht explizit in den Disquisitiones [7], aber Poullet-Deslisle weist in einer Fußnote seiner Übersetzung [8, S. 244] darauf hin.

Bei Gauß ließen sich zwar die Koeffizienten der Formen Q_1 und Q_2 aus Minoren der 2×4-Matrix M darstellen (Gleichung (9)), nicht aber diejenigen von Q_3. Diese Asymmetrie verschwindet, wenn man statt der 2×4-Matrix M die folgende $2\times 2\times 2$-Hypermatrix betrachtet:



Die drei quadratischen Formeln ergeben sich dann, indem man den Würfel auf drei Arten zerlegt (oben-unten, links-rechts und vorne-hinten):

$$\begin{array}{lll} OU & M_1 = O = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, & N_1 = U = \begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ p_4 & q_4 \end{pmatrix}, \\[2ex] LR & M_2 = L = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{pmatrix}, & N_2 = R = \begin{pmatrix} p_2 & p_4 \\ q_2 & q_4 \end{pmatrix}, \\[2ex] VH & M_3 = V = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, & N_3 = H = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Die drei Formen sind dann gegeben durch

$$Q_i(x,y) = -\det(M_i x + N_i y),$$

und die entsprechenden Formeln stimmen mit den Gaußschen überein. Die Größe

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) &= (p_1q_4 - p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)^2 - 4(p_2p_3 - p_1p_4)(q_2q_3 - q_1q_4) \\ &= (p_1q_4 - p_2q_3 - p_4q_1 + p_3q_2)^2 - 4(p_1q_2 - p_2q_1)(p_3q_4 - p_4q_3) \\ &= (p_1q_4 - p_3q_2 - p_4q_1 + p_2q_3)^2 - 4(p_1q_3 - p_3q_1)(p_2q_4 - p_4q_2). \end{aligned}$$

nennt Cayley die Hyperdeterminante der $2 \times 2 \times 2$-Hypermatrix.

Diese Darstellung der Formeln für die Gaußsche Komposition geht auf Cayley [3, 4] zurück (siehe [11, § 12.6]); sie wurden von Bhargava [1] wiederentdeckt und in ein größeres Gerüst von Kompositionen von Formen gestellt.

Man kann sich zum Schluss die Frage stellen, ob sich die geometrische Interpretation der Matrix M als Paar von Punkten (und damit als Gerade) im $\mathbb{PQ}^3$ für die Komposition nutzen lässt; dabei wäre natürlich die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf diesen Geraden zu untersuchen. In jedem Fall ist die Rolle, welche die Linienkoordinaten bei der Komposition quadratischer Formen spielen, ein Rätsel und dessen endgültige Klärung ein Desideratum.

Literatur

[1] M. Bhargava, *Higher composition laws. I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations*, Ann. Math. **159** (2004), 217–250

[2] J. Blinn, *A homogeneous formulation for lines in 3-space*, *Computer graphics* **11** (1977), 237–241

[3] A. Cayley, *Mémoire sur les hyperdéterminants*, J. Reine angew. Math. **30** (1846), 1–37

[4] A. Cayley, *Note sur un système de certaines formules*, J. Reine angew. Math. **39** (1850), 14–15

[5] A. Cayley, *On a new analytical representation of curves in space*, Quart. J. Pure Appl. Math. **3** (1890), 225–236

[6] A. Cayley, *On the six coordinates of a line*, Trans. Cambridge Phil. Soc. **11** (1869), 290–323

[7] C.-F. Gauß, *Disquisitiones Arithmeticae. Untersuchungen über höhere Arithmetik* (H. Maser, Hrsg.), Springer 1889

[8] C.-F. Gauß, *Recherches Arithmétiques*, Paris 1807

[9] F. Klein, *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form*, Math. Ann. **23** (1884), 539–578

[10] A.-M. Legendre, *Essais sur la théorie des nombres*, Paris 1798

[11] F. Lemmermeyer, *4000 Jahre Zahlentheorie. I. Von Babel bis Abel*, Springer 2023

[12] G.B. Mathews, *Theory of numbers*, Cambridge 1892

[13] G. Monge, *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure*, Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans & lu dans les Assemblées **10** (1785), 511–550

[14] N. Oswald, *„im Bett gefunden ... " – Ein einfacher Beweis der Eulerschen Vierquadrateidentität*, Math. Semesterber. **67** (2020), 21–26
[15] J. Plücker, *On a new geometry of space*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **155** (1865), 725–791
[16] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Teubner 1868
[17] J. Richter-Gebert, Th. Orendt, *Geometriekalküle*, Springer 2009
[18] J. Richter-Gebert, *Perspectives on projective geometry. A guided tour through real and complex geometry*, Springer 2011
[19] J. M. Selig, *Geometrical methods in robotics*, Springer 1996
[20] D. Shanks, *On Gauss and composition*, in *Number Theory and Applications* (R. Mollin, Hrsg.), Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1989, 163–204
[21] H.J.S. Smith, *Report on the theory of numbers*, 1859–1865; reprint Chelsea 1965
[22] W. Ströher, *Vektoralgebra I*, Vorlesung TU Wien, https://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/stroeher.html
[23] J. Taton, *Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker*, Elem. Math. **7** (1952), 1–5
[24] A. van der Poorten, *A note on NUCOMP*, Math. Comp. **72** (2003), 1935–1946

Mörikeweg 1, 73489 Jagstzell
Email address: `hb3@uni-heidelberg.de`