§ 10 Offene Fragen

"There are a lot of things
I don't understand myself" (Linus van Pelt)

Die folgenden Fragen sind durchnumeriert; hierbei bezieht sich die erste Ziffer auf den Paragraphen, dem ich die jeweilige Frage zugeordnet habe. Fragen, die ich mit den in den §§ 1-9 vorgestellten Methoden für lösbar halte, sind als Aufgaben formuliert. Schließlich sind besonders wichtige Fragen (bzw. solche, die ich für sehr wichtig halte) **fett gedruckt.**

1.1. Die in (1.10) und (1.12) gefundenen Schranken hängen sehr von der Wahl der GHB ab; es stellt sich also die Frage, ob, und wenn ja, wie man die GHB so wählen kann, daß die Schranken μ_i möglichst klein werden.

1.2. Sind die vor (1.17) definierten Lenstra-Konstanten μ_i und die dazugehörigen Schranken λ_i für $n \geq 3$ noch endlich (falls R kein Hauptidealring ist, gilt dies sicherlich; dafür sorgt die Bedingung (F-2), S. 33)).

1.3. In (1.21) wird für L=Kk eine Aussage bewiesen, wobei $k/\mathbb{Q}$ abelsch ist. Gilt u.U. etwas Ähnliches, wenn nur verlangt wird, daß $k/\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ abelsch ist (d.h. kann man die m-ten Einheitswurzeln durch elliptische Einheiten ersetzen?)

1.4. Kann man in (1.24) auf die Voraussetzung "n ist brauchbar" verzichten, oder läßt sie sich zumindest durch eine schwächere ersetzen?

1.5. Bestimme c(K) auch für andere Klassen von Kreiskörpern als für volle Kreisteilungskörper mit Primpotenzdiskriminante.

1.6. Bestimme c(K) für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a+b\sqrt{-3}})$, insbesondere im Fall a=-1, b=2; hier wissen wir, daß $c(K) \leq (4+\sqrt{13})/12 < 0.6338$ ist. Wenn wir $c(K) \leq 1/2$ zeigen könnten, würde folgen, daß der Körper 8. Grades L = K(i) normeuklidisch ist. Allerdings lassen jüngste Rechnungen meinerseits vermuten, daß hier $c(K) > 1/2$ ist.

2.1. Bestimme die fehlenden zweiten Minima in den Tafeln auf den Seiten 47 und 48.

2.2. Kann man in den Sätzen (2.5) bis (2.9) mit der vorgestellten Methode auch die höheren Minima (M_3, M_4, usw) bestimmen?

2.3. **Gilt (2.12) auch in Körpern mit Einheitenrang ≥ 2?**

2.4. Sei $C(\underline{K})$ die Menge aller $x \in \underline{K}$ mit $M(x) = M(\underline{K})$. Sind dann die folgenden Aussagen richtig?
a) Die Häufungspunkte von $C(\underline{K})$ liegen in K;
b) $C(\underline{K})$ enthält mindestens ein x aus K.

3.1. Finde einfache Beweise dafür, daß $D(m)$ für die Werte $m = 193, 241, 337, 457, 601$ nicht normeuklidisch ist.

3.2. Zeige, daß es für alle primen $p \equiv 1 \bmod 24$ mit $p > 601$ natürliche Zahlen r, s, t, u gibt mit $(r,s) = (t,u) = 1$ und $(r/p) = (s/p) = (t/p) = -1$.

3.3. Zeige, daß $D(10)$ und $D(65)$ die einzigen semi-euklidischen quadratischen Ringe mit von 1 verschiedener Klassenzahl sind.

