§ 9 Zahlkörper höheren Grades

Wir beginnen mit einem Zitat von H. Stark (1988):.
"Heilbronn seems to suspect ... that there may be infinitely many totally real Euclidean cubic fields. ... he goes even further and names two families of quartic and sextic fields that should be investigated." Dabei bezieht sich Stark auf die beiden folgenden Äußerungen von Heilbronn:
(1950):"Theorem 1: E.A. holds only in a finite number of cyclic cubic fields.
The question of E.A. in real non-cyclic fields is thus left open. Though I cannot prove any result in the opposite direction I should be surprised to learn that the analogue of theorem 1 is true in that case."
(1951):"Finally I should like to mention two types of cyclic fields for which E.A. may possibly hold in an infinity of cases.
(a) The real quartic fields $\mathbf{Q}(\sqrt{\omega p})$, $\omega = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, of discriminant $125p^2$, where $p \equiv 3 \bmod 20$ is a prime;
(b) The complex sextic field $\mathbf{Q}(\zeta_9+\zeta_9^{-1}, \sqrt{-p})$ of discriminant -3^8p^3, where $p \equiv 3 \bmod 4$ is a prime."

Der Teil (b) der Heilbronnschen Vermutung aus dem Jahre 1951 erscheint mir recht mysteriös: $K = \mathbf{Q}(\zeta_9+\zeta_9^{-1}, \sqrt{-p})$ ist eine kubische Erweiterung von $k=\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$, und zwar ist K/k über Primidealen über (3) verzweigt. Also liegt K nicht im Hilbertklassenkörper von k, und es gilt $h(k)|h(K)$. Nun hat aber Heilbronn selbst bewiesen, daß es nur endlich viele k mit Klassenzahl 1 gibt; die obige Teilbarkeitsrelation impliziert dann, daß es auch nur endlich viele K mit Klassenzahl 1 gibt. Fast noch erstaunlicher ist, daß dies auch Stark übersehen hat (der ja bekanntlich alle imaginär-quadratischen Zahlkörper mit Klassenzahl 1 gefunden hat.

Tatsächlich ist es nicht schwer zu zeigen, daß K nur für p=3 oder p=11 normeuklidisch sein kann (für p=3 ist $K=\mathbf{Q}(\zeta_9)$, K also normeuklidisch). Ist nämlich $p>11$, und hat $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ Klassenzahl 1, so muß $p\equiv 1 \bmod 3$ sein (andernfalls müßte k Elemente der Norm 3 besitzen, was nicht der Fall ist). Also ist $(1-\sqrt{-p})^2 \equiv 1-p-2\sqrt{-p} \equiv \sqrt{-p} \bmod 3$; das Element minimaler Norm in der Restklasse $\sqrt{-p} \bmod 3$ ist aber $(3-\sqrt{-p})/2$ mit der Norm $(p+9)/4$, und für $p\geq 43$ ist diese Norm >9. Nach (1.4) kann K dann nicht normeuklidisch sein. Im Falle $p=19$ ist $(3-\sqrt{-p})/2$ keine Norm aus O_K, weil (7) in $\mathbf{Q}(\zeta_9+\zeta_9^{-1})$ träge ist; also ist K für $p>11$ nicht normeuklidisch. Ist schließlich p=7, so sind sowohl $\sqrt{-p}$, als auch $(3-\sqrt{-p})/2$ keine Normen aus O_K, womit wir die obige Behauptung bewiesen haben.

Weitere Klassen von Körpern, die man mit einfachen Mitteln untersuchen kann, sind z.B. $\mathbf{Q}(\rho,\sqrt[3]{m})$ oder $\mathbf{Q}(i,\sqrt[4]{m})$ für $m\in\mathbf{Z}$. Hier lassen sich ohne weiteres neue Ergebnisse erzielen. Ähnliches gilt für Zahlkörper der Form $\mathbf{Q}(\sqrt[n]{m})$ mit z.B. n=5, 6, 8 usw. , oder überhaupt für $\mathbf{Q}(\sqrt[n]{m}, \sqrt{-l})$, $l\in\mathbf{N}$.

Verhältnismäßig wenig dagegen weiß man über den euklidischen Algorithmus in Kreisteilungskörpern. Es ist zwar inzwischen bekannt, daß $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ für die Werte m = 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 20, 24 normeuklidisch ist, und daß $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ genau für m= 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 60, 84, weiß man seit den Untersuchungen von K. Uchida, H.L. Montgomery und J.M. Masley (sh. z.B. Masley u. Montgomery 1976). Außerdem kann man ohne große Mühe zeigen, daß die Restklasse $1+\lambda^5 \bmod \lambda^6$ keine Einheiten enthält, wo $\lambda = 1+\zeta_{32}$ ein Element der Norm 2 in $\mathbf{Q}(\zeta_{32})$ ist (sh. dazu Lenstra 1979, S. 14); da es in $\mathbb{Z}[\zeta_{32}]$ keine Elemente der Norm 33 oder 65 gibt, enthält obige Restklasse nur Elemente der Norm ≥ 97, und es folgt $M(K) \geq \frac{97}{64}$ (man beachte $N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha) \equiv 1 \bmod 32$ für $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_{32}]$; weitere für einen vollständigen Beweis nötige Einzelheiten, z.B. Information über die Einheiten in $\mathbb{Z}[\zeta_{32}]$, findet man bei Washington 1982).