3.4. **Ist der Ring $R = D(14)$ euklidisch?** Daß R nicht normeuklidisch ist, haben wir bereits gesehen. Die Frage, ob es auf R andere Funktionen gibt, bezüglich derer R euklidisch ist, hat in diesem speziellen Fall erstmals Samuel (1971) explizit gestellt. Lenstra hat dann 1974 vorgeschlagen, in dieser Hinsicht "gewichtete Normen" zu betrachten: dazu wähle man ein Ideal P in R, setze $N(P)=c$ für ein positives reelles c, sowie $N(Q) = \|Q\|$ für alle andern Primideale Q. Dann setze man N multiplikativ auf alle Ideale in R fort und definiere $N(a):=N(aR)$ für alle $a \in K$. N heißt die durch $N(P)=c$ gewichtete Norm.
Wir wollen nun statt Abbildungen $f:R \longrightarrow \mathbb{N}$ auch Abbildungen $f:R \longrightarrow \mathbb{R}$ als euklidische Funktionen zulassen, wenn es zu jedem $a \in R$ nur endlich viele Funktionswerte $< f(a)$ gibt (damit kann man die Menge $f(R)$ nach wachsenden Funktionswerten abzählen und erhält so eine Bijektion $g: f(R) \longrightarrow \mathbb{N}$; damit ist dann $g \circ f: R \longrightarrow \mathbb{N}$ eine mögliche euklidische Funktion im bisherigen Sinne).
Wir betrachten nun das Ideal $P = (4+\sqrt{14})$ der Norm 2 in R und fragen uns, ob man $N(P) = c$ so wählen kann, daß die dadurch gewichtete Norm eine auf R euklidische Funktion wird. Damit das Ideal $I = (7+2\sqrt{14})$ der

Norm 7 euklidisch bezüglich N wird, muß jede prime Restklasse mod I ein Element a mit $N(a) < 7 = N(7)$ enthalten. Da $u = 15+4\sqrt{14} \equiv 1$ mod I ist, enthalten nur die Restklassen $\equiv \pm 1$ mod I Einheiten. Weiter haben die Elemente $\pm 3+\sqrt{14}$ die Norm 5 und sind $\equiv 3$ mod I. Wegen $P = (4+\sqrt{14})$ und $4+\sqrt{14} \equiv -3$ mod I enthält auch P kein Element $\equiv 2$ mod I der Norm < 7. Da die einzigen Ideale der Norm < 7 die Ideale R, $(\pm 3+\sqrt{14})$ und möglicherweise Potenzen von P sind, gilt $N(a) \geq N(P)^2$ für jedes $a \equiv 2$ mod I. Damit also $N(a) < 7$ wird, müssen wir $c^2 = N(P)^2 < 7$ wählen.
Jetzt betrachten wir $I = (2) = P^2$; soll die Restklasse $1+\sqrt{14}$ mod I ein Element mit Norm $<c^2$ enthalten, so müssen wir $5 < c^2$ machen, weil J=R das einzige Ideal mit $I+J = R$ und $N(J) < 5$ ist.
Also kann die durch $N(4+\sqrt{14}) = c$ gewichtete Norm höchstens dann eine euklidische Funktion auf R sein, wenn $\sqrt{5} < c < \sqrt{7}$ gilt. Die einfachste Möglichkeit, c zu wählen, ist daher wohl $c = \sqrt{6}$. Tatsächlich hat Bedocchi 1985 auf einem ganz anderen Weg ebenfalls diese Funktion gefunden und vermutet, daß sie euklidisch auf R ist.

4.1. In quadratischen Zahlringen K mit d=disc K gilt bekanntlich $\sqrt{d}/(16+6\sqrt{6}) \leqq M(K) \leqq \sqrt{d}/4$. In kubischen Zahlkörpern mit Einheitenrang 1 dagegen weiß man $\sqrt{d}/420 \leqq M(K) \leqq |d|^{2/3}/16\sqrt[3]{2}$, wobei Exponent 2/3 und Faktor $1/16\sqrt[3]{2}$ bestmöglichst sind (allerdings ist diese letzte Ungleichung nur für disc K < -1236 bewiesen). In Analogie zum quadratischen Fall könnte man nun vermuten, daß sich die untere Schranke $\sqrt{d}/420$ verbessern läßt zu $k_1\,|d|^{2/3}$ für ein reelles k_1. Van der Linden schreibt bei seinem Beweis der "Casselschen Schranke" $\sqrt{d}/420$, daß zwischen dem Beweis im kubischen und im quadratischen Fall eine gewisse Asymmetrie liegt, und er vermutet, daß dies daran liegt, daß einige seiner Abschätzungen im kubischen Fall nicht bestmöglichst sind.
Falls sich der Exponent 1/2 in der Casselschen Schranke tatsächlich auf 2/3 verbessern läßt, so hätte dies wohl auch Auswirkungen auf den totalreellen kubischen Fall (bzw. auf Zahlkörper beliebigen Grades und beliebiger Signatur überhaupt): hier weiß man ja, daß $M(K) \leq \sqrt{d}/8$ gilt und daß diese Schranke bestmöglichst ist, sodaß man auch in diesem Fall vermuten würde, daß es ein reelles k_2 mit $k_2\sqrt{d} \leq M(K)$ gibt.
Schließlich würde man so zu der Vermutung geführt, daß es nur endlich viele normeuklidische Zahlkörper mit gegebenem Körpergrad n gibt.

4.2. Zeige (z.B. mit einem Computer), daß die Ungleichung $M(K) \leq |d|^{2/3}/16\sqrt[3]{2}$ auch für die Körper mit $-300 \geq \mathrm{disc}\, K \geq -1236$ gilt. Für die Körper mit $-23 \geq \mathrm{disc}\, K \geq -199$ folgt dies aus den Werten für M(K), die wir in § 4 bestimmt haben. Auch für die euklidischen Körper mit $-200 \geq \mathrm{disc}\, K \geq -1236$ folgt die Ungleichung sofort.

4.3. Bestimme M(K) für den kubischen Körper mit $\mathrm{disc}\, K = -87$.

4.4. Sind die kubischen zyklischen Körper mit $\sqrt{d} = 103, 109, 127$ und 157 normeuklidisch?

4.5. Gibt es kubische zyklische Körper mit EA und $\sqrt{d} \geq 5 \cdot 10^5$?

5.1. Finde eine beste obere Schranke für M(K), wo K totalkomplexer Zahlkörper 4. Grades ist. Nach Davenport und Swinnerton-Dyer ist $M(K) \leq c \cdot d^{3/4}$ bestmöglich; jedoch haben sie hierfür keinen Beweis gegeben.

5.2. Gilt für beliebige Dirichlet'sche Körper die Abschätzung $M(K) \leq \sqrt{d}/16$?

5.3. Gilt für quadratische Erweiterungen imaginärquadratischer Zahlkörper $M(K) \leq c\sqrt{d}$?

5.4 . Finde eine Klasse totalkomplexer biquadratischer Zahlkörper, für die $M(K) \leq c \cdot d^{3/4}$ bestmöglich ist.

5.5. Beende die Klassifikation der reinen biquadratischen Zahlkörper mit EA.

5.6. Gibt es nur endlich viele reine Zahlkörper von Zweierpotenzgrad?

6.1. Bestimme M(K) für D(-1,13), D(-1,17), D(-3,2), D(-3,-11) und D(-3,-19).

6.2. Bestimme M(K) für weitere Klassen bizyklischer Zahlkörper, beispielsweise für D(q,m), $q = -1, -2, -3$, $m = n^2 \pm r$, $r|4n$.

7.1. Beende die Klassifikation der normeuklidischen Dirichlet'schen Zahlkörper.

7.2. Bestimme M(K) für weitere Klassen Dirichlet'scher Zahlkörper

8.1. Finde alle normeuklidischen Zahlkörper 4. Grades, die einen quadratischen Teilkörper besitzen.

8.2. Zeige, daß es nur endlich viele normeuklidische Zahlkörper K gibt mit $(K:\mathbb{Q}) = 4$, $K/\mathbb{Q}$ zyklisch, disc $K = 125p^3$ (dies würde eine Vermutung von Heilbronn widerlegen).

9.1. Sind die Körper der p-ten Einheitswurzeln ($p = 17, 19$) normeuklidisch